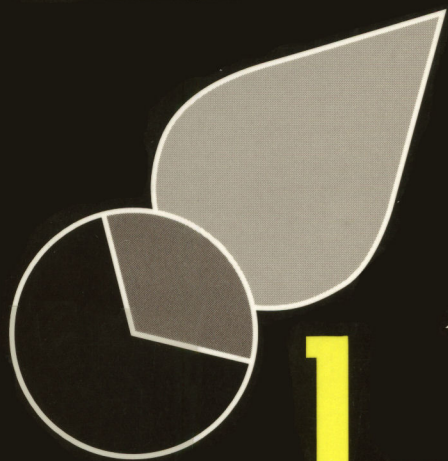
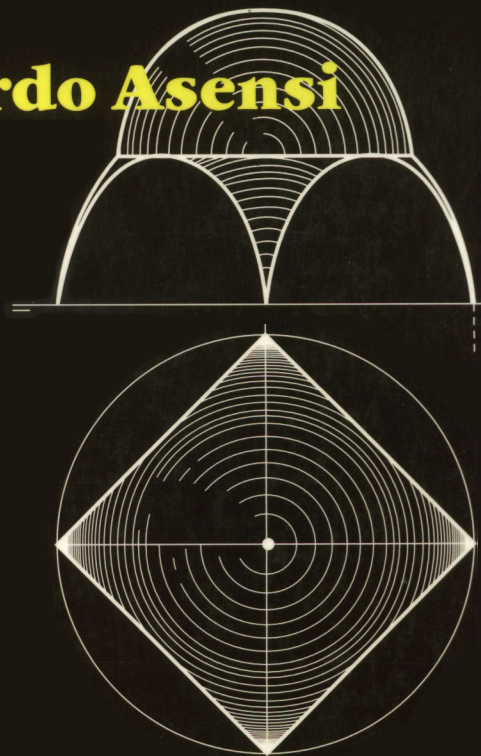
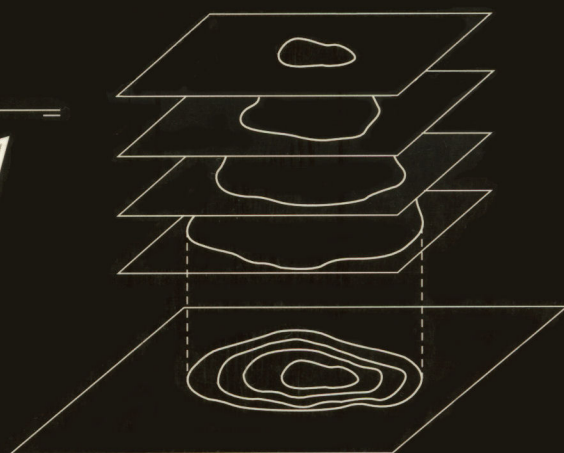
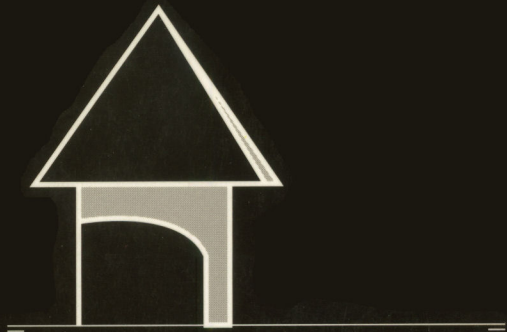
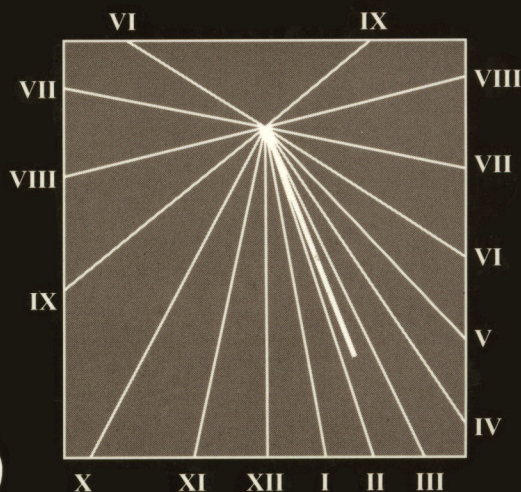


F. Izquierdo Asensi



1 geometría descriptiva



24^a edición

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

ES PROPIEDAD

Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, sin previo consentimiento, por escrito, del autor.

© Fernando Izquierdo Asensi
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

ISBN: 84-922109-5-8
Depósito Legal: M-23.691-2000

Preimpresión: Montytexto, S.L.
Santa Felicidad, 26 - 28017 Madrid

Imprime: CLM - Eduardo Marconi, 3.
Políg. Ind. Codeín. Fuenlabrada (Madrid)

Distribuye: Editorial Paraninfo
Magallanes, 25 - 28015 Madrid

FERNANDO IZQUIERDO ASENSI

Doctor Ingeniero de Construcción. Ex-Profesor Titular de
la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

VIGÉSIMA CUARTA EDICIÓN TOTALMENTE REVISADA

*Declarada de Utilidad Pública por el Ministerio
de Educación y Ciencia, por Orden del 10 de Abril
de 1978.*

*Recomendada en diversos Centros y Escuelas Téc-
nicas y Superiores de Arquitectura e Ingeniería, de
España e Hispanoamérica.*

PRÓLOGO

Esta obra está dedicada a aquellos alumnos que, sin tener grandes conocimientos de Geometría métrica, han de iniciar el estudio de la Geometría Descriptiva.

Por ello hemos intentado exponer, de la manera más clara posible, la obtención de las diversas proyecciones de un cuerpo en los cuatro sistemas de representación, así como la de su perspectiva caballera y cónica, no habiéndose regateado esfuerzo alguno para que el estudiante pueda comprender las teorías y razonamientos por complicados que puedan parecer.

Las normas generales que resumen, a grandes rasgos, el método de enseñanza adoptado son:

a) Basar los razonamientos en los teoremas elementales de Geometría métrica, explicando éstos previamente por si el alumno los desconociera

b) Razonar los ejercicios (resolviéndolos previamente en el espacio) y deducir el método a seguir que luego ha de aplicarse en cualquier sistema de representación.

c) Indicar una serie de reglas generales para resolver problemas de modo mecánico, evitando así razonamientos innecesarios.

d) Utilizar figuras que permitan ver las proyecciones de los elementos geométricos y sus posiciones en el espacio.

La eficacia de este método ha sido confirmada por las numerosas ediciones publicadas y por haber sido recomendada la obra en gran número de Escuelas y Centros Superiores y Técnicos de Enseñanza.

Para corresponder a tan favorable acogida, a partir de la 5ª edición, se hicieron sucesivas ampliaciones para abarcar las materias incluidas en los actuales programas de estudio. Se incluyeron nuevos capítulos de sombras, proyección central, gnomónica y reloj de sol y otros, se ampliaron considerablemente como los de intersección de superficies, proyección axonométrica ortogonal y perspectiva caballera y cónica.

También se adoptó una nueva notación más clara e intuitiva que la anterior y se utilizó la numeración decimal en capítulos, párrafos y figuras, por considerarla más práctica y sencilla.

En la 21ª edición se incluyeron: poliedros regulares convexos, conjugados y semirregulares: prismas y antiprismas regulares y perspectivas de circunferencia y esfera.

Para simplificar el método de enseñanza, en las veintitrés primeras ediciones no se utilizaron propiedades de Geometría proyectiva pero la experiencia de tantos años de profesorado aconseja incluir, aunque sea someramente, las relaciones homológicas y afines entre formas planas, proyecciones y abatimientos con

las que tan fácil y elegantemente se resuelven muchas cuestiones.

Esta es la innovación principal de la actual edición, caracterizada además por su distinto formato, mayor tamaño de página y aumento del número de figuras. También se ha revisado totalmente la obra; se han reducido o simplificado materias y razonamientos y se han incluido algunas ampliaciones sobre propiedades de líneas y superficies; axonometría ortogonal y oblicua; perspectiva oblicua y frontal (caballera y militar); método perspectivo de Reile y de planta y vista separadas; perspectiva de terrenos, etc.

Sería una ingratitud por mi parte no citar a los que con tanto interés y pericia han colaborado en la com-

posición, tirada y encuadernación de esta edición. También quiero hacer constar que este trabajo no hubiera visto la luz, de no haber estado alentado y apoyado por los que dentro y fuera de España, han adquirido o recomendado mi obra.

Al hacer patente tan valiosas ayudas, solo pretendo reconocer la gran deuda de gratitud con ellos contraída y expresar a todos, profesores, alumnos y colaboradores, mi más expresivas gracias.

F. IZQUIERDO

NOTACIONES Y ABREVIATURAS

Para evitar toda indeterminación o confusión entre elementos geométricos y proyecciones, hemos utilizado, lo mismo que en n/ G. D. S. y A., la notación siguiente:

1. Elementos geométricos del espacio

Los puntos se representan con mayúsculas: A, B, M, P, \dots

Las rectas y líneas, con minúsculas: a, b, n, r, t, \dots

Los planos, con minúsculas griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Los cuerpos y superficies, con mayúsculas griegas: $\Delta, \Sigma, \Omega, \dots$ (o latinas, si no hubiera posibilidad de confusión).

El elemento definido por otros, se representa como sigue:

Punto de corte de la recta r y el plano α : $[r, \alpha]$.

Recta de intersección de los planos α y β : $[\alpha, \beta]$.

Plano determinado por el punto A y la recta r : $[A, r]$.

Plano definido por dos rectas a y m que se cortan: $[a, m]$.

2. Planos de proyección

Para distinguirlos de otros planos, se les designa por su inicial en mayúscula. El horizontal, por H ; el vertical (primer vertical), por V , y el segundo vertical, por W .

Si el plano de proyección es arbitrario, se representa por la letra π , lo mismo que en cónica.

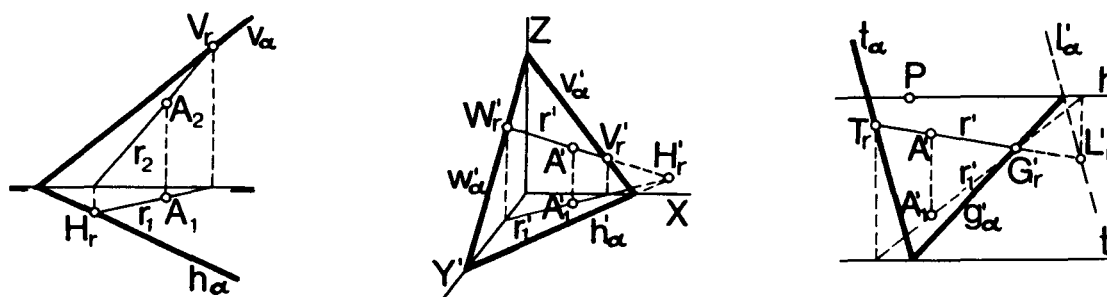


Fig. a.

3. Proyecciones de punto y recta (Fig. a)

a) En proyección diédrica, con las mismas letras del elemento del espacio, afectada del subíndice 1, 2 ó 3, según se trate de la proyección sobre el horizontal, vertical o segundo vertical, respectivamente. Las proyecciones de un punto A son, por tanto, A_1 y A_2 , y las de una recta r , r_1 y r_2 .

Para indicar que A o r están dados por sus proyecciones, se emplea también la notación \equiv y se escribe así: $A \equiv A_1-A_2$, $r \equiv r_1-r_2$. Por tanto, es lo mismo decir: punto A que punto A_1-A_2 ; recta r o recta r_1-r_2 , etc.

b) En proyección axonométrica, el punto A se proyecta sobre los planos coordenados en A_1 , A_2 y A_3 , y las proyecciones respectivas de estos cuatro puntos son: A' , A'' , A''' y A_4 , procediéndose análogamente en cónica.

4. Trazas de recta y plano, con un plano de proyección

Por ser puntual la traza de una recta, se la designa con la letra del plano de proyección de que se trate, y la letra de la recta, como subíndice. Así, H_r , es la traza horizontal de la recta r , y sus proyecciones quedan también definidas, puesto que la horizontal coincide con H_r , y la vertical está en LT (línea de tierra).

Análogamente, las trazas $h_\alpha-v_\alpha$ de un plano α , por la letra del plano de proyección en minúscula, y la griega del plano, como subíndice.

5. Líneas de referencia

Línea de tierra, en diédrica: LT .

Proyecciones de los ejes X, Y, Z , en axonométrica: X', Y', Z' .

Proyecciones de los ejes X, Y, Z , en caballera: X, Y', Z .

Línea de tierra y horizonte en perspectiva lineal: t y h .

6. Coincidencia de elementos

En geometría proyectiva o con elementos del espacio, la coincidencia de puntos, rectas o planos se representa por la notación \equiv y en proyecciones, con dicha notación o con guión. Ejemplos: Puntos o rectas coincidentes: $A \equiv B \equiv C$, $r \equiv s \equiv t$. Puntos y proyecciones coincidentes: $H_r-A_r-B_r$ ó $H_r \equiv A_r \equiv B_r$.

7. Abreviaturas utilizadas

n/G.D. = nuestra Geometría Descriptiva.

n/E. de G.D. = nuestros Ejercicios de Geometría Descriptiva.

n/D.T. = nuestro Dibujo Técnico (Editorial Anaya).

1. FORMAS GEOMÉTRICAS. PROYECCIÓN Y SECCIÓN

1.1. Elementos geométricos

Los *conceptos primarios* o *elementos fundamentales* de la geometría son *el punto, la recta y el plano*. De aquí, el fracaso de cuantos intentos se han realizado para definirlos, a pesar de la facilidad con la que los imaginamos o materializamos.

El plano lo identificamos, por abstracción, con la superficie del agua tranquila de un estanque; la recta, con un rayo de luz y el punto, con la intersección de dos rectas.

1.2. Formas geométricas. Clasificación

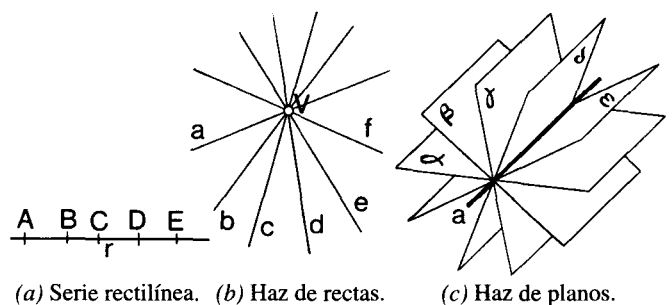
Se llama *figura geométrica* a cualquier conjunto determinado de elementos (puntos, rectas, planos) aislados o relacionados entre sí. Ejemplo: el segmento, el polígono, la pirámide, etc.

Formas geométricas son los conjuntos continuos de infinitos elementos (puntos, rectas, planos) en los que pueda contenerse cualquier figura. El concepto de *forma* es, por tanto, más general que el de *figura*. Ejemplo: todas las figuras planas (segmentos, ángulos, polígonos, curvas planas, etc.) pertenecen a la forma plana. Las formas se clasifican en tres grupos:

1.º FORMAS DE PRIMERA CATEGORÍA.- Constituidas por elementos de una sola especie (sólo puntos o sólo rectas o sólo planos). Las más sencillas

o *fundamentales* son (Fig. 1.1):

a) *La serie rectilínea* o conjunto de los infinitos



(a) Serie rectilínea. (b) Haz de rectas. (c) Haz de planos.

Fig. 1.1.—Formas de 1ª categoría.

puntos *A, B, C, ...*, (Fig. a) de una recta *r* (base de la serie). Son figuras de esta forma: el segmento o cualquier conjunto de puntos de *r*.

b) *El haz de rectas, haz de rayos o radiación plana* (Fig. b). Es el conjunto de las infinitas rectas *a, b, c, ...* de un plano (base del haz) que pasan por un punto *V* (vértice o centro). Son figuras de estas formas el ángulo y el haz de rayos o semi-rayos, en número finito.

c) *El haz de planos* o conjuntos de los infinitos planos (Fig. c) que pasan por una recta *a* (arista del haz). Son figuras de esta forma: el ángulo diedro y el haz de planos aislados o en número finito.

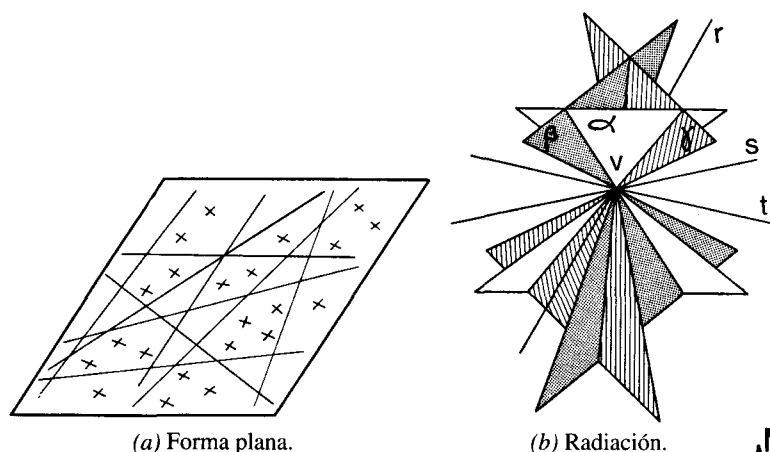


Fig. 1.2.—Formas de 2ª categoría.

2.º FORMAS DE SEGUNDA CATEGORÍA. Constituidas por elementos de dos especies (puntos y rectas o rectas y planos). Las fundamentales son (Fig. 1.2):

- a) *La forma plana* o conjunto de todos los puntos y rectas de un plano (Fig. a). Son figuras de esta forma: la serie rectilínea, el haz de rectas y todas las figuras planas (líneas planas, polígonos, etc.)
- b) *La radiación* o conjunto de las infinitas rectas y planos (Fig. b) que pasan por un punto V (vértice de la radiación). Son figuras de esta forma: el haz de rectas, el de planos, las superficies cónicas y piramidales, etc.

3.º FORMA DE TERCERA CATEGORÍA Constituida por el conjunto de los infinitos puntos, rectas y planos del espacio. Son figuras de esta forma: los poliedros, las superficies curvas y regladas y, en general, todas las figuras geométricas, incluyendo las formas anteriores.

1.3. Elementos impropios

Los conceptos de punto, recta y plano, definidos en Geometría Métrica, se generalizan en Proyectiva, al admitir la existencia de los elementos impropios o del infinito.

1.º PUNTO IMPROPIO. El concepto de dirección es intuitivo y se representa por una flecha d o por cualquiera de sus paralelas a, b, c, \dots (Fig. 1.3) luego si éstas tienen común la dirección d , podemos definir el punto impropio como la dirección de una recta. Por tanto:

- Las rectas paralelas tienen un punto impropio común.

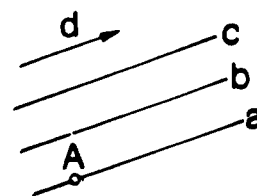


Fig. 1.3.—Punto impropio de dirección d .

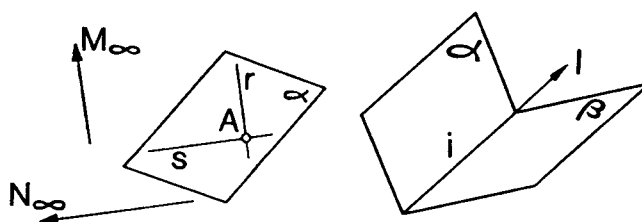


Fig. 1.4.—Plano determinado por un punto propio y dos impropios.

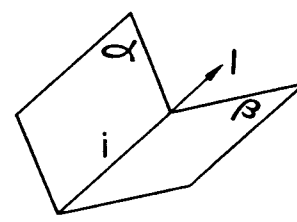


Fig. 1.5.—Intersección de dos rectas impropias (orientaciones de planos).

- Dos rectas coplanarias, no coincidentes, se cortan en un punto (propio o impropio).
- La recta determinada por un punto A y otro impropio, de dirección d , es la paralela a d , trazada por A .

2.º RECTA IMPROPIA. Es la orientación de un plano, y queda definida por dos direcciones o puntos impropios M_∞ y N_∞ (Fig. 1.4). Las paralelas r y s a las direcciones de M_∞ y N_∞ , trazadas por un punto A , determinan un plano α . Haciendo lo mismo con otros puntos del espacio, obtendríamos nuevos planos paralelos entre sí, es decir, con la misma *orientación*.

Los puntos impropios (direcciones) de las rectas r, s, \dots , del haz de vértice A y base α están contenidos en la recta impropia $r_\infty \equiv M_\infty N_\infty$ (orientación) del plano α . Por tanto:

- Dos planos, no coincidentes, se cortan según una recta (propia o impropia).
- Un plano queda determinado por un punto A y una orientación (recta impropia $M_\infty N_\infty$)

3.º PLANO IMPROPIO. Es el conjunto de los puntos impropios y rectas impropias del espacio. En efecto, dos planos no coincidentes α y β (Fig. 1.5) se cortan, según una recta i cuyo punto impropio I pertenece a las rectas impropias de α y β , es decir:

Dos rectas impropias (orientaciones de α y β) se cortan según un punto impropio (dirección de i) y determinan el plano impropio, común a todas.

1.4. Operaciones proyectivas. Proyección y Sección

Las operaciones fundamentales de la Geometría Proyectiva son *proyectar* y *cortar* (Fig. 1.6) y son las utilizadas en Descriptiva para representar las figuras.

<p>a) PROYECCIÓN DESDE UN PUNTO</p> <p>Proyectar un punto A desde V es trazar la recta $VA \equiv a$, llamada <i>recta proyectante</i>.</p> <p>Proyectar una recta r desde un punto V es trazar el plano $\alpha \equiv [V, r]$ determinado por V y r, llamado <i>plano proyectante</i>.</p> <p>Proyectar un figura formada por puntos y rectas desde V, es trazar las rectas y planos que V determina con los puntos y rectas de la figura. La radiación formada es la <i>proyección</i> o <i>perspectiva</i> de la figura y V, el <i>centro de proyección</i>.</p>	<p>a') SECCIÓN POR UN PLANO</p> <p>Cortar una recta a por un plano π es hallar la intersección o <i>traza</i> π_a de a con π.</p> <p>Cortar un plano α por otro π es hallar la intersección o <i>traza</i> π_α de α con π.</p> <p>Cortar una figura formada por planos y rectas, por un plano π es hallar las <i>trazas</i> de dichas rectas y planos con π. La forma plana formada por las trazas se llama <i>sección</i> y π, <i>plano secante</i> o <i>plano sección</i>.</p>
---	--

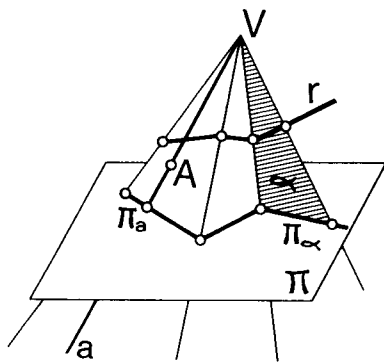


Fig. 1.6.—Proyección desde un punto V y sección por un plano α .

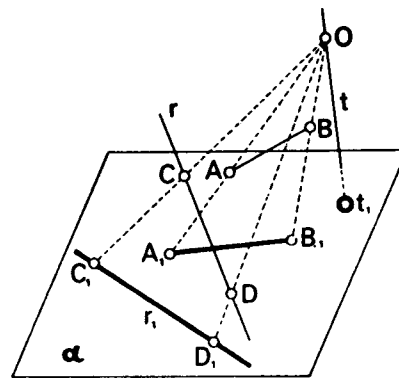


Fig. 1.7.—Proyección cónica de punto y recta.

b) finalmente: *Proyectar una figura sobre un plano es lo mismo que cortar la proyección por dicho plano.*

Si el centro de proyección es propio, la proyección se llama *cónica* o *central* y si es impropio, *paralela* o *cilíndrica*. Esta última se divide en *ortogonal* u *oblicua*, según que la dirección de proyección sea normal u oblicua respecto al plano de proyección.

1.5. Proyección cónica. Propiedades

La proyección de un punto A del espacio (Fig. 1.7), desde un punto O , sobre un plano α es (núm. 1.4-b) la intersección o traza A_1 del rayo proyectante OA con α . La proyección de una recta r es la intersección o traza

r_1 del plano $[O, r]$, proyectante de r , con α .

Para hallarla, basta unir las proyecciones C_1 y D_1 de dos puntos C y D de r . Si la recta pasa por O , como la t , su proyección se reduce al punto t_1 .

La proyección de una curva ACD (Fig. 1.8), desde O , sobre α , es la traza $A_1C_1D_1$ del cono proyectante de la curva, con α . Las generatrices del cono son las proyectantes de los puntos A, B, T, \dots , y sus trazas A_1, B_1, T_1, \dots , los puntos de la curva proyección.

Las propiedades más importantes de la proyección cónica, deducidas de lo expuesto, son:

a) *Si una recta o una superficie es proyectante, todos sus puntos se proyectan sobre su traza con el plano de proyección α .* Tal sucede con la recta t , el plano $[V, r]$ (Fig. 1.7) o el cono proyectante de la curva ACD (Fig. 1.8).

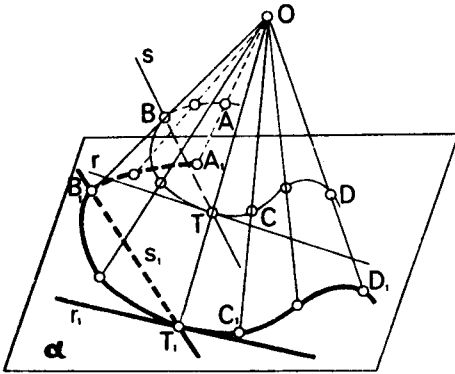


Fig. 1.8.—Proyección de una curva y de la tangente de ella.

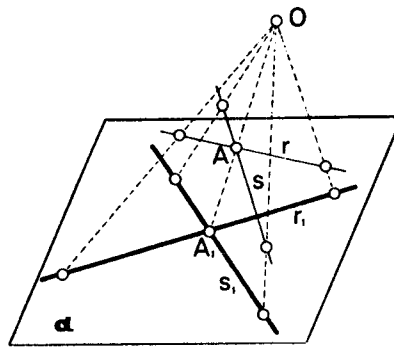


Fig. 1.9.—Proyección de rectas que se cortan.

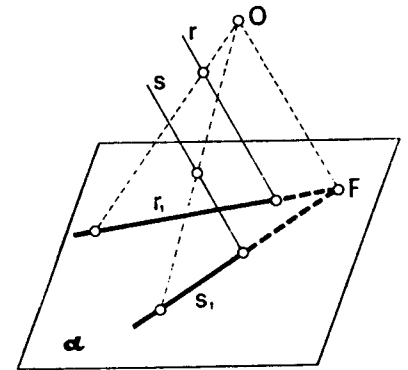


Fig. 1.10.—Proyección de rectas paralelas.

b) Si dos o más rectas r y s (Fig. 1.9) se cortan en un punto A , sus proyecciones r_1 y s_1 pasan por la proyección A_1 de A puesto que si A pertenece a r y s , A_1 ha de pertenecer a r_1 y s_1 . Lo mismo sucede con dos curvas o con recta y curva.

c) Si dos o más rectas r y s (Fig. 1.10) son paralelas, de dirección I (no dibujada), sus proyecciones r_1 y s_1 concurren en la proyección F de I (siendo OF paralela a la dirección I) y si r y s son también paralelas a α , r_1 y s_1 son paralelas a ellas. Ambas propiedades se deducen fácilmente de la anterior.

d) Si una recta r (Fig. 1.8) es tangente a una curva \widehat{ACD} en un punto T , su proyección r_1 es también tangente a $A_1\widehat{C_1D_1}$, en la proyección T_1 de T , puesto que si el extremo B de la secante $s \equiv BT$ recorre la curva, aproximándose a T , B_1 recorrerá $A_1\widehat{C_1D_1}$, aproximándose a T_1 y en el límite, cuando B tienda a confundirse con T y s se convierta en la tangente r (nº 14,2), B_1 tenderá a confundirse con T_1 y s_1 se convertirá en la tangente a $A_1\widehat{C_1D_1}$ en T_1 .

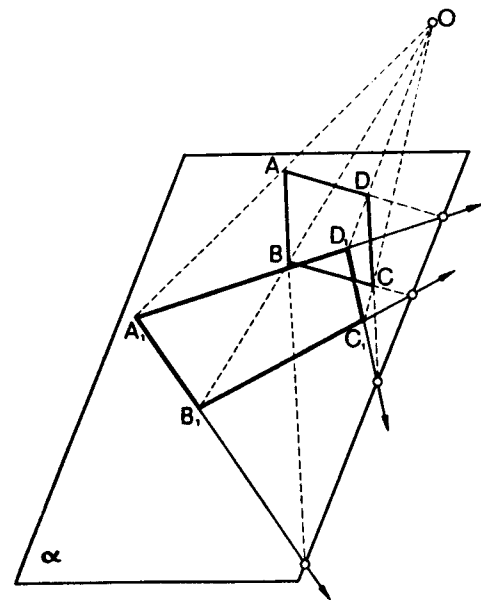


Fig. 1.11.—Proyección de un cuadrado.

1.6. Invariantes de la proyección cónica

Al proyectar el cuadrado $ABCD$ (Fig. 1.11), desde O , sobre el plano α , se obtiene el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$, lo que demuestra que han desaparecido las propiedades características del cuadrado, tales como la igualdad y magnitud de sus ángulos, y el paralelismo, perpendicularidad e igualdad de sus lados.

En la figura 1.12, también se observa que la ordenación y separación de los puntos A , B y C es distinta de la de sus proyecciones A_1 , B_1 y C_1 , es decir, que B , por ejemplo, es interior al segmento \widehat{AC} (separa a A y C) mientras que B_1 es exterior a $A_1\widehat{C_1}$.

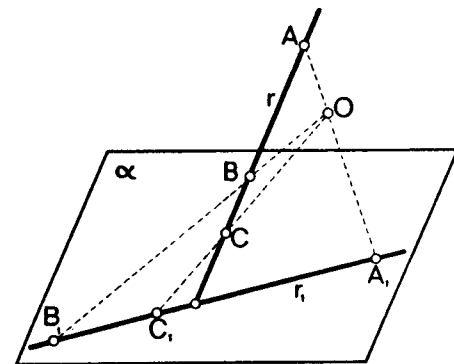


Fig. 1.12.—Ordenación y separación de puntos en proyección cónica.

Las propiedades geométricas de una figura que se conservan al proyectarla se llaman *invariantes proyectivos*. En proyección cónica no son invariantes, como

hemos visto, el paralelismo, la perpendicularidad, la igualdad, la semejanza o la separación y ordenación puntual, ni magnitudes como: longitudes, ángulos, áreas, etc.

Los invariantes o propiedades geométricas que se conservan son: la incidencia (estar en o pasar por), intersección y tangencia y dentro de las proyectivas, la razón doble, la polaridad, etc.

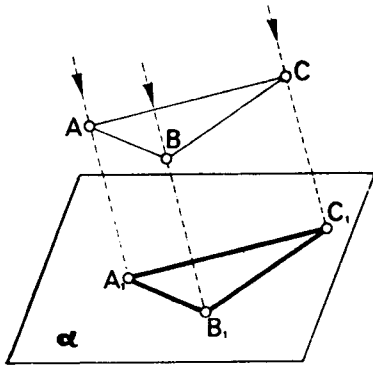


Fig. 1.13.—Proyección cilíndrica de una figura, de plano paralelo al de proyección.

1.7. Proyección cilíndrica

Los invariantes de esta proyección son los citados en cónica más los debidos al paralelismo de los rayos proyectantes que son: el paralelismo, la separación y ordenación puntual, y la razón simple de tres puntos. Así, en la figura 1.13, la proyección cilíndrica de una figura de plano paralelo al de proyección es otra igual a ella, puesto que las secciones cilíndricas (prismáticas) de planos paralelos son iguales y en la figura 1.14, la proyección del cuadrado $ABCD$ sobre α , en la dirección de las flechas, es el paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$, puesto que siendo paralelos los planos proyectantes de los pares de lados paralelos, sus trazas con α , también lo serán.

1.8. Objeto de la Geometría Descriptiva. Sistemas de representación

La Geometría Descriptiva permite representar sobre un plano las figuras del espacio, por medio de proyec-

ciones y a partir de éstas, resolver los problemas de los elementos del espacio, utilizando sólo construcciones de Geometría plana. Esta reducción del espacio al plano se consigue, proyectando las figuras sobre el plano de la pizarra o del dibujo.

Los sistemas de representación utilizados en Descriptiva son:

- Sistema diédrico, de doble proyección o de Monge.
- Sistema acotado.
- Sistema axonométrico y
- Sistema cónico o central.

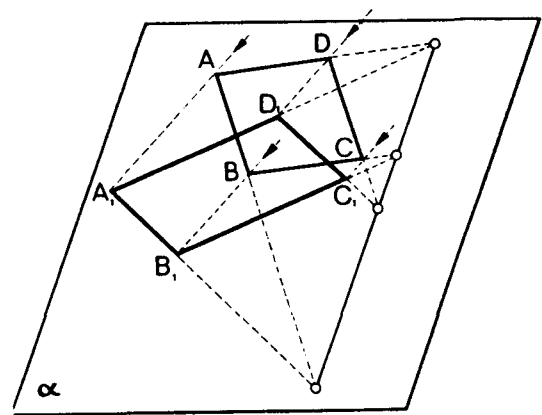


Fig. 1.14.—Proyección cilíndrica de un cuadrado.

En los tres primeros sistemas, se utiliza la proyección cilíndrica y en el cónico, la proyección cónica o central. De ahí, su nombre.

La condición fundamental que debe reunir todo sistema de representación es la *reversibilidad*, es decir, que dada una figura espacial, pueda siempre obtenerse sus proyecciones sobre un plano e, inversamente, que dadas las proyecciones, pueda determinarse la posición espacial de cualquier punto de la figura.

Para completar el estudio de las proyecciones, a continuación se exponen las relaciones que existen entre formas planas, proyecciones y abatimientos, de frecuente uso en todos los sistemas, por la facilidad y elegancia con que se resuelven muchos problemas.

2. RELACIONES ENTRE FORMAS PLANAS, PROYECCIONES Y ABATIMIENTOS

2.1. Homología entre forma plana y proyección

a) Una forma F de plano α (Fig. 2.1) y su proyección F' , desde un punto V , sobre un plano π , son secciones planas de la radiación de vértice V y se llaman *homológicas*. Se caracterizan porque cada punto A y su proyección A' (puntos homólogos) están alineados

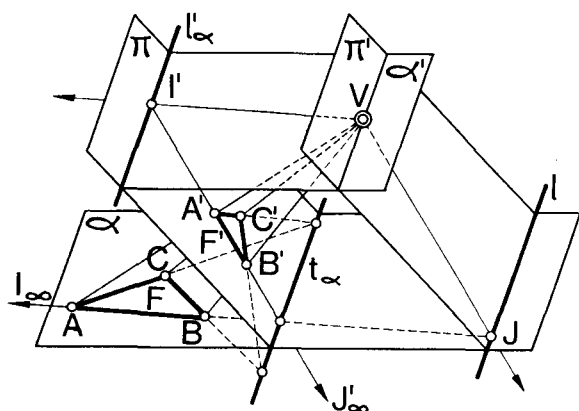


Fig. 2.1.—Homología entre forma plana y su proyección cónica.

con el vértice V (centro de homología) y las rectas homólogas AB y $A'B'$; AC y $A'C'$; ... se cortan en puntos de la intersección t_α de α y π (eje de homología) que es una recta de *puntos dobles*.

En la homología espacial, si los puntos homólogos están alienados con el centro V , las rectas homólogas se cortan en el eje t_α y a la inversa.

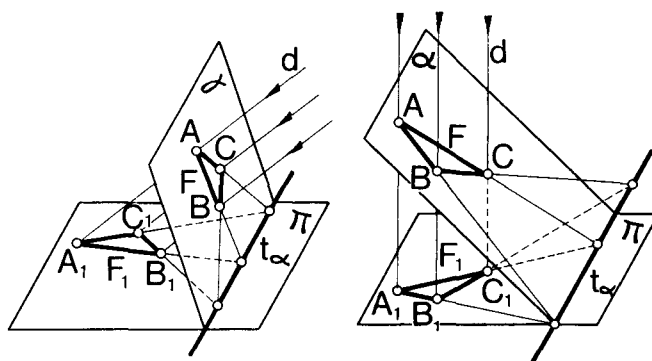


Fig. 2.2.—Afinidad entre forma plana y su proyección cilíndrica. Fig. 2.3.—Afinidad entre forma plana y su proyección ortogonal.

El punto I' de F' , homólogo del impropio I_∞ de F , se llama *punto límite* de F' y la recta l'_α de F' , homóloga de la recta impropia de α es la recta límite de π . Análogamente, el homólogo J de J'_∞ es punto límite de α , y l es la recta límite de α .

b) Si el centro de proyección V (Figs. 2.2 y 2.3) es impropio de dirección d (proyección cilíndrica), la homología se llama *homología afín* o, simplemente, *afinidad*, de eje t_α y dirección de afinidad d . En la afinidad no existen puntos límites ni rectas límites, puesto que si A , por ejemplo, es impropio, la recta AA_1 es impropia y corta a π en un punto impropio A_1 .

2.2 Afinidad entre forma plana y abatimiento o giro

a) Abatir un plano α sobre otro π (Fig. 2.4) es girar el plano α alrededor de su charnela o traza t_α de α y π hasta hacerlo coincidir con π . En este abatimiento (Fig. a), las rectas $A(A)$, $B(B)$, ..., etc. que unen cada punto con su abatimiento, son normales al bisector β del diedro $\alpha\pi$, lo que demuestra que el abatimiento (F) es una *proyección cilíndrica de F sobre π , según la dirección d normal al bisector β , luego (núm. 2, 1-b) F y (F) son afines de eje $t_\alpha \equiv [\alpha, \pi]$ y dirección de afinidad d , normal al bisector del diedro $\alpha\pi$.*

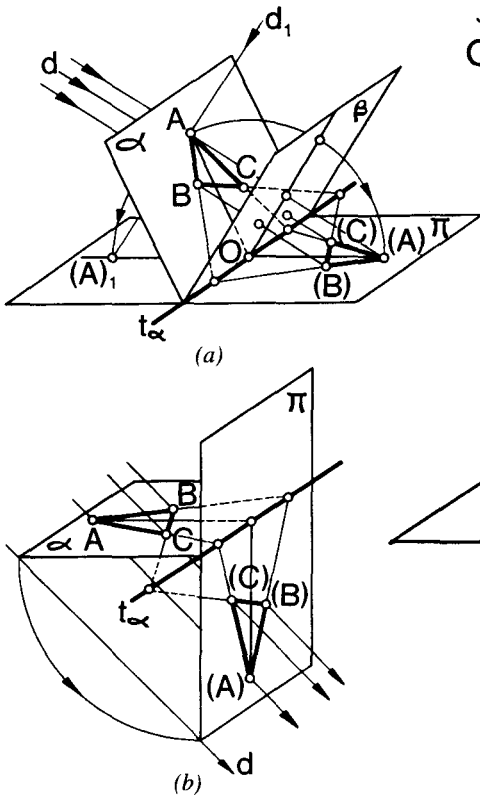


Fig. 2.4.—Afinidad entre forma plana y su abatimiento.

La afinidad será de dirección d o d_1 , según el sentido del abatimiento. Si α es normal a π (Fig. b), d formará 45° con α y π .

b) Como el abatimiento es un giro, podemos enunciar con más generalidad: *Si una forma plana F' se deduce de otra F por el giro de ésta, alrededor de un eje e complanario con ella, F y F' son afines de eje e y dirección de afinidad d , normal al bisector del diedro formado por los planos de F y F' .*

2.3. Producto de dos homologías de eje común

Si una forma F de plano α de la que sólo se ha dibujado el segmento \overline{AB} (Fig. 2.5), se proyecta desde dos puntos distintos O_1 y O_2 sobre un plano π , las proyecciones F_1 y F_2 se corresponden en una homología plana (homología producto) de centro O , (traza de O_1O_2 con π) y eje e (traza de α con π).

En efecto, el plano $[A, A_1, A_2]$ definido por los rayos proyectantes O_1A_1 y O_2A_2 de A corta a π , según la recta A_1A_2 que pasa por O , luego los pares de puntos $A_1, A_2; B_1, B_2; \dots$; estarán alineados con O (centro de la homología). Por otra parte, el eje e es común a las homologías de centro O_1 y O_2 , luego si AB corta a e , en I , sus homólogas A_1B_1 y A_2B_2 también concurrirán en I . De aquí, que podamos enunciar:

Si dos radiaciones O_1 y O_2 , proyectantes de una forma de plano α , son cortadas por un plano π , las

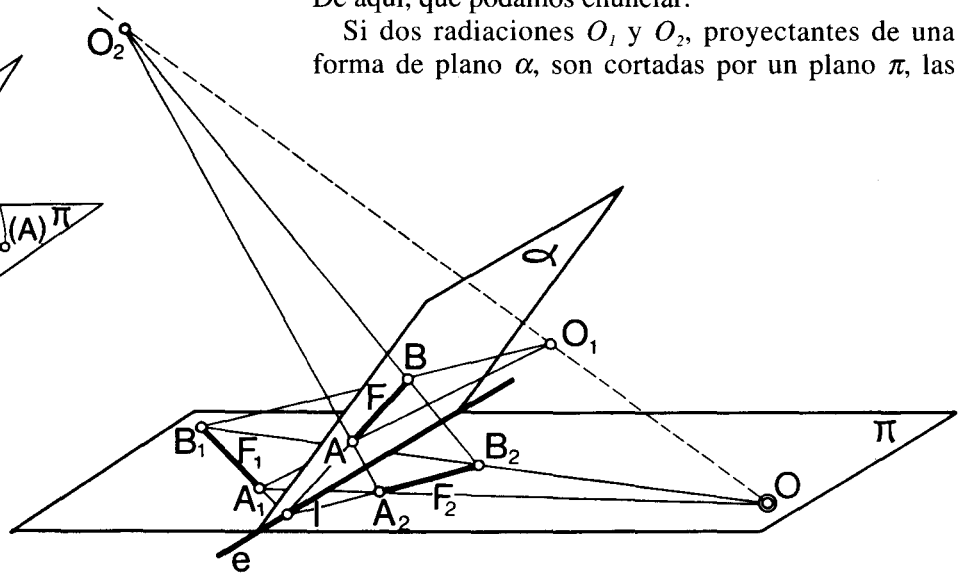


Fig. 2.5.—Producto de homologías de eje común.

secciones F_1 y F_2 se corresponden en una homología plana (homología producto), de centro $O \equiv [O_1O_2, \pi]$ y eje $e \equiv [\alpha, \pi]$.

Si O_1 u O_2 es impropio, F_1 y F_2 son homológicas. Si O_1 y O_2 son impropios (o la recta O_1O_2 es paralela a π), F_1 y F_2 son afines.

2.4. Homología entre proyección y abatimiento de una forma plana

a) Si proyectamos una forma F de plano α (Fig. 2.6), desde V , sobre el plano π (cuadro), en F' , y aba-

timos luego F sobre π , en (F) , F' y (F) se corresponden en la homología producto de dos homología conocidas, de eje común $t_\alpha \equiv [\alpha, \pi]$; la de F y F' , de centro V , (núm. 1,9) y la de F y (F) , de centro impropio V_1 , de dirección d_a normal al bisector del diedro α, π (núm. 2.2).

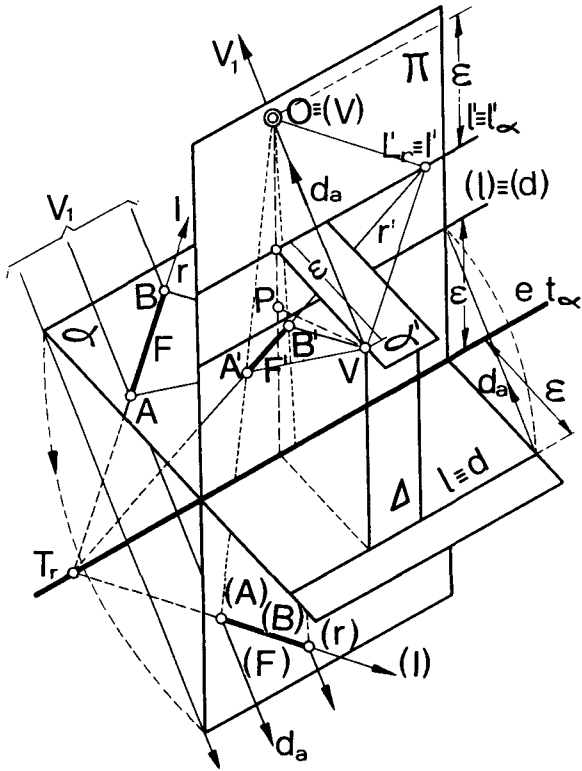


Fig. 2.6.—Homología entre proyección cónica y abatimiento de formas planas.

El centro de la homología producto es (núm. 2,3) la traza O de VV_1 (paralela a d_a) con π y coincide con el abatimiento (V) de V , alrededor de l'_α sobre π , por ser α' paralelo a α y VV_1 paralelo a d_a . Por tanto:

En proyección cónica, la imagen F' y el abatimiento (F) de una forma F de plano α , sobre el cuadro π , se corresponden en una homología de plano π , eje $t_\alpha \equiv [\alpha, \pi]$ y centro $O \equiv (V)$ (abatimiento de V sobre el cuadro, alrededor de l'_α). Las rectas límites de F' y (F) son l'_α y el abatimiento $(l) \equiv (d)$ de la línea de desvanecimiento $l \equiv d$ de α , respectivamente.

b) En proyección cilíndrica (Fig. 2.7) V y (V_1) son impropios, de direcciones d_p y d_a , y la homología se transforma en una afinidad. Por tanto:

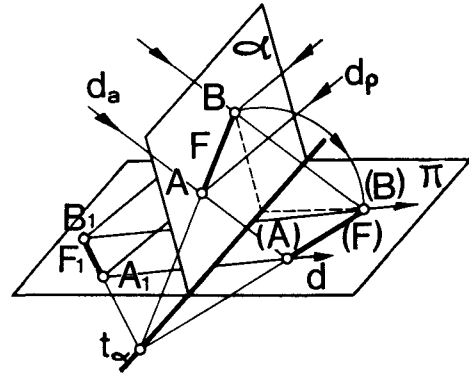


Fig. 2.7.—Afinidad entre proyección cilíndrica y abatimiento de formas planas.

La proyección cilíndrica F_1 y el abatimiento (F) de una forma plana F de plano α , sobre un plano π , se corresponden en una afinidad de eje $t_\alpha \equiv [\alpha, \pi]$ y dirección de afinidad dada por la recta $A_1(A)$ que una la proyección y el abatimiento de un punto A de F .

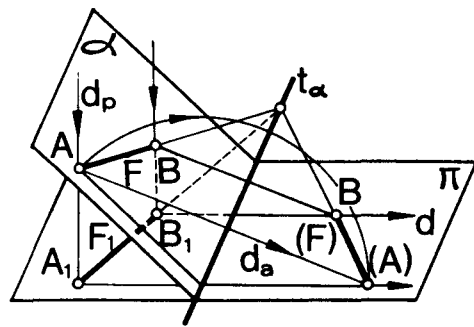


Fig. 2.8.—Afinidad entre proyección ortogonal y abatimiento de formas planas.

En proyección ortogonal (Fig. 2.8), la dirección de afinidad $A_1(A)$ es normal a t_α (afinidad ortogonal).

2.5. Proyección de una homología entre formas planas

Si proyectamos una forma de plano α (Fig. 2.9), desde un punto O , sobre un plano α' , las formas α y α' se corresponden (núm. 2,1) en una homología de centro O y eje $t \equiv [\alpha, \alpha']$ y al proyectar todo desde otro punto V , sobre un plano π , los pares de puntos A y A' ; B y B' ; ...; alineados con O , se proyectan según puntos A_1 y A'_1 ; B_1 y B'_1 ; ...; alineados con la proyección O_1 de O .

Análogamente, las rectas $r \equiv AB$ y $r' \equiv A'B'$, concurrentes en un punto I de t , se proyectan según rectas $r_1 \equiv A_1B_1$ y $r'_1 \equiv A'_1B'_1$, concurrentes en la proyección I_1 de I y lo mismo sucederá si V y O son propios o impropios. Por tanto:

La proyección de una homología entre dos formas planas distintas, de centro O y eje $t \equiv [\alpha, \alpha']$, desde un punto V (propio o impropio) sobre un plano π , es otra homología cuyo centro y eje son las proyecciones O_1 y t_1 de O y t , respectivamente.

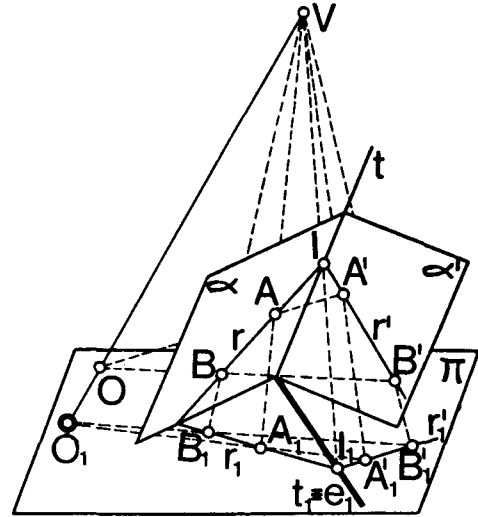


Fig. 2.9.—Proyección de una homología.

En general, si se proyecta una afinidad desde un punto V , propio o impropio, la proyección es homología o afinidad, respectivamente.

I. SISTEMA DIÉDRICO

A. GENERALIDADES

3.1. Generalidades

En este sistema se utilizan dos planos de proyección, perpendiculares entre sí (Fig. 3.1-a), colocados en posición horizontal y vertical, por lo que se llaman *plano horizontal* o *primer plano* y *plano vertical* o *segundo plano de proyección* y se designan con las letras H o π_1 y V o π_2 , respectivamente. Su intersección, llamada *línea de tierra*, se designa por sus iniciales LT (en mayúsculas) y se representa con un trazo en cada extremo.

Los planos de proyección dividen al espacio en cuatro *regiones*, *diedros* o *cuadrantes* (numerados de I a IV) y la línea de tierra divide a cada plano, en dos semiplanos. El observador se supone colocado en el primer diedro luego serán vistos los puntos situados en el primer cuadrante y en los semiplanos que lo forman (horizontal anterior y vertical superior).

La figuras se representan, proyectándolas ortogonalmente sobre cada plano de proyección y abatiendo luego uno sobre el otro para obtener un solo plano, coincidente con el del dibujo. Si estamos dibujando en una mesa (papel horizontal), se abate el vertical sobre el horizontal, en el sentido de la flecha y si dibujamos

3. PUNTO Y RECTA

sobre la pizarra de pared, se abatiría el horizontal sobre el vertical, en sentido contrario al anterior, obteniéndose en ambos casos proyecciones idénticas.

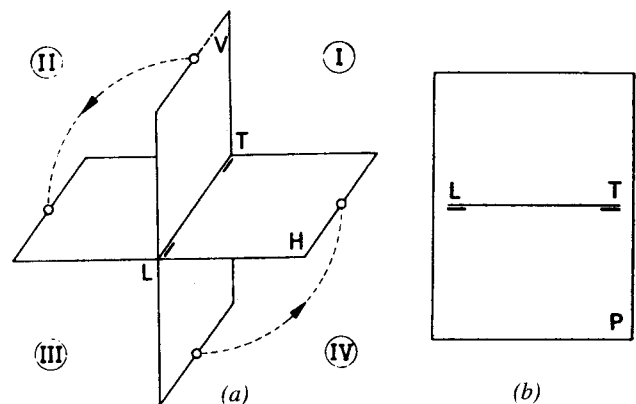


Fig. 3.1.—Planos de proyección.

En el dibujo (Fig. b) sólo aparece, como única referencia, la línea de tierra con sus trazos extremos, prescindiéndose de las letras L y T , por no ser necesarias. El semiplano inferior que contiene los trazos es el horizontal anterior y el otro, el vertical superior.

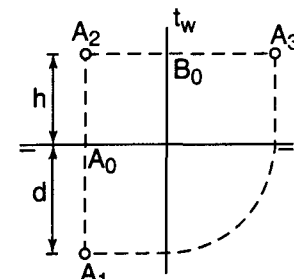
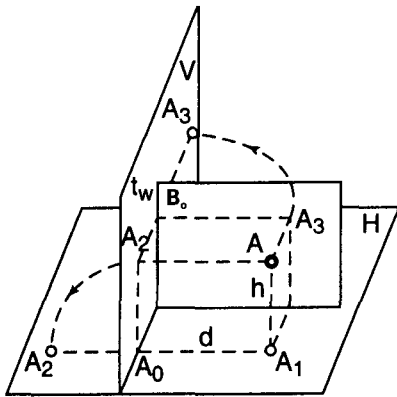


Fig. 3.2. - Representación del punto.

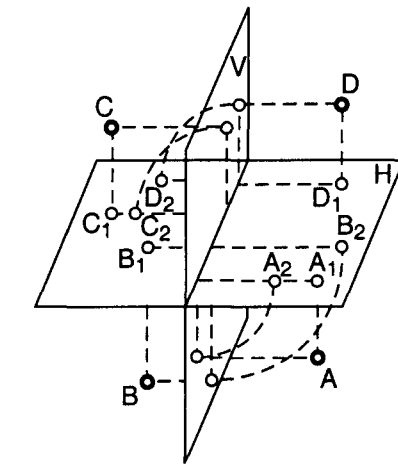


Fig. 3.3. - Puntos en distintos cuadrantes.

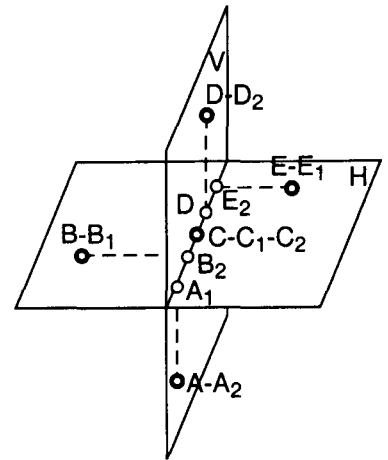


Fig. 3.4. - Puntos en los planos de proyección

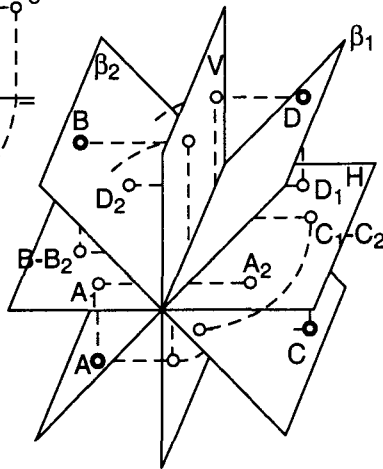


Fig. 3.5. - Puntos en los bisectores.

3.2. Representación del punto

a) Para representar un punto A del primer cuadrante, por ejemplo, (Fig. 3.2) se le proyecta ortogonalmente sobre los planos H y V, en A₁ y A₂. Estas proyecciones se llaman *proyección horizontal* y *vertical* y se designan con los subíndices 1 y 2, respectivamente.

El plano [AA₁A₂] determinado por las proyectantes AA₁ y AA₂ (normales a H y V) es normal a LT, lo mismo que sus trazas A₀A₁ y A₀A₂ luego, al abatir V sobre H, A₂ describirá un arco de 90° y coincidirá con la prolongación de A₁A₀. La recta A₁A₂ (línea de referencia) se representa de puntos o trazos (figura inferior) y ha de ser normal a LT.

Inversamente, si A₁A₂ es normal a LT, al deshacer el giro del plano V, las proyectantes A₁A y A₂A determinan, al cortarse, un punto único. La altura o distancia h = AA₁ de A al plano horizontal se llama *cota* del punto y su distancia d = AA₂ al vertical, *alejamiento*, y siendo AA₁ = A₂A₀ y AA₂ = A₁A₀ podemos enunciar de un modo general:

La distancia de un punto a uno de los planos de

proyección viene dada por la distancia de la proyección de nombre contrario a LT.

b) A veces se utiliza un tercer plano de proyección, normal a H y V, (plano de perfil) que se designa por W o π₃. El punto A se proyecta ortogonalmente sobre él, en A₃ (*proyección tercera*) y luego, se abate el plano sobre el vertical, girándolo alrededor de su traza t_w con V. La proyección A₃ describirá un arco de 90°, de centro B₀ y radio B₀A₃ = d, hasta situarse en la prolongación de A₂B₀.

Dadas A₁, A₂ y t_w (figura inferior), podemos hallar A₃, trazando A₂B₀, paralela a LT, y tomando sobre ella, a partir de B₀, B₀A₃ = A₀A₁, como se ve en la figura. El punto A se designa por la notación A ≡ A₁-A₂ o sólo por sus proyecciones A₁-A₂ o A₂-A₃.

c) Según que el punto esté encima, en o debajo del plano horizontal (Fig. 3.3), su proyección vertical estará encima, en o debajo de LT, y análogamente sucederá con la otra proyección. De esto se deduce:

Los puntos del primero o tercer cuadrante tienen sus proyecciones a distinto lado de LT, y su proyección vertical, encima o debajo de LT según que sea del 1° o 3°. Los del 2° o 4° cuadrante tienen sus proyecciones al mismo lado de LT; encima, si es del 2° o debajo, si es del 4°.

Los situados en H o V (Fig. 3.4) tienen su proyección vertical u horizontal, respectivamente, en LT y si pertenece a LT, sus proyecciones también.

d) Finalmente, si pertenecen a los planos bisectores β₁ y β₂ (primero y segundo bisector), equidistan de H y V (Fig. 3.5), luego sus proyecciones equidistan de LT y están a distinto lado de ella o son coincidentes, según que pertenezcan a β₁ o β₂, respectivamente. (Ver núms. 2,1 a 2,8 de n/E. de G.D.).

3.3. Representación de la recta

Una recta r (Fig. 3.6) queda definida por sus proyecciones ortogonales r_1 y r_2 sobre los planos de proyección (proyección horizontal y vertical de r). Si viene dada por dos puntos A y B de ella, se hallan sus proyecciones A_1, A_2 y B_1, B_2 , siendo $r_1 \equiv A_1B_1$ y $r_2 \equiv A_2B_2$.

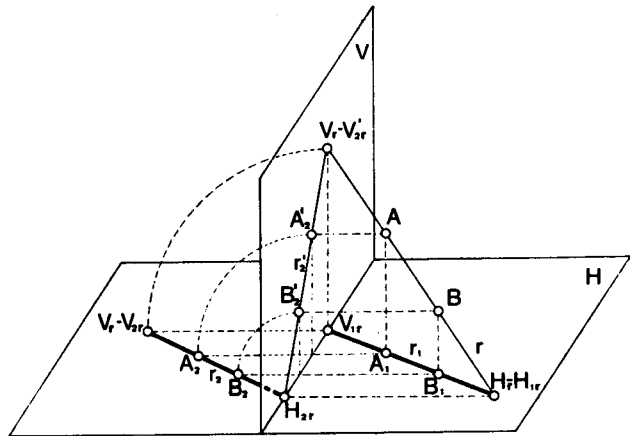


Fig. 3.6.—Representación de la recta.

Al abatir V sobre H , r_2 puede tomar cualquier posición. Inversamente, cualquier par de rectas r_1 y r_2 pueden ser proyecciones de una recta r del espacio ya que, al desabatir V , los planos proyectantes de r_1 y r_2 se cortan, según una recta única r . Se exceptúa el caso de ser r_1 y r_2 incidentes y normales a LT (recta de perfil), quedando la recta indeterminada, a no ser que se conozcan dos puntos de ella.

3.4. Puntos notables de una recta

Por ser la incidencia un invariante proyectivo (núm. 1,6), si un punto A pertenece a una recta r (Fig. 3.6), sus proyecciones A_1 y A_2 pertenecen a r_1 y r_2 , respectivamente. Inversamente, si B_1 y B_2 pertenecen a r_1 y r_2 , respectivamente, B pertenece a r . Los puntos más notables son:

a) **Traza horizontal H_r y vertical V_r .** Son las intersecciones de r con H y V . La horizontal H_r pertenece a H , luego su proyección vertical H_{2r} pertenecerá a LT y a r_2 , es decir, será la intersección de r_2 y LT . Por tanto:

Para hallar la traza horizontal H_r de r (Fig. 3.7), se prolonga r_2 hasta su intersección con LT y por este punto, se traza la normal a LT hasta que corte a r_1 , en $H_{1r} \equiv H_r$. Las proyecciones de H_r no son necesarias porque H_{1r} coincide con H_r y H_{2r} con LT , por lo que sólo se representa por H_r .

Análogamente, para hallar V_r , se prolonga r_1 hasta que corte a LT y por este punto se traza la normal a LT hasta que corte a r_2 , en V_r .

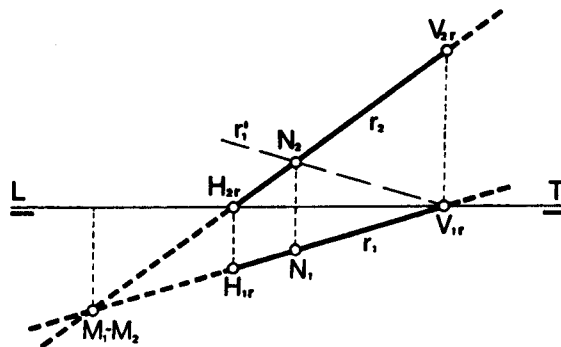


Fig. 3.7.—Trazas de una recta.

B) **Trazas con los bisectores.** Aplicando un razonamiento análogo a los puntos del bisector (núm. 3,2-d), se deduce:

Las proyecciones de la traza N de r con el primer bisector (Fig. 3.7) son las intersecciones de cada proyección con la simétrica de la otra, respecto a LT . La traza M con el segundo bisector es la intersección de r_1 y r_2 .

3.5. Partes vistas y ocultas

La parte vista de una recta r (Fig. 3.8-a) es la situada en el primer cuadrante y está limitada por los semiplanos vistos (horizontal anterior y vertical superior), siendo vistas las trazas H_r y V_r , situadas en ellos. Por tanto (Figs. a y b):

- Si las dos trazas son vistas, es visto el segmento H_rV_r
- Si sólo es vista una traza V_r , es vista la semirecta de origen V_r que no contiene a H_r .
- Si ninguna traza es vista, la recta l es oculta.

Las partes vista se dibujan de trazo continuo y las ocultas, de trazos o puntos.

3.6. Posiciones de la recta

En la parte superior de las figuras 3.9 y 3.10 se han dibujado distintas posiciones de una recta r y en la inferior, sus proyecciones. De ellas se deduce:

- Si r es horizontal (paralela a H), r_2 es paralela a LT (Fig. 3.9).

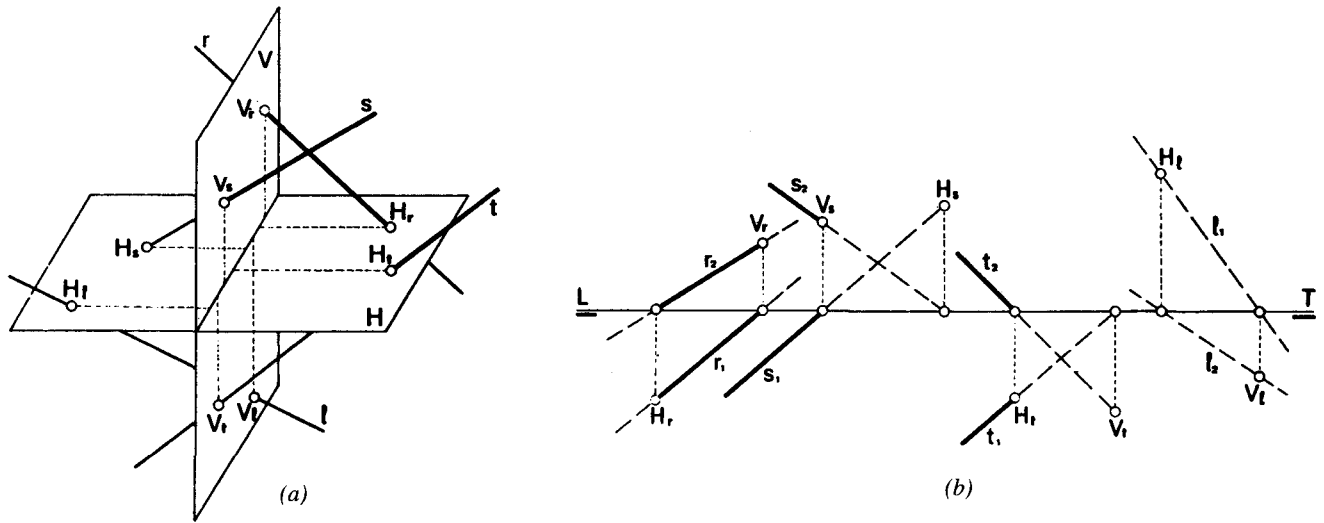


Fig. 3.8.—Partes vistas y ocultas de una recta.

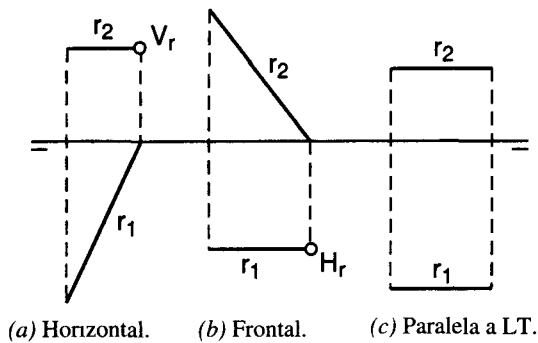
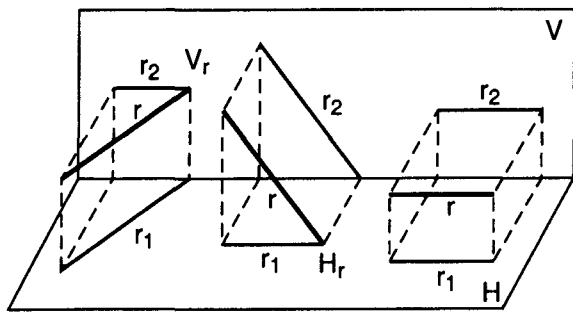


Fig. 3-9.—Rectas paralelas a H y V.

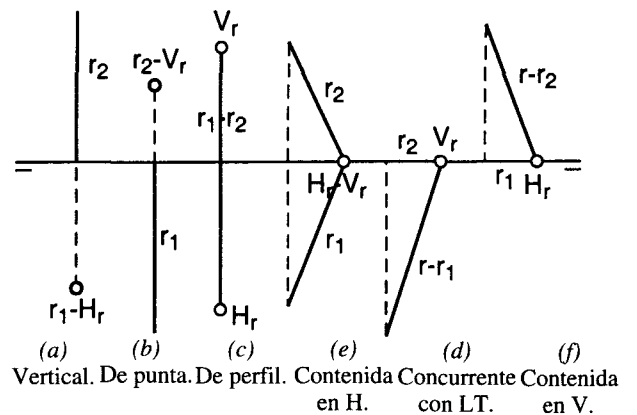
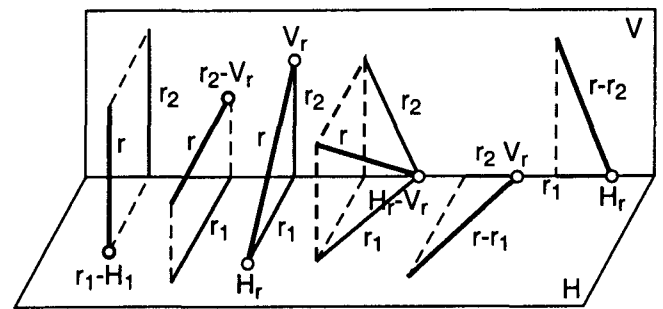


Fig. 3-10.—Otras posiciones de la recta.

- Si r es frontal (paralela a V), r_1 es paralela a LT .
- Si r es paralela a LT , r_1 y r_2 son paralelas a LT .

Se llaman *rectas de punta* las perpendiculares a H y V . No obstante, para evitar confusiones, llamaremos *vertical* a la normal a H y *recta de punta*, a la otra. Según esto (Fig. 3.10):

Si r es vertical, r_2 es normal a LT y todos los puntos de r se proyectan horizontalmente sobre su traza $H_r \equiv$

r_1 (por ser proyectante) y si es de punta, r_1 es normal a LT y sus puntos se proyectan verticalmente, en $V_r \equiv r_2$.

Si r es de perfil (situada en un plano de perfil), r_1 y r_2 son incidentes y normales a LT .

Si r corta a LT , r_1 y r_2 concurren en un punto de LT .

Finalmente, si r está en el plano horizontal o vertical, r_2 o r_1 coinciden, respectivamente, con LT .

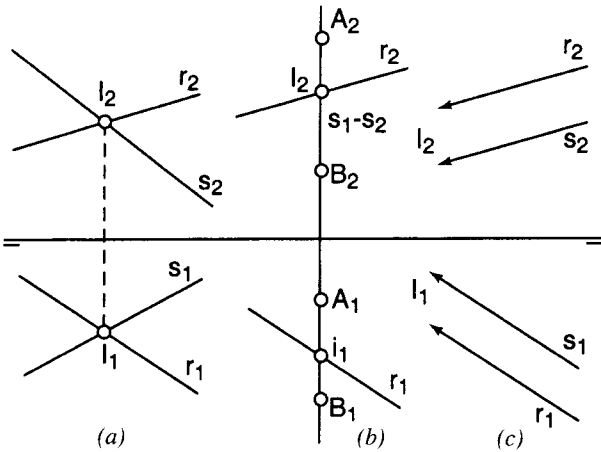


Fig. 3.11.—Rectas secantes y paralelas.

3.7. Rectas secantes y paralelas

a) Si dos rectas se cortan (Fig. 3.11-a), las proyecciones I_1 e I_2 de su intersección I pertenecen a las respectivas proyecciones de las rectas (núm. 3,4) luego:

Las proyecciones del punto de intersección I de dos rectas r y s son las intersecciones I_1 e I_2 de las proyecciones homónimas r_1, s_1 y r_2, s_2 .

b) Se exceptúa el caso de que la recta $s \equiv AB$ sea de perfil (Fig. b) ya que el punto I_1-I_2 sólo pertenece a r , debiendo comprobarse, como más adelante veremos, si también pertenece a s .

c) Si I_1-I_2 es impropio (Fig. c), las rectas son paralelas. La proyección I_1 es también impropia, luego r_1 y s_1 son paralelas y lo mismo sucede con r_2 y s_2 . Por tanto: *Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones homónimas también lo son.*

3.8. Posiciones respecto a los bisectores

Si r está en el primer bisector (Fig. 3.12-a), las proyecciones de cualquier punto A de ella equidistan de LT (núm. 3,2-d), luego r_1 y r_2 son simétricas respecto a LT y las paralelas a r (paralelas al bisector) son (núm. 3,7-c) de proyecciones paralelas a r_1 y r_2 . Por tanto:

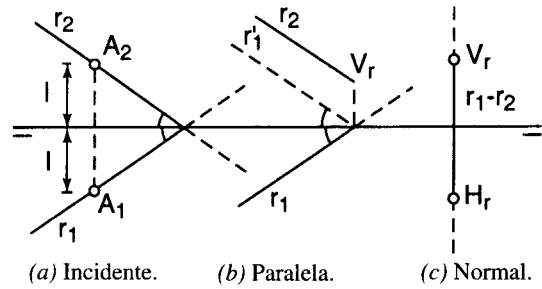


Fig. 3.12.—Posiciones respecto al 1º bisector.

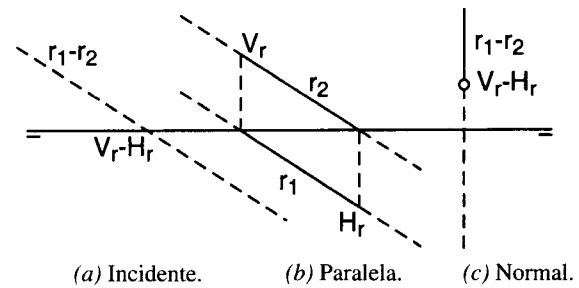


Fig. 3.13.—Posiciones respecto al 2º bisector.

- Si r pertenece al primer bisector (Fig. a), r_1 y r_2 son simétricas respecto a LT .
- Si r es paralela al primer bisector (Fig. b), cada proyección r_2 , por ejemplo, es paralela a la simétrica r'_1 de r_1 , respecto a LT .
- Si r es perpendicular al primer bisector (Fig. c), es una recta de perfil, de trazas equidistantes de LT y situadas a distinto lado de ésta.
- Análogamente (Fig. 3.13): Si r pertenece al segundo bisector (Fig. a), r_1 y r_2 son incidentes.
- Si r es paralela al segundo bisector (Fig. b), r_1 y r_2 son paralelas.
- Si r es perpendicular al segundo bisector (Fig. c), es una recta de perfil, de trazas incidentes. (Ver núms. 2,8 a 2,16 de n/E. de G.D.).

4. EL PLANO. INTERSECCIONES

4.1. Representación

Todo plano α (Fig. 4.1) corta al diedro \widehat{HV} , según dos rectas (trazas) h_α y v_α concurrentes en un punto de la arista LT . Inversamente, cualquier par de rectas h_α y v_α concurrentes en LT , definen un plano $\alpha \equiv [h_\alpha, v_\alpha]$. Por tanto:

Un plano α se representa por sus trazas h_α y v_α que han de concurrir en un punto de LT . Si las trazas inciden con LT , es necesario dar otro punto del plano para definir éste.

Las trazas de α con H y V se denominan *traza horizontal* y *traza vertical*, respectivamente, y se designan por la notación h_α y v_α , prescindiendo en este caso de sus proyecciones h_{1a} , h_{2a} y v_{1a} , v_{2a} por no ser necesarias ya que h_{1a} y v_{2a} coinciden con las trazas y h_{2a} y v_{1a} con LT . El plano se designa, por tanto, por la notación $\alpha \equiv h_\alpha - v_\alpha$ o $h_\alpha - v_\alpha$.

Los puntos A y B de las trazas tienen su proyecciones A_2 y B_1 , en LT .

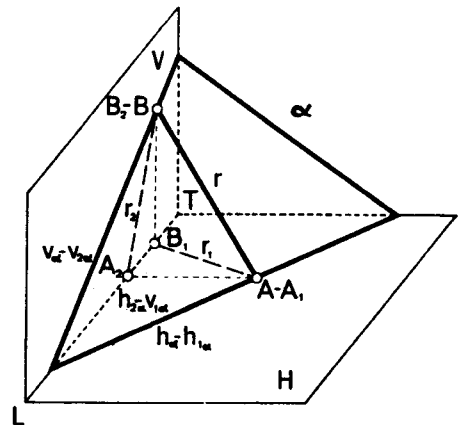


Fig. 4.1.—Representación de un plano.

4.2. Puntos y rectas de un plano

De la incidencia entre recta y plano se deduce (Fig. 4.2): *si una recta está en un plano, sus trazas están en las trazas homónimas del plano e inversamente, si un plano pasa por una recta, sus trazas pasan por las trazas homónimas de ésta.*

Así, para trazar una recta r del plano α , basta unir las proyecciones homónimas de un punto H_r de h_α y de otro V_r de v_α siendo $r \equiv H_r V_r \equiv r_1 - r_2$ la recta buscada. Inversamente, para trazar un plano que pase por r , basta unir H_r y V_r con un punto de LT , obteniéndose el plano $\alpha \equiv h_\alpha - v_\alpha$.

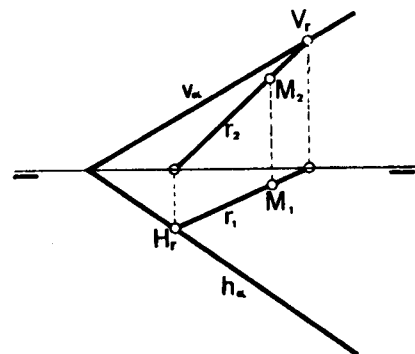


Fig. 4.2.—Punto y recta de un plano.

Los puntos de α se representan trazando previamente una recta $r_1 - r_2$ de α y tomando sobre ella un punto $M_1 - M_2$. Inversamente, para trazar un plano por un punto $M_1 - M_2$, se traza por éste cualquier recta r y luego se traza un plano α que pase por r .

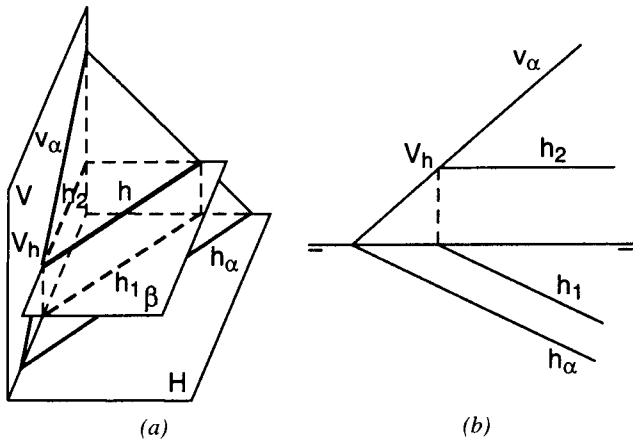


Fig. 4.3.—Horizontal de un plano.

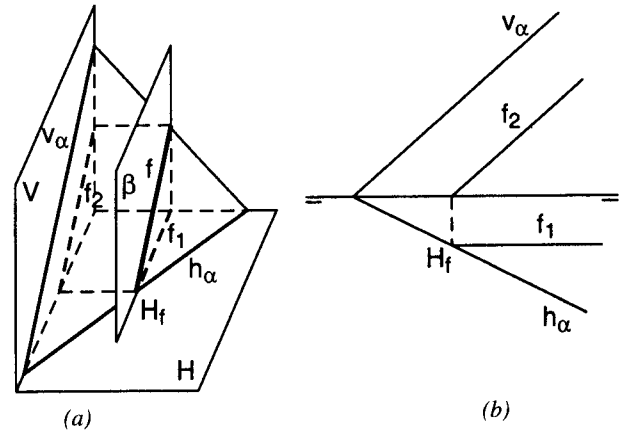


Fig. 4.4.—Frontal de un plano.

4.3. Horizontales y frontales del plano

Un plano α (Fig. 4.3-a) corta al H y a todos los paralelos a él, como el β , según rectas horizontales h_α y h , paralelas entre sí, es decir, toda horizontal h de α es paralela a h_α luego (núm. 3,7-c) h_1 es paralela a h_α y h_2 , paralela a LT .

Para trazar una horizontal h de α (Fig. b), se elige un punto V_h de v_α y por su proyección horizontal, se traza h_1 , paralela a h_α , y por V_h , h_2 paralela a LT .

Análogamente (Fig. 4.4-a), las frontales f de un plano α son paralelas a v_α luego f_1 es paralela a LT y f_2 , paralela a v_α . Para trazar una frontal de α (Fig. b) se elige un punto H_f de h_α y por su proyección vertical, se traza f_2 paralela a v_α y por H_f , f_1 paralela a LT .

4.4. Rectas de máxima pendiente y máxima inclinación

Todo plano normal a la arista h_α del diedro $[\alpha, H]$ (Fig. 4.5), corta a α y H , según rectas r y r_1 , normales a h_α . En ángulo \hat{r}_1 (rectilíneo del diedro) es el de mayor pendiente, respecto a H , de las rectas contenidas en α . De ahí, su nombre.

Análogamente, la recta i de α , normal a v_α , es la de mayor inclinación de α ; su proyección i_2 es normal a v_α y el ángulo \hat{i}_2 es el rectilíneo del diedro $[\alpha, V]$ (ver núms. 9,5 y 9,6). Por tanto:

La recta de máxima pendiente r de un plano α tiene su proyección r_1 normal a h_α y la de máxima inclinación i tiene i_2 normal a v_α lo cual sirve para dibujar ambas (fig. b).

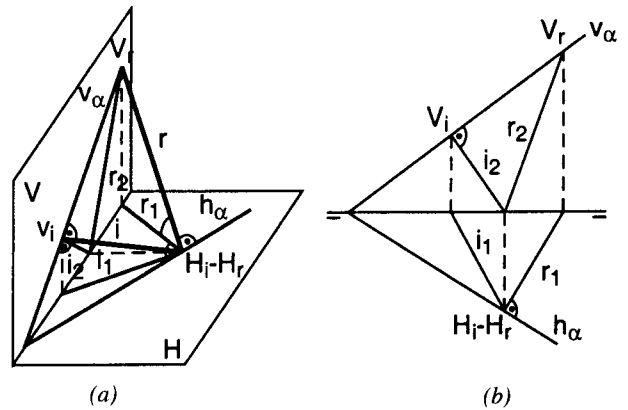


Fig. 4.5.—Rectas de máxima pendiente y máxima inclinación.

4.5. Posiciones particulares del plano

- Si el plano α (Fig. 4.6) es horizontal (paralelo a H), v_α es paralela a LT y h_α impropia.
- Si es frontal (paralelo a V), h_α es paralela a LT y v_α impropia.
- Si es vertical (normal a H), v_α es normal a LT . Los puntos de α se proyectan horizontalmente, en h_α , por ser plano proyectante. De aquí, el nombre de *proyectante sobre el horizontal* o abreviadamente: *proyectante horizontal*.
- Si es normal a V (plano de canto), h_α es normal a LT y todo lo contenido en él se proyecta verticalmente en v_α . De aquí, el nombre de *proyectante vertical*.
- Si es normal a LT (plano de perfil), h_α y v_α son incidentes y normales a LT .
- Si es paralelo a LT , h_α y v_α son paralelas a LT .

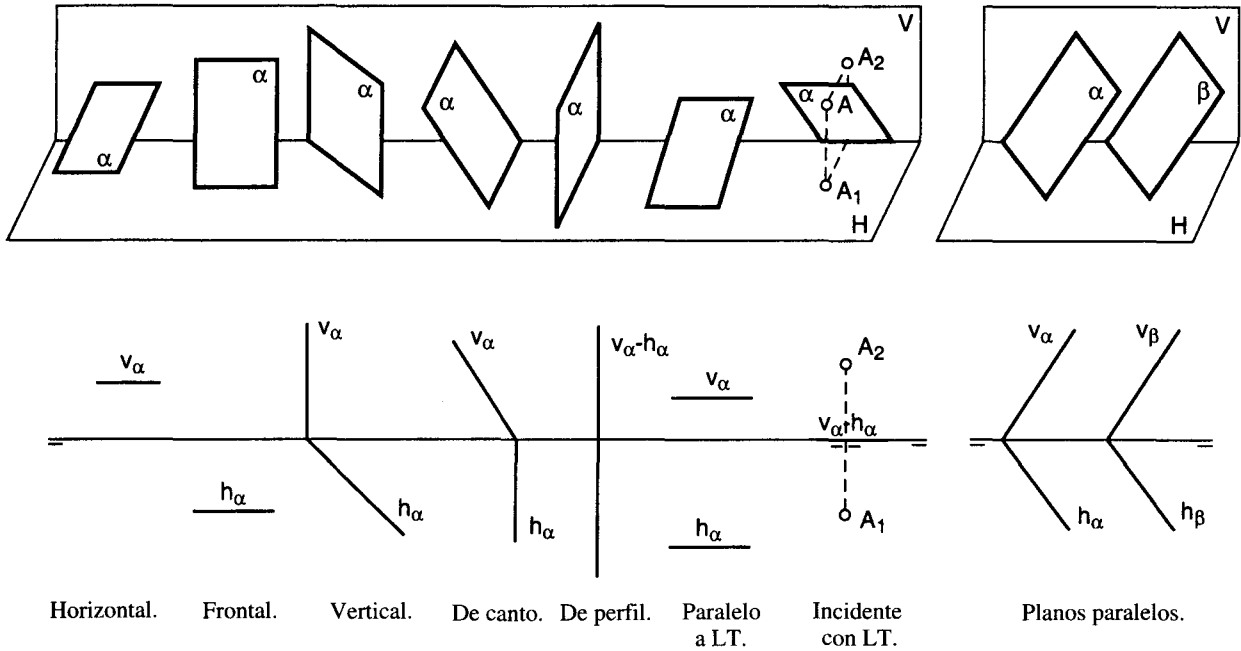


Fig. 4.6. - Posiciones del plano.

- Si pasa por LT , h_α y v_α inciden en LT y no determinan un plano. Para definirlo, suele darse un punto A de α , representado a veces por dos pequeños trazos, uno a cada lado de la línea de referencia A_1A_2 .

4.6. Plano paralelos

Como ya se sabe, dos planos paralelos α y β (Fig. 3.6) cortan a un tercer plano, según rectas paralelas. Por tanto:

Si dos planos son paralelos, sus trazas homónimas son paralelas. La recíproca también es cierta.

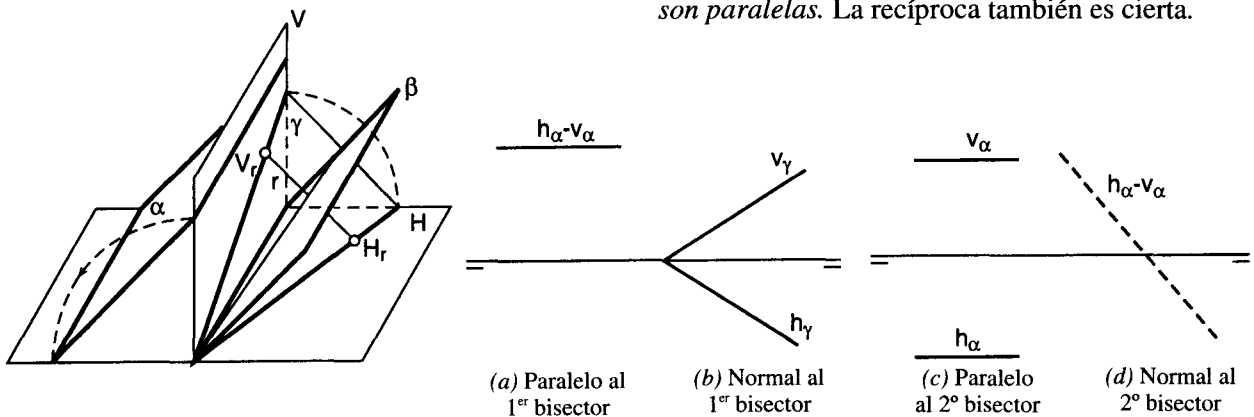


Fig. 4.7. - Posiciones relativas respecto a los bisectores.

4.7. Posiciones relativas a los bisectores

Como se ve en la Fig. 4.7, si un plano α es paralelo al primer bisector β , h_α y v_α son incidentes y paralelas a LT (Fig. a).

Por otra parte, los bisectores son normales entre sí. Toda perpendicular r al primer bisector es de perfil, paralela al 2º bisector y de trazas H_r y V_r simétricas respecto a LT , luego todo plano que pase por r es normal al primer bisector. Por tanto:

Si un plano γ es normal al primer bisector, h_γ y v_γ son simétricas respecto a LT (Fig. b).

Refiriéndonos al 2º bisector, se obtiene de forma análoga:

- Si α es paralelo al 2º bisector, h_α y v_α son paralelas a LT y simétricas respecto a ella (Fig. c).
- Si es normal al 2º bisector (Fig. d), h_α y v_α son coincidentes. (Ver núms. 2.17 a 2.29 de n/E. de G.D.).

INTERSECCIONES

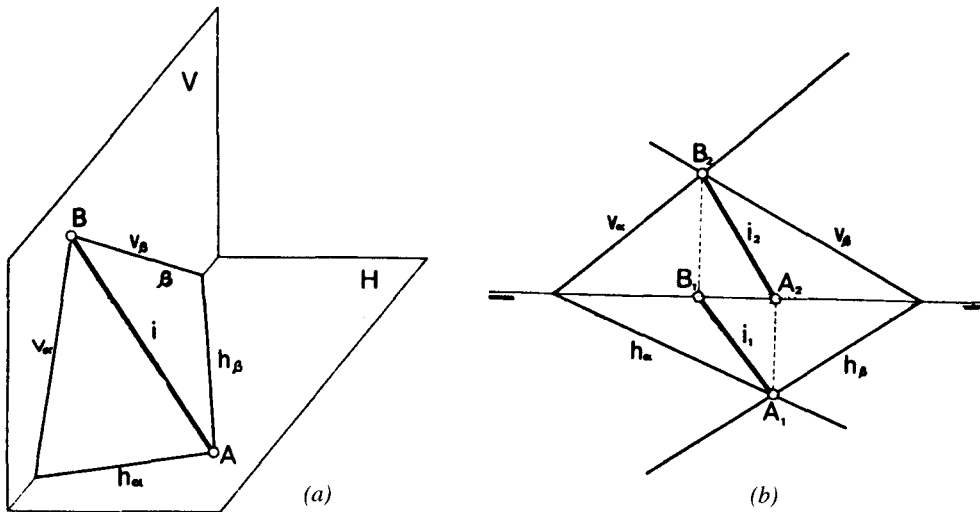


Fig. 4.8.—Intersección de planos

4.8. Intersección de planos. Método general

Para hallar la intersección i de dos planos α y β (Fig. 4.8-a), se traza un plano auxiliar, en este caso el H , que corta a los dados, según dos rectas h_α y h_β que se cortan en un punto A de i . Repitiendo la construcción con otro plano auxiliar, el V por ejemplo, se

hallaría otro punto B que determina la intersección $i \equiv AB$ buscada. Por tanto:

La intersección $i \equiv AB$ de dos planos α y β (Fig. b) viene dada por las intersecciones A_1-A_2 y B_1-B_2 de sus trazas homónimas.

Como planos auxiliares, también se utilizan otros paralelos o perpendiculares a H y V , es decir, horizontales, frontales o proyectantes.

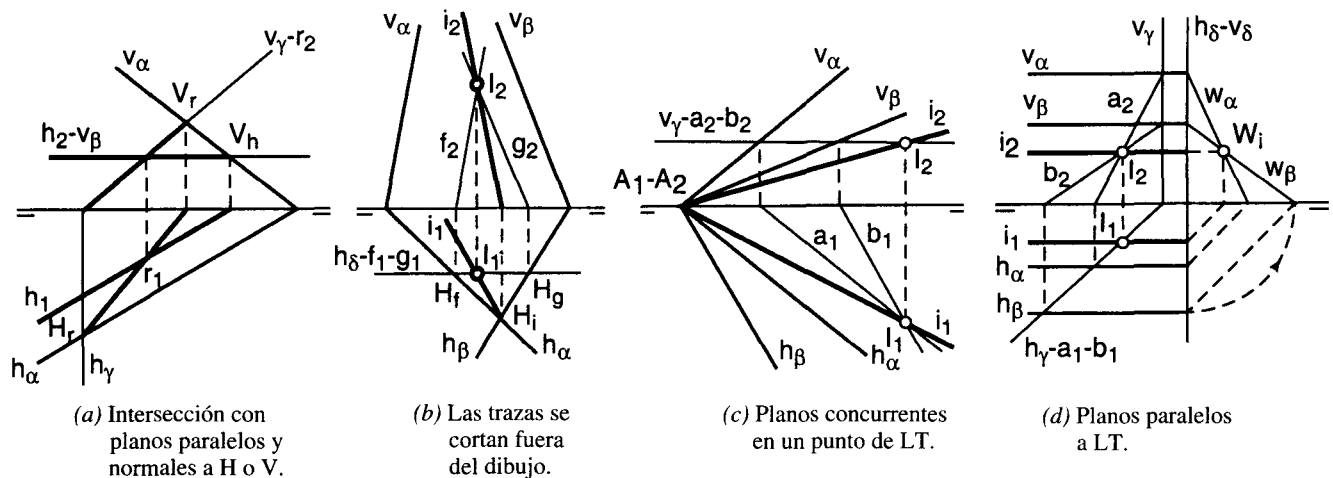


Fig. 4.9.—Casos particulares.

4.9. Casos particulares

Todo plano horizontal o frontal corta a otro α , no paralelo a él, según una horizontal o frontal de éste (Fig. 4.9-a). Así, el plano horizontal β corta al α , según la horizontal h , de traza $V_h \equiv [v_\alpha, v_\beta]$ y proyección h_2 confundida con v_β .

Análogamente, el plano frontal δ (Fig. b) corta al α , según la frontal f_1-f_2 trazada por $H_f \equiv [h_\alpha, h_\delta]$.

Finalmente, el plano de canto γ (Fig. a) corta al α , según la recta r_1-r_2 , de proyección r_2 , confundida con v_γ y trazas $H_r \equiv [h_\alpha, h_\gamma]$ y $V_r \equiv [v_\alpha, v_\gamma]$. Esto permite hallar fácilmente las intersecciones que siguen:

a) *Las trazas se cortan fuera del dibujo* (Fig. b). Se traza un plano auxiliar frontal δ que corta a α y β , según las frontales f_1-f_2 y g_1-g_2 . El punto de corte I_1-I_2 de éstas y la traza $H_i \equiv [h_\alpha, h_\beta]$ determinan la intersección i de α y β .

b) Planos α y β que pasan por un punto A de LT (Fig. c). Se traza un plano horizontal auxiliar γ que corta a α y β , según las horizontales a_1-a_2 y b_1-b_2 . El punto de corte I_1-I_2 de éstas y el A_1-A_2 determinan la intersección i_1-i_2 de α y β .

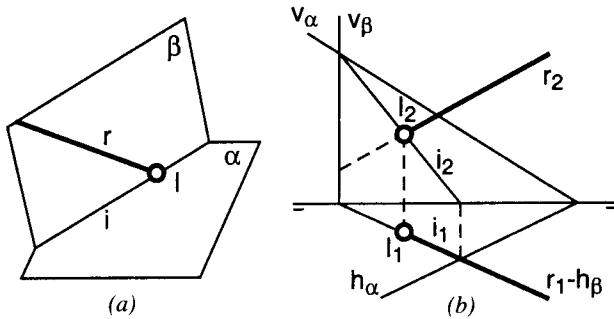


Fig. 4.10. - Intersección de recta y plano.

c) Trazas paralelas a LT (Fig. d). Por ser α y β paralelos a LT , su intersección i también lo será. Basta pues hallar un punto I de i , por medio de un plano auxiliar vertical γ que corta a α y β , según las rectas a_1-a_2 y b_1-b_2 , concurrentes en I_1-I_2 , o valiéndonos de las trazas w_α y w_β con el plano de perfil δ , abatidas sobre V , que se cortan en la traza W_i de i .

auxiliar β que corta al α , según la recta i . La intersección I de r e i es el punto de corte de r y α .

Como plano auxiliar suele tomarse uno de los proyectantes de r . En la figura b, el plano vertical β , trazado por r , corta al α , según i_1-i_2 . La intersección I_2 de r_2 e i_2 determina el punto de corte I_1-I_2 de r y α .

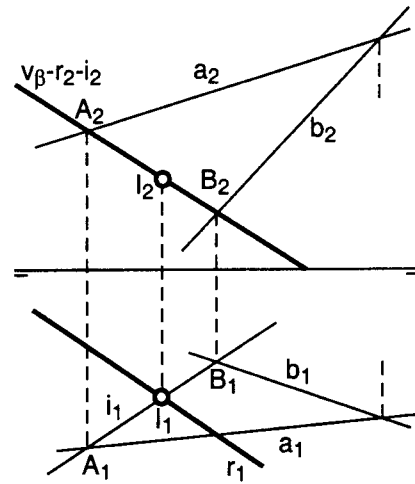


Fig. 4.11. - Plano dado por dos rectas a y b .

4.10. Intersección de recta y plano. Método general

Consiste (Fig. 4.10) en trazar por la recta r un plano

Si α viene dado por dos rectas a_1-a_2 y b_1-b_2 (Fig. 4.11) se utiliza también un plano β , proyectante vertical de r , de traza $v_\beta \equiv r_2$, que corta a a_2 y b_2 en A_2 y B_2 , respectivamente, y a α , según la recta $i = A_1B_1-A_2B_2$. La intersección de i_1 y r_1 determina el punto de corte I_1-I_2 de r y α .

INTERSECCIÓN DE RECTAS

4.11. Recta que corta a otras tres

Se supone que las rectas dadas r, s y t se cruzan dos a dos, pues si dos de ellas se cortasen (Fig. 4.12) determinarían un plano $\alpha \equiv [r,s]$ que corta a t en un punto A . En este caso, existen infinitas rectas AM, AN, \dots , contenidas en α , que pasan por A y cortan a r y s .

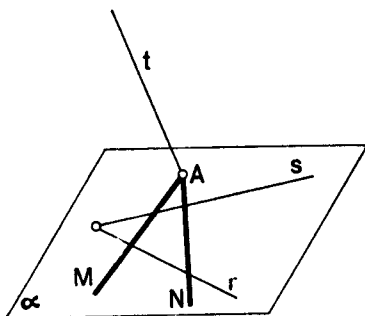


Fig. 4.12. - Dos de las rectas son coplanarias.

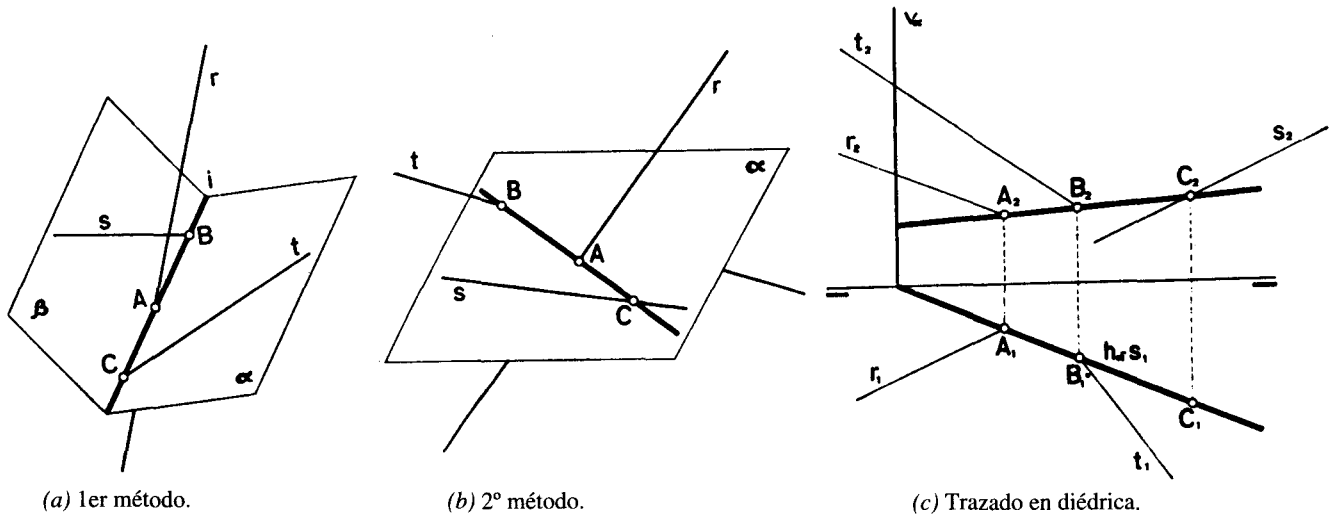


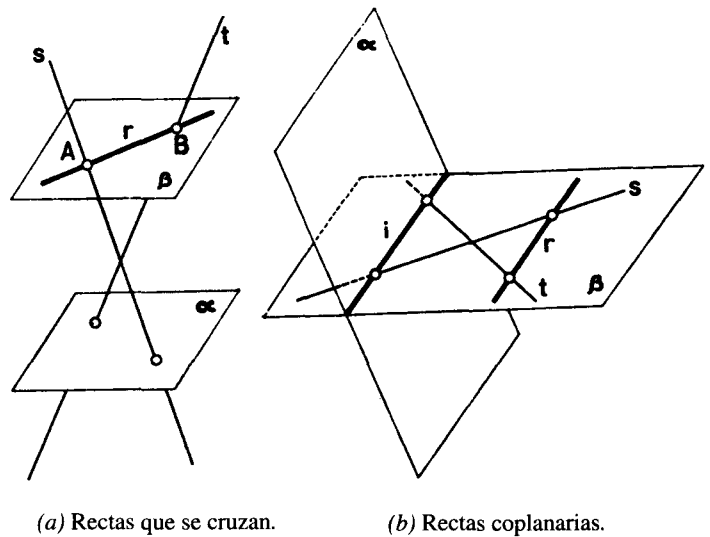
Fig. 4.13. - Recta que corta a otras tres.

Si las rectas se cruzan dos a dos (Fig. 4.13), existen también infinitas soluciones determinadas por los métodos que siguen:

1^{er} Método (Fig. a). Cualquier punto A de r, por ejemplo, determina con t y s dos planos $\alpha \equiv [A, t]$ y $\beta \equiv [A, s]$, cuya intersección i corta a r, s y t en A, B y C, respectivamente.

2^o Método (Fig. b). Cualquier plano α , trazado por la recta s por ejemplo, corta a r y t, en A y B, siendo AB la recta pedida que corta a s, en C.

Este método se simplifica, tomando como plano auxiliar uno de los proyectantes de las rectas. En la figura c, se ha utilizado el vertical α que contiene a s_1-s_2 y corta a r_1-r_2 y t_1-t_2 , en A_1-A_2 y B_1-B_2 , siendo AB la recta buscada que corta a s_1-s_2 , en C_1-C_2 .



4.12. Recta que corta a otras dos y es paralela a un plano

Cualquier plano β paralelo al α (Fig. 4.14-a) corta a las rectas s y t, dadas, en A y B, siendo AB la recta buscada.

Si s y t son coplanarias (Fig. b), la intersección i de α con el plano $\beta \equiv [s, t]$ y todas las paralelas a ella, como la r, resuelven el problema.

En diédrica (Fig. c), cualquier plano β paralelo al α (de trazas h_β y v_β paralelas a h_α y v_α) corta a s_1-s_2 y t_1-t_2 , en A_1-A_2 y B_1-B_2 , que determinan la recta buscada $r \equiv AB$. El punto A se ha hallado por medio del plano γ , proyectante horizontal de s_1-s_2 , y el B, por medio del δ , proyectante vertical de t_1-t_2 .

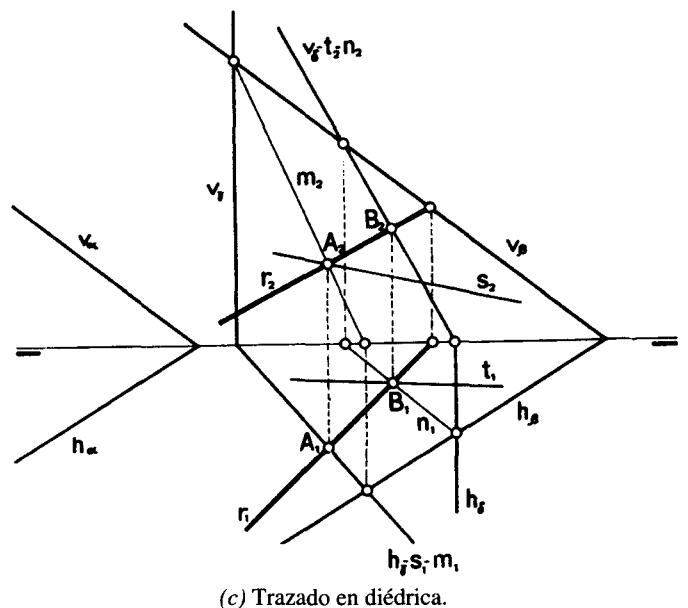
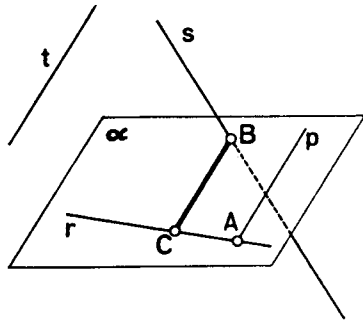
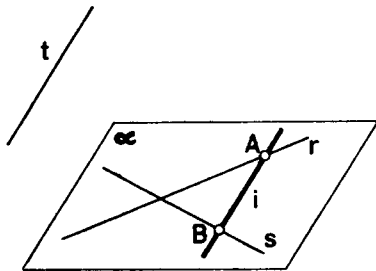


Fig. 4.14. - Recta que corta a otras dos y es paralela a α .

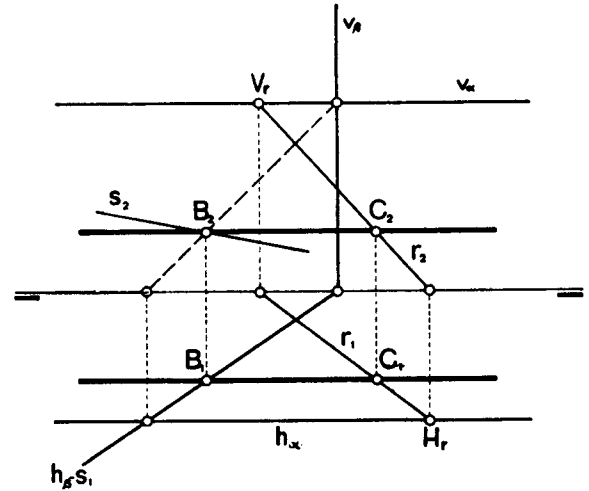


(a) r y s se cruzan.



(b) r y s son coplanarias.

Si r y s son coplanarias de plano $\alpha \equiv [r,s]$ paralelo a t (Fig. b), cualquier paralela $i \equiv AB$ a t , situada en α , resuelve el problema. Si α no es paralelo a t , no hay solución.



(c) Recta paralela a LT que corta a r y s.

Fig. 4.15.—Recta que corta a otras dos y es paralela a otra.

4.13. Recta que corta a dos dadas r y s y es paralela a otra t

Por un punto A de r, por ejemplo, (Fig. 4.15-a), se traza la paralela p a t, y se halla la intersección B del plano $\alpha \equiv [r,p]$ con s. La recta pedida es la paralela a t (trazada por B y contenida en α) que corta a r, en C, siendo este caso de solución única.

Para trazar una recta que corte a dos dadas, r_1-r_2 y s_1-s_2 , y sea paralela a LT, por ejemplo, (Fig. c), se traza por r el plano α paralelo a LT (de trazas h_α y v_α paralelas a LT) que corta a s_1-s_2 , en B_1-B_2 . La recta buscada es la paralela $B_1C_1-B_2C_2$ a LT que corta a r_1-r_2 en C_1-C_2 , lo cual sirve de comprobación. La intersección $B \equiv [\alpha,s]$ se ha hallado, por medio del proyectante horizontal β de s.

5. PARALELISMO. PERPENDICULARIDAD Y DISTANCIAS

5.1. Rectas paralelas

Como ya se dijo en el núm. 3,7-c, *si dos rectas son paralelas, sus proyecciones son paralelas* y recíprocamente: *Si las proyecciones homónimas de dos rectas son paralelas, las rectas son paralelas*. Se exceptúan las rectas de perfil que pueden no ser paralelas, a pesar de tener sus proyecciones paralelas (normales a LT).

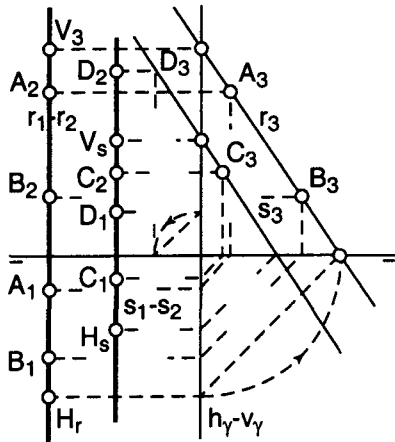


Fig. 5.1. - Paralelismo de rectas de perfil.

Para comprobar si dos rectas de perfil $r \equiv AB$ y $s \equiv CD$ son paralelas (Fig. 5.1), basta proyectar los puntos A, B, C y D sobre un plano de perfil auxiliar γ y dibujar su proyección $r_3 \equiv A_3B_3$ y $s_3 \equiv C_3D_3$ (núm. 3,2-b). Si r_3 y s_3 son paralelas, r y s también lo son.

Esta construcción también sirve para hallar las trazas de una recta de perfil AB o las proyecciones de cualquier punto de ella.

5.2. Planos paralelos

Como ya se sabe (núm. 4,6), *si dos planos son paralelos, sus trazas homónimas son paralelas*. La recíproca también es cierta.

Se exceptúan los planos paralelos a LT . El paralelismo de estos planos se comprueba de forma inmediata, por medio de sus terceras trazas w_α y w_β con un plano de perfil auxiliar. Los planos serán o no paralelos, según lo sean w_α y w_β .

En general, si α y β son paralelos (Fig. 5.2), toda

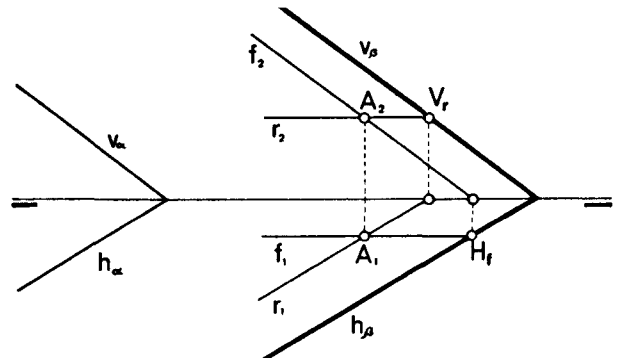


Fig. 5.2. - Paralelismo de planos.

horizontal r_1-r_2 de β es paralela a h_β y a su paralela h_α luego r_1 es paralela a h_α y análogamente, la proyección f_2 de la frontal f es paralela a v_α . Por tanto:

Para trazar un plano paralelo al α que pase por un punto dado A_1-A_2 , se traza por A la horizontal r_1-r_2 de proyección r_1 paralela a h_α y traza V_r . La paralela a v_α trazada por V_r , es la traza v_β del plano β y su traza h_β es la paralela a h_α , trazada por el punto de corte de v_β y LT .

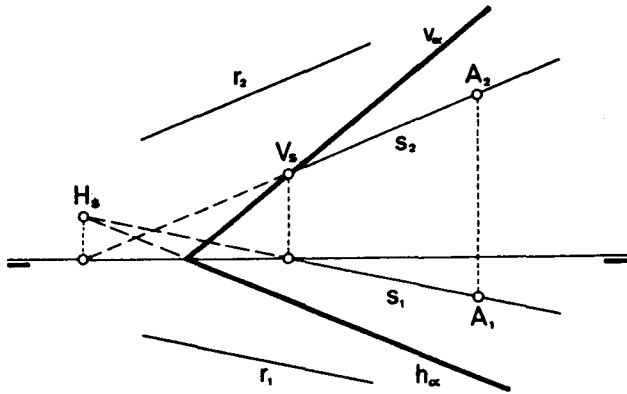


Fig. 5.3.—Plano paralelo a r , trazado por A .

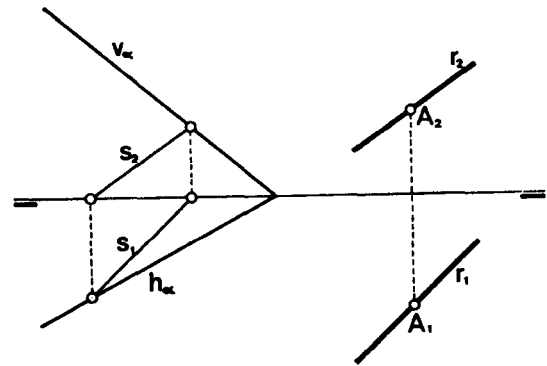


Fig. 5.4.—Recta paralela a α , trazada por A .

5.3. Recta paralela a un plano

Como ya se sabe por Geometría, una recta r es paralela a un plano α (Fig. 5.3), si es paralela a una recta s de α . Recíprocamente: un plano α es paralelo a una recta r , si contiene a una paralela s a r . De ésto se deduce:

Para trazar un plano que pase por un punto A_1-A_2 y sea paralela a una recta r_1-r_2 , se traza por A la paralela s_1-s_2 a r . Cualquier plano que pase por s es paralelo a r .

Análogamente, para trazar por A_1-A_2 (Fig. 5.4) una paralela a un plano α , se traza cualquier recta s contenida en α y luego, por A , la paralela r a s . En general, es más práctico trazar por A un plano β (no dibujado) paralelo al α , y cualquier recta de β , trazada por A , es paralela a α . (Ver núms. 3,1 a 3,20 de n/E. de G.D.).

PERPENDICULARIDAD

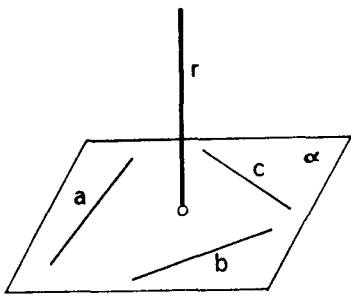


Fig. 5.5.—Recta perpendicular a un plano.

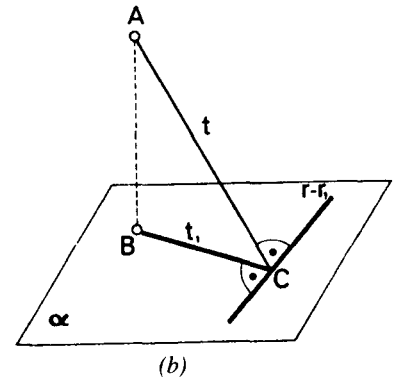
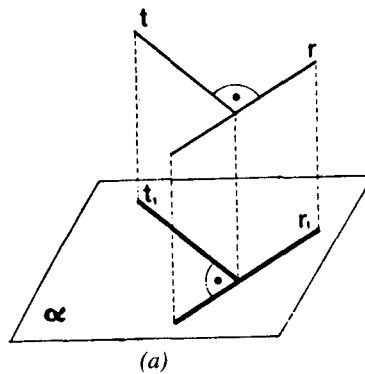


Fig. 5.6.—Teorema de las tres perpendiculares.

5.4. Teoremas de perpendicularidad

Las propiedades geométricas de frecuente aplicación en Descriptiva son:

a) Si una recta r es perpendicular a un plano α (Fig. 5.5), es perpendicular a todas las rectas a, b, c, \dots contenidas en él. Recíprocamente: Para que una recta r sea perpendicular a α , basta que lo sea a dos rectas a y b , no paralelas, de α .

b) Teorema de las tres perpendiculares. (Fig. 5.6). Si dos rectas r y t son perpendiculares y una de ellas, la r por ejemplo, es paralela a un plano α (Fig. a) o pertenece a él (Fig. b), sus proyecciones ortogonales r_1 y t_1 , sobre α son perpendiculares.

Conviene recordar que no siendo la perpendicularidad un invariante proyectivo (núm. 1,6), las proyecciones ortogonales de dos rectas, perpendiculares en el espacio, no son, en general, perpendiculares entre sí.

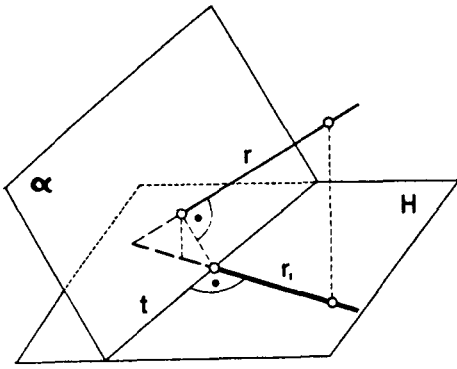


Fig. 5.7.—Perpendicularidad de recta y plano.

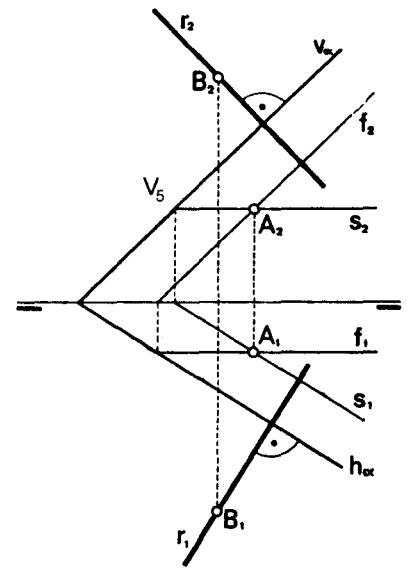
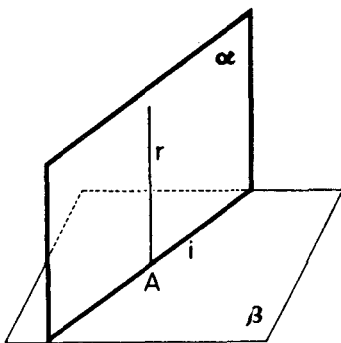
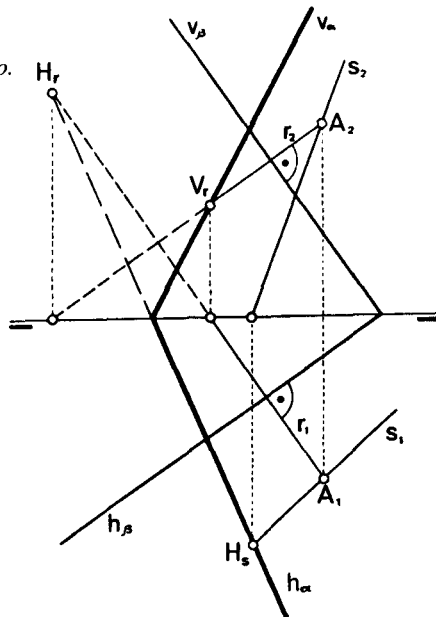


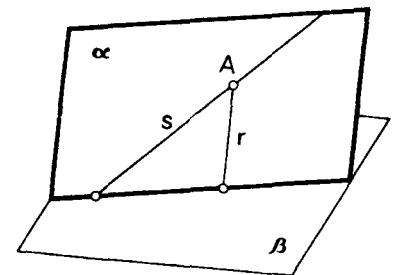
Fig. 5.8.—Trazado en diédrica.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.9.—Planos perpendiculares.

5.5. Recta perpendicular a un plano

Toda perpendicular r a un plano α (Fig. 5.7) es (núm. 5.4-a) perpendicular a su traza t con H que pertenece a H , luego r_1 es perpendicular a t (núm. 5.1-b), y esto mismo sucede, en diédrica, con el plano V . En Geometría se demuestra que la recíproca es cierta, si se trabaja con dos planos de proyección, luego:

La condición de perpendicularidad entre recta y plano (Fig. 5.8) es que las proyecciones r_1 y r_2 de la recta sean perpendiculares a las trazas homónimas h_α y v_α del plano o a las proyecciones s_1 y f_2 de las horizontales y frontales de α .

Según esto, para hallar la perpendicular r al plano α que pase por un punto B_1-B_2 (Fig. 5.8), basta trazar r_1 y r_2 , perpendiculares a h_α y v_α .

Recíprocamente, para hallar el plano normal a una recta r_1-r_2 que pase por un punto A_1-A_2 , se traza por A la horizontal s_1-s_2 del plano, de proyección s_1 normal a r_1 , y se halla su traza V_s . Las trazas v_α y h_α del plano

son la normal a r_2 , trazada por V_s , y la paralela a s_1 (normal a r_1).

5.6. Plano perpendicular a otro

En Geometría se demuestra que si una recta r (Fig. 5.9-a) es perpendicular a un plano β , todo plano α que pase por r es perpendicular a β .

Según esto, para trazar por un punto A (Fig. b) un plano perpendicular a β , se traza por A la normal r a β (núm. 5.4), y cualquier plano α que pase por r (o sea, paralelo a ella) es perpendicular a β .

Si α ha de pasar por una recta s (Fig. c), desde un punto A de s se traza la normal r a β que determina el plano $\alpha \equiv [s, r]$, normal a β .

Esto es lo que se ha hecho en la figura b. Trazar desde un punto A_1-A_2 de s_1-s_2 la normal r_1-r_2 a β . La trazas de estas rectas determinan las $h_\alpha \equiv [H_s, H_r]$ y v_α del plano α buscado.

5.7. Recta perpendicular a otra

Para hallar una recta perpendicular a otra dada r (Fig. 5.10), se traza un plano α perpendicular a r y cualquier recta s_1-s_2 situada en α (o paralela a él) es perpendicular a r (núm. 5,1).

Inversamente, si r_1-r_2 y s_1-s_2 son perpendiculares, las normales h_α y v_α a r_1 y r_2 , por ejemplo, que pasan

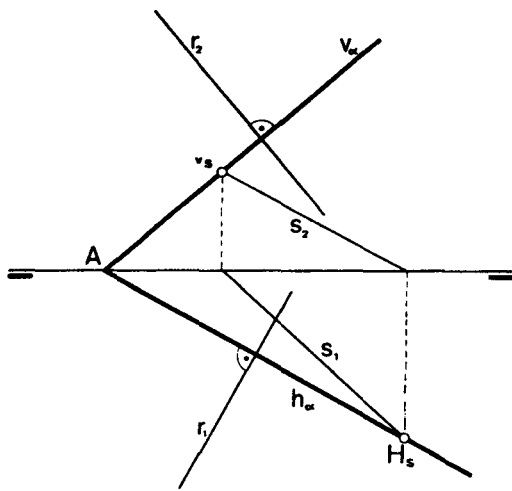


Fig. 5.10.—Recta perpendicular a otra.

por las trazas H_s y V_s de s , han de cortarse en un punto de LT , lo cual sirve de comprobación.

5.8. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

Es la única recta que corta perpendicularmente a dos rectas r y s que se cruzan (Fig. 5.11). Para hallarla,

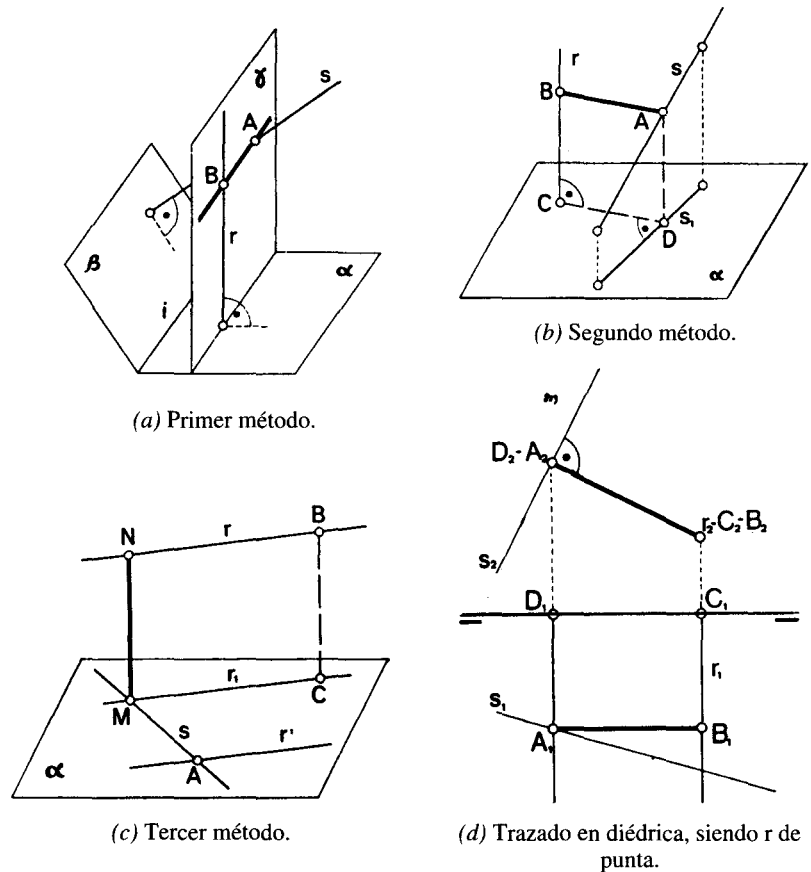


Fig. 5.11.—Trazado de la perpendicular común a dos rectas.

se utilizan los métodos que siguen:

Primer método (Fig. a). 1º Se trazan dos planos arbitrarios perpendiculares a r y s que se cortan, según una perpendicular i a ambas.

2º Por r , por ejemplo, se traza el plano γ , paralelo a i , que corta a s , en A . La paralela a i , trazada por A , es la recta AB buscada que corta a r , en B .

Segundo método (Fig. b). 1º Se traza el plano α perpendicular a r , por ejemplo, a la que corta, en C , y se proyecta s ortogonalmente sobre α , en s_1 .

2º Se traza la perpendicular CD a s_1 , a la que corta en D y por D , la paralela a r que corta a s , en A . La paralela AB a CD es la recta buscada, que corta a r , en B .

Tercer método (Fig. c). Por un punto A de s , por

ejemplo, se traza la paralela r' a r y se proyecta r ortogonalmente sobre el plano $\alpha \equiv [s, r']$, en r_1 , paralela a r ; trazada por la proyección C de un punto B de r . La perpendicular a α , trazada por $M \equiv [s, r_1]$, es la recta MN buscada que corta a r , en N .

Caso particular (Fig. d). Si r , por ejemplo, es una recta de punta, la perpendicular a ella es frontal y si además ha de ser perpendicular a s , sus proyecciones verticales han de ser perpendiculares (núm. 5,4-b). De aquí, la construcción.

Por r_2 , trazar la normal a s_2 a la que corta en A_2 y referir este punto a s_1 , en A_1 . La paralela A_1B_1 a LT determina la frontal buscada $A_1B_1-A_2B_2$ que corta a r , en B_1-B_2 . Como se ve, es una simplificación del segundo método.

5.9. Distancia entre dos puntos A y B

Es la longitud $l = \overline{AB}$ del segmento que los une (Fig. 5.12-a) y se determina fácilmente, como hipotenusa del triángulo rectángulo ABC , cuyos catetos son: la proyección horizontal $\overline{A_1B_1} = \overline{AC}$ del segmento y la diferencia de cota $\overline{BC} = \overline{BB_1} - \overline{AA_1}$ de B y A.

En diédrica (Fig. b), la longitud del segmento $A_1B_1 - A_2B_2$, en verdadera magnitud, se obtiene construyendo el triángulo rectángulo de catetos $\overline{A_1B_1}$ y d (diferencia de cotas de B y A); la hipotenusa D es la distancia buscada.

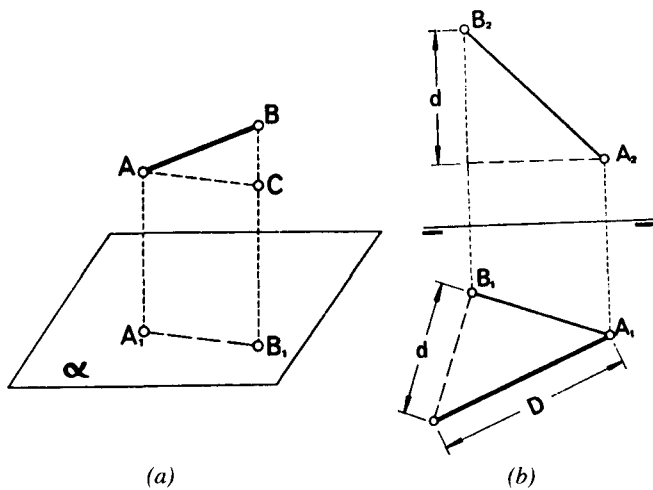


Fig. 5.12.—Distancia entre A y B.

5.10. Distancia de un punto a una recta

Se halla, trazando desde el punto A (Fig. 5.13-a) la perpendicular \overline{AB} a la recta r a la que corta en B. La longitud $D = \overline{AB}$ es la distancia pedida. El punto B se halla, como intersección de r con el plano normal a ella, trazado por A.

En diédrica (Fig. b), se ha trazado por $A_1 - A_2$ el plano α , normal a r , (por medio de la horizontal s , de proyección s_1 normal a r_1), y se ha hallado su intersección B con r , por medio del proyectante vertical β de r que corta al α , según $i_1 - i_2$. La intersección B_1 de i_1 y r_1 , determina el punto $B_1 - B_2$ y la distancia \overline{AB} pedida.

También puede hallarse el plano $[A, r]$ y trazar en él directamente la perpendicular \overline{AB} a r , por medio de un abatimiento, como más adelante veremos.

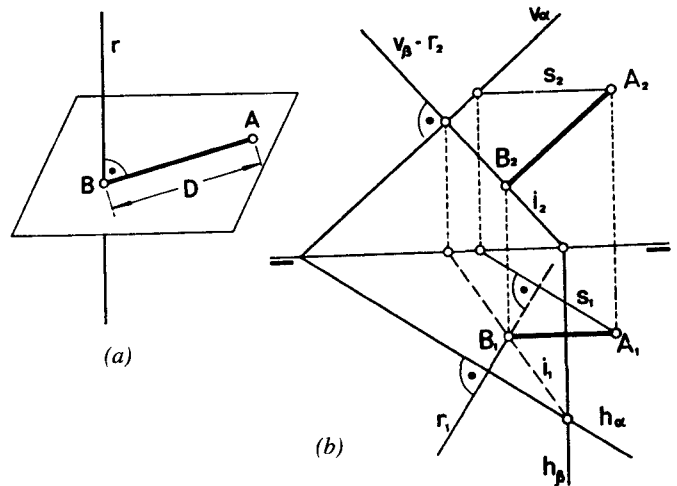


Fig. 5.13.—Distancia de A a r.

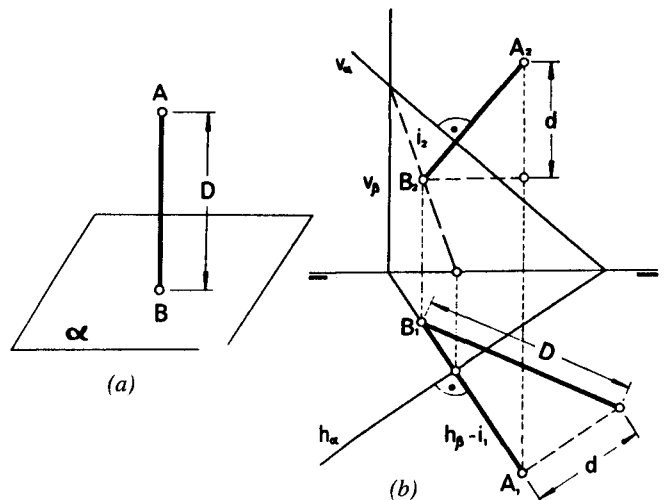


Fig. 5.14.—Distancia de A a α .

5.11. Distancia de un punto a un plano

Es el segmento \overline{AB} determinado por el punto A (Fig. 5.14-a) y el pie B de la perpendicular al plano α , trazada por A.

En diédrica (Fig. b), se traza desde $A_1 - A_2$ la normal \overline{AB} a α , y se halla su intersección B con él, por medio del proyectante horizontal β , de \overline{AB} que corta al α , según $i_1 - i_2$. La intersección B_2 de i_2 y A_2B_2 determina el punto $B_1 - B_2$ y la distancia \overline{AB} , obtenida en verdadera magnitud, en D (núm. 5,6).

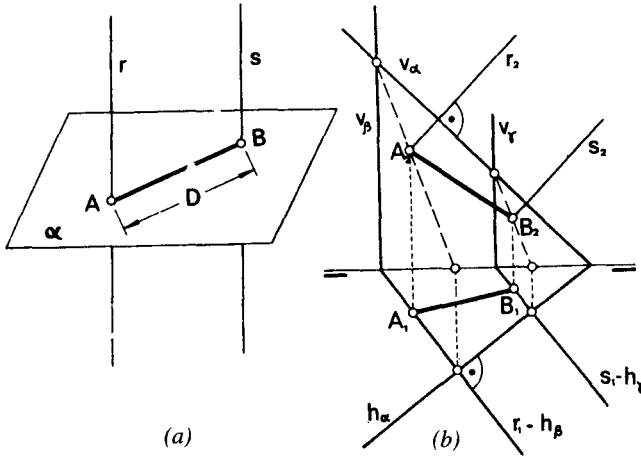


Fig. 5.15.—Distancia entre paralelas.

5.12. Distancia entre rectas paralelas

Es el segmento $\overline{AB} = D$, determinado por las intersecciones A y B de las paralelas r y s (Fig. 5.15-a) con un plano α normal a ellas o con una secante perpendicular a ambas.

En diédrica (Fig. b), se traza un plano α , perpendicular a r y s, y se hallan sus intersecciones A y B con ellas, por medio de los proyectantes horizontales β y γ de r y s, siendo \overline{AB} la distancia pedida. Más sencillo resulta trazar α por un punto A previamente elegido de r, por ejemplo, ahorrándonos así hallar éste.

También puede dibujarse el plano [r, s] y trazar en él la perpendicular AB, por medio de un abatimiento, como más adelante veremos.

5.13. Distancia entre planos paralelos

Es el segmento $\overline{AB} = D$ (Fig. 5.16-a) de perpendicular común, comprendido entre dos planos dados α y β .

En diédrica (Fig. b), se traza una perpendicular r_1-r_2 a α y β y se hallan sus intersecciones respectivas A_1-A_2 y B_1-B_2 con ellos, por medio del proyectante horizontal γ de r, siendo $\overline{A_1B_1} \equiv \overline{A_2B_2}$ la distancia pedida.

5.14. Distancia entre rectas que se cruzan

Si por puntos arbitrarios M y N de las rectas dadas r y s (Fig. 5,17), se trazan paralelas s' y r', a s y r, los

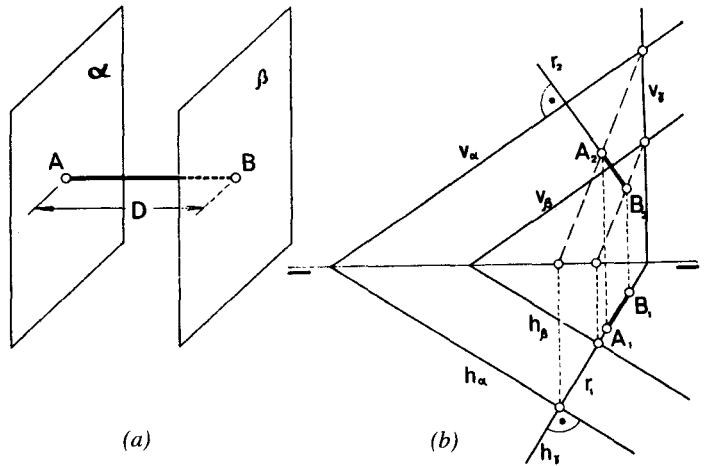


Fig. 5.16.—Distancia entre planos paralelos.

planos $\alpha \equiv [r, s']$ y $\beta \equiv [s, r']$ son paralelos y contienen a las rectas dadas. Por tanto:

Dos rectas r y s que se cruzan, determinan un sistema único de planos paralelos a ellas y las perpendiculares a estos planos son también perpendiculares a r y s.

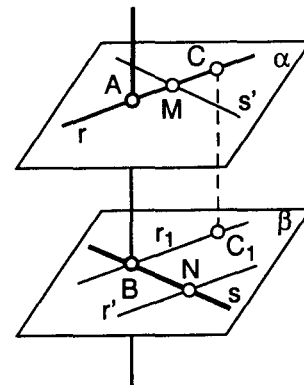


Fig. 5.17.—Distancia entre rectas que se cruzan.

La proyección ortogonal r_1 de r sobre β (obtenida, proyectando un punto C de r, en C_1) corta a s, en B, y determina la perpendicular BA a β que corta a r, en A, siendo AB la única recta que corta perpendicularmente a r y s. De ahí, el nombre de *perpendicular común* de r y s.

La mínima distancia entre dos rectas r y s que se cruzan se mide por el segmento \overline{AB} de perpendicular común o más sencillamente, por la distancia CC_1 de un punto C de r al plano β o por la distancia entre α y β (Ver núms. 4,1 a 4,20 de n/E. de G.D.).

6. CAMBIOS DE PLANO

6.1. Generalidades. El punto en los cambios

El cambio de plano es, en esencia, la sustitución del plano H o V por otro, normal al plano que se conserva (cambio simple). Si se quieren cambiar los dos planos de proyección (doble cambio), se procede escalonadamente, cambiando primero el horizontal y luego, el vertical, o a la inversa.

En el cambio de plano, la figura permanece fija en el espacio. Sólo varían los planos de proyección y las proyecciones sobre ellos.

Si se elige un nuevo plano vertical V' (Fig. 6.1), normal al H , cortará a éste, según la línea de tierra L_1T_1' de un nuevo sistema diédrico, constituido por H y V' . Para facilitar estos cambios, se han adoptado las notaciones y convenios que siguen:

a) La nueva línea de tierra se dibuja con dos o tres trazos en cada extremo, según sea el 1º o 2º cambio, y se designa con las letras LT o $L'T'$, según sea cambio de plano horizontal o vertical, y con los subíndices 1 o 2, según sea el 1º o 2º cambio. Así, L_1T_1' es la línea de tierra del primer cambio de plano vertical y L_2T_2 , la del segundo cambio de plano horizontal.

b) Los puntos y rectas se designan con sus notaciones primitivas, afectadas de una comilla o dos, según sea el 1º o 2º cambio, respectivamente. Así en la figura 6.1, el punto A conserva su proyección A_1 y su cota h ; luego, al abatir V' sobre H , sus nuevas proyecciones son $A_1' \equiv A_1$ y A_2' , situada en la línea de referencia $A_1'A_2'$, normal a L_1T_1' y a distancia h de ésta. Por otra parte, para que A siga perteneciendo al primer cuadrante, abatiremos V' en el sentido de la flecha, y

colocaremos los trazos en el semiplano horizontal visto que contiene a A_1 , quedando A_2 y A_2' , respecto a LT y L_1T_1' , respectivamente, en el semiplano que no contiene los trazos. De aquí, la regla a seguir (Fig. b):

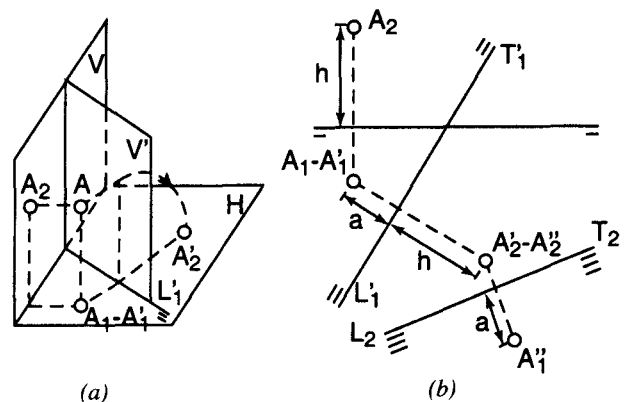


Fig. 6.1.—Nuevas proyecciones del punto en los cambios de plano.

Una vez dibujada la nueva línea de tierra L_1T_1' con sus trazos, en un cambio de plano vertical, las nuevas proyecciones del punto A_1-A_2 , de cota h , son: $A_1' \equiv A_1$ y A_2' , situada en la normal $A_1'A_2'$ a L_1T_1' , a distancia h de ella y en el mismo semiplano, respecto a sus trazos, que A_2 está respecto a los suyos.

Si ahora hacemos un cambio de plano horizontal, tomando L_2T_2 como nueva línea de tierra, las nuevas proyecciones del punto $A_1'-A_2'$, de alejamiento a , serían: $A_2'' \equiv A_2'$ y A_1'' , situada en la normal $A_2''A_1''$ a L_2T_2 , a distancia a de ésta y en el mismo semiplano respecto a sus trazos que A_1' se encuentra respecto a los suyos.

Como ejemplo práctico, en la figura 6.2, se han dibujado dos cambios independientes de una pieza de madera, tomando como nuevos planos dos de perfil. El de la derecha (cambio de plano horizontal) es la llamada hasta ahora *proyección tercera*, y el de la izquierda es un cambio de plano vertical.

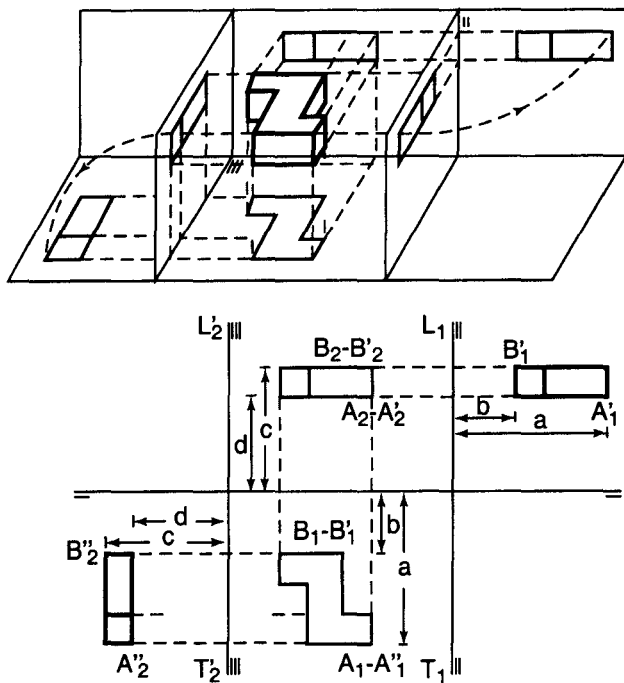


Fig. 6.2.—Vistas laterales.

En general, en todo cambio de plano, a la proyección del cuerpo que no coincide con la primitiva se la denomina: *tercera proyección, proyección auxiliar o vista auxiliar*. En la figura 6.2, las proyecciones correspondientes a A_1' y A_2'' son vistas laterales, izquierda y derecha, respectivamente.

6.2. La recta en los cambios

Las nuevas proyecciones de una recta r_1-r_2 se hallan, uniendo las nuevas proyecciones homónimas de dos de sus puntos o más fácilmente, las de la traza que no varía y las de cualquier otro punto. En el cambio de plano vertical de la figura 6.3, las proyecciones $r_1'-r_2'$ de r son las determinadas por las nuevas proyecciones $A_1'-A_2'$ de un punto arbitrario A y las $H_r' \equiv H_r$ de la traza horizontal.

Para transformar una recta r_1-r_2 en horizontal (Fig. 6.4), se hace un cambio de plano horizontal cuya línea de tierra L_1T_1 sea paralela a r_2 y se hallan las nuevas proyecciones $A_1'-A_2'$ y $B_1'-B_2'$ de dos puntos A y B de r .

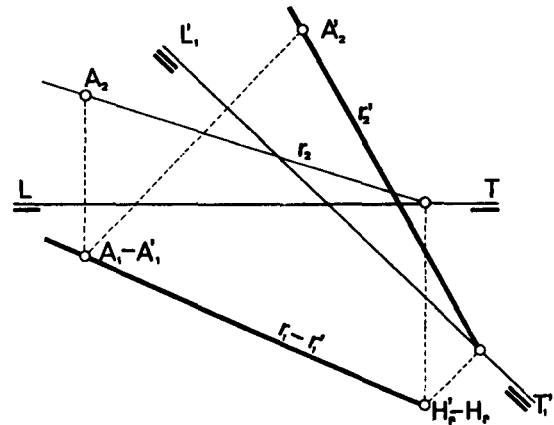


Fig. 6.3.—La recta en un cambio de plano.

Las nuevas proyecciones de r son $r_2' \equiv r_2$ y $r_1' \equiv A_1'B_1'$. Esta horizontal puede transformarse luego en recta de punta (vertical), con un cambio de plano vertical cuya línea de tierra sea normal a r_1' . De forma análoga se

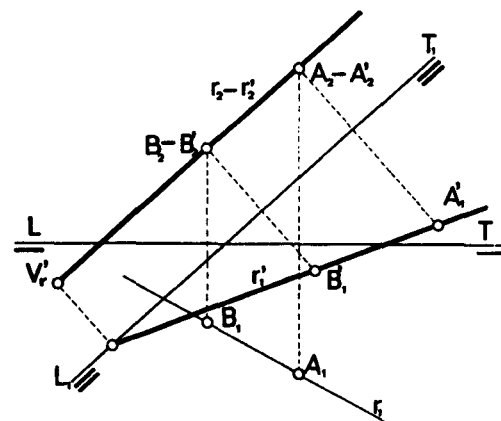


Fig. 6.4.—Transformación de una recta en horizontal.

procedería para transformar una recta en frontal y, luego, en recta vertical. Dejamos al alumno la resolución de estos ejercicios.

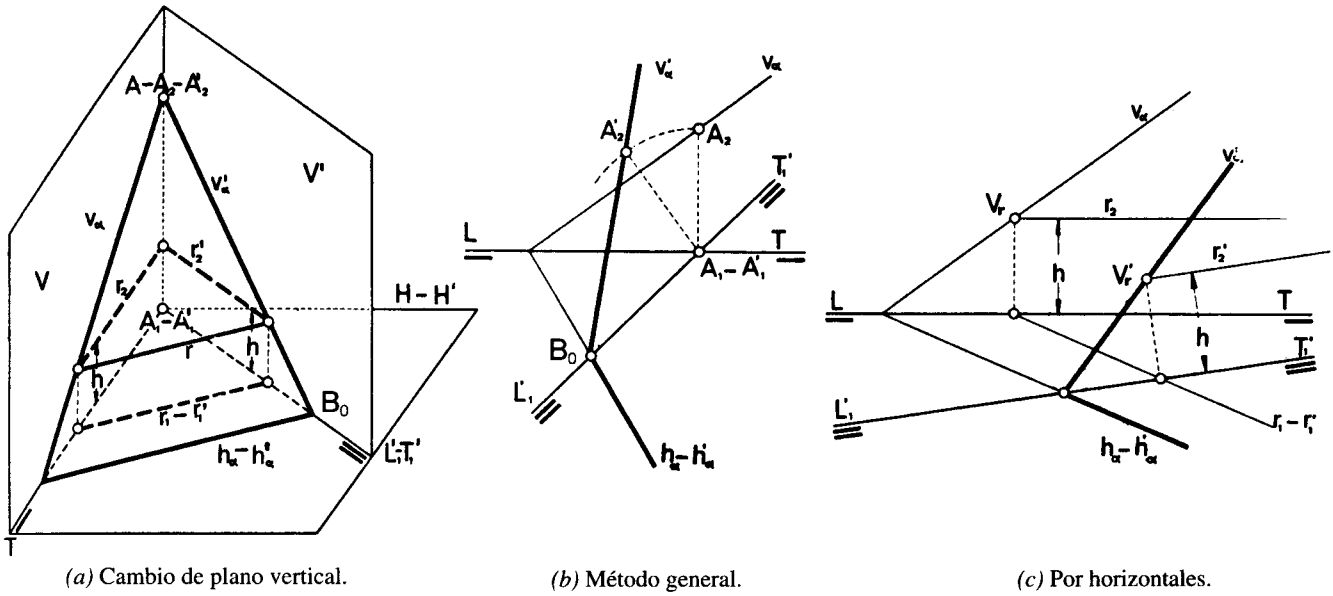


Fig. 6.5.—Nuevas trazas del plano en los cambios.

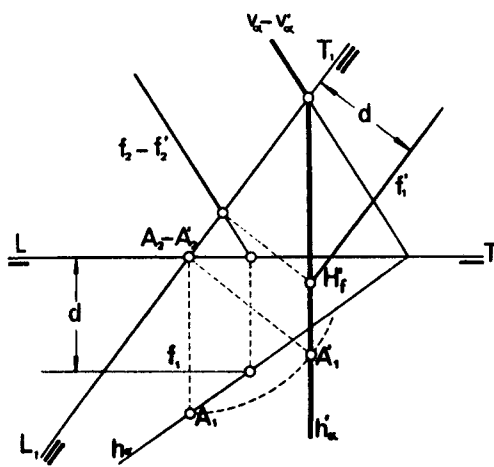


Fig. 6.6.—Nuevas trazas en un cambio de plano horizontal.

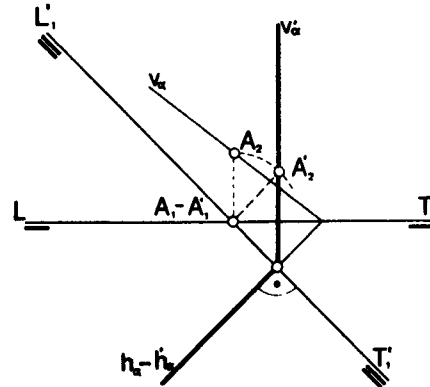


Fig. 6.7.—Transformación de α en proyectante vertical.

6.3. Nuevas trazas del plano en los cambios

En un cambio de plano vertical, por ejemplo, (Fig. 6.5-a), $h'_\alpha \equiv h_\alpha$ corta a $L'_1T'_1$ en B_0 y v'_α pasa por B_0 y corta a v_α en un punto A de la arista del diédrico $\widehat{V\bar{V}}$ de proyección A_1 (intersección de LT y $L'_1T'_1$). De aquí, los dos métodos a seguir (Fig. b):

1°. En un cambio de plano vertical, las nuevas trazas de un plano α son $h'_\alpha \equiv h_\alpha$ (que corta a $L'_1T'_1$ en B_0) y $v'_\alpha \equiv B_0A'_2$, siendo A'_2 la nueva proyección vertical del punto $A \equiv [LT, L'_1T'_1]$.

2°. Si el punto $A \equiv [LT, L'_1T'_1]$ o el $B_0 \equiv [h_\alpha, L'_1T'_1]$ se salen del dibujo (Fig. c), puede utilizarse una horizontal r de α (Fig. c), cuyas nuevas proyecciones son: $r'_1 \equiv r_1$ y r'_2 , paralela a $L'_1T'_1$ y distante de ella la cota h de r . Uniendo B_0 con la nueva traza V'_r de r' , se obtiene v'_α .

Si el cambio de plano es horizontal se procede de forma análoga, como se ve en la figura 6.6.

Para transformar un plano α en proyectante horizontal (o vertical) se hace un cambio de plano horizontal (o vertical) cuya línea de tierra sea normal a la traza vertical (u horizontal) de α . Así, en la figura 6.7, el plano α se ha transformado en proyectante vertical, por medio de un cambio de plano vertical cuya línea de tierra $L'_1T'_1$ es normal a h_α , habiéndose aplicado el primer método (Ver núms. 7,1 a 7,21 de n/E. de G.D.).

APLICACIONES

6.4. Trazado práctico

Las proyecciones de un cuerpo sobre H (planta) o sobre otros planos paralelos a H , son iguales (Fig. 6.8-a) y lo mismo sucede con las proyecciones sobre V o sobre los paralelos a él (alzados). Estos cambios de plano se reflejan en el dibujo: en la separación entre planta y alzado y en la posición relativa de LT por lo que, en el dibujo industrial, se prescinde de la línea de tierra e incluso de las líneas de referencia innecesarias y sólo se dibuja la planta y alzado, separadas entre sí la distancia que más convenga.

Con estas simplificaciones, el método práctico para hacer un cambio de plano vertical, por ejemplo (Fig. 6. b), consiste en trazar por los puntos de la planta, líneas de referencia paralelas a una dirección arbitraria y una perpendicular MN a ellas que se toma como cota del

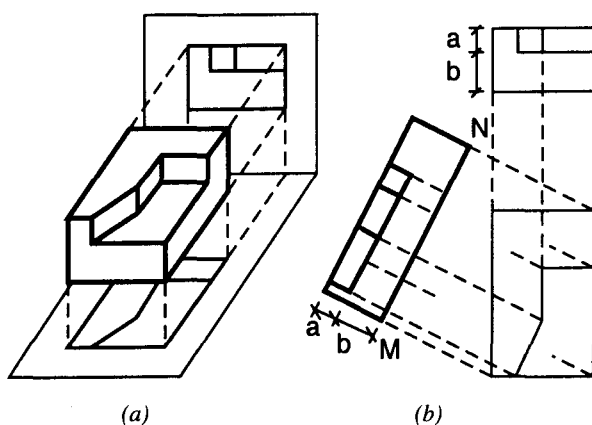


Fig. 6.8. - Trazado práctico del cambio de plano.

punto más bajo del cuerpo y luego, llevar sobre cada línea de referencia, a partir de MN , la diferencia de cota respectiva, obteniéndose la nueva proyección de forma inmediata.

6.5. Vistas laterales y proyecciones auxiliares

En los cambios de plano de perfil, se obtiene la *vista lateral* y, en caso contrario, la *vista auxiliar*. Ambas se utilizan cuando el cuerpo no queda definido o claramente representado por la planta y alzado.

Así, la pieza de la Fig. 6.9 queda más claramente representada dibujando la *vista lateral izquierda* (punto de vista a la izquierda) por medio de un cambio de plano horizontal. Y lo mismo sucede con la proyec-

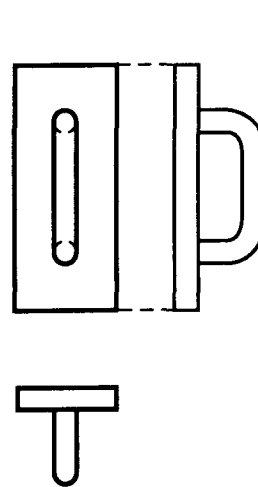


Fig. 6.9. - Vista lateral izquierda.

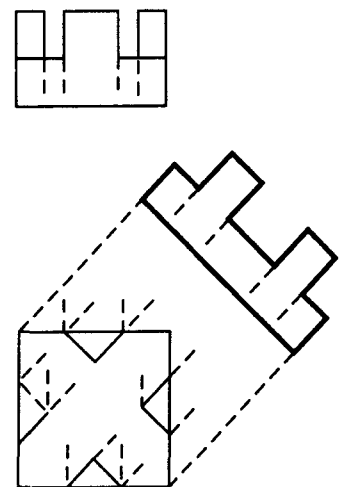


Fig. 6.10. - Proyección auxiliar.

ción auxiliar de la pieza prismática de la figura 6.10, habiéndose elegido un cambio de plano vertical, normal a la diagonal del cuadrado de planta.

6.6. Selección de proyecciones y vistas

Los objetos conviene colocarlos en posición adecuada para que con sólo dos proyecciones (planta y alzado) queden representados sin ambigüedades, evitando así proyecciones innecesarias.

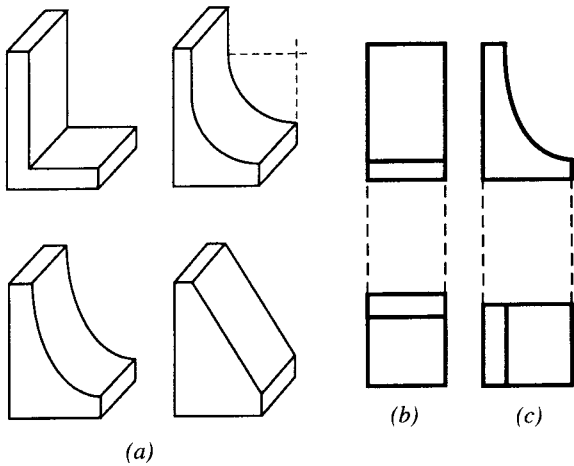


Fig. 6.11. - Elección de planta y alzado.

Por ejemplo, las cuatro piezas de la figura 6.11-a tienen la misma planta y alzado, si se colocan en la posición b). Esto se evita colocándolas en la posición c).

6.7. Medida y perspectiva

En el sistema diédrico, los cuerpos se colocan con el mayor número posible de aristas y planos, paralelos o perpendiculares a H y V , para facilitar las mediciones, pero la representación resulta a veces poco clara e intuitiva, como sucede con la pieza prismática $\Delta_1-\Delta_2$, de la Fig. 6.12.

En este caso, se ha dibujado en perspectiva e incluso, con su base inferior vista, por medio de dos cambios de plano (uno vertical y otro horizontal), con líneas de tierra de dirección arbitraria. La proyección Δ_2' se obtiene en el primer cambio, tomando diferencia de cotas, y la Δ_2'' , tomando diferencia de alejamientos, no siendo necesario dibujar las líneas de tierra.

6.8. Secciones

Son cambios de plano denominados *cortes*, *vista en sección* o *secciones*. La figura u objeto se supone cortado por un plano (plano secante o de corte) y una de las partes se separa, entendiéndose que la parte suprimida no se omite en las restantes proyecciones. Se utiliza cuando el interior del objeto es confuso o complicado y las líneas ocultas son poco claras o representativas. La dirección de las visuales se indica con un flecha.

Las secciones pueden ser (Fig. 6.13) de plano horizontal (planta de una casa) o vertical (Fig. 6.14), de

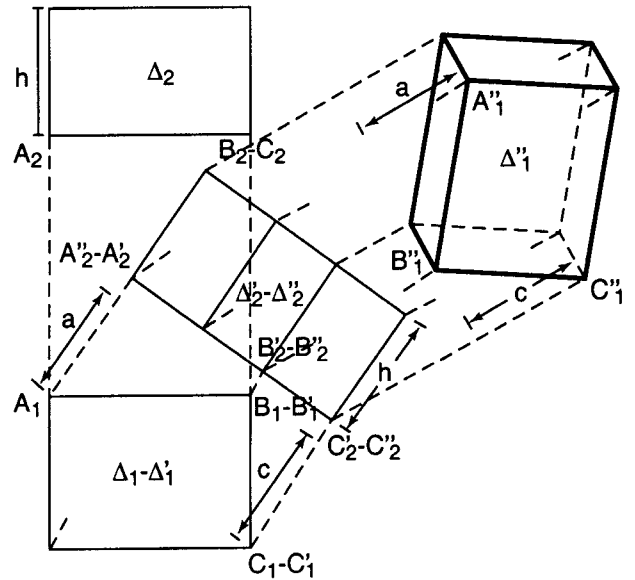


Fig. 6.12. - Paso de diédrica a perspectiva.

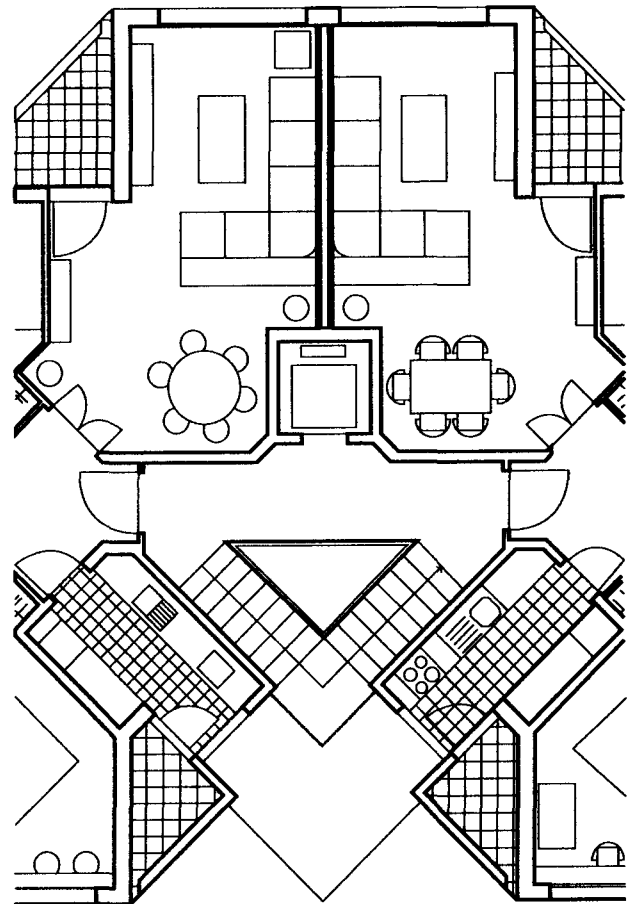


Fig. 6.13. - Planta de escalera de una vivienda.

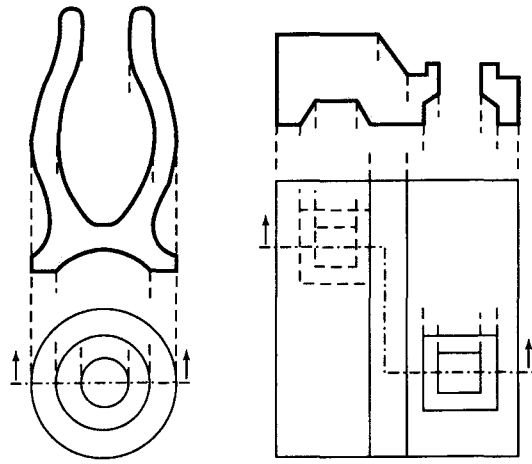


Fig. 6.14.—Secciones de plano vertical.

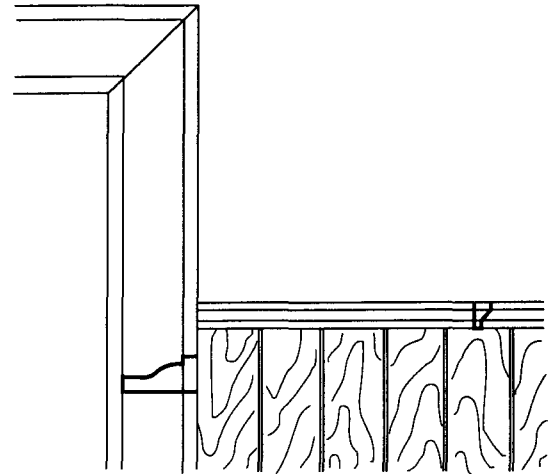


Fig. 6.15.—Secciones superpuestas.

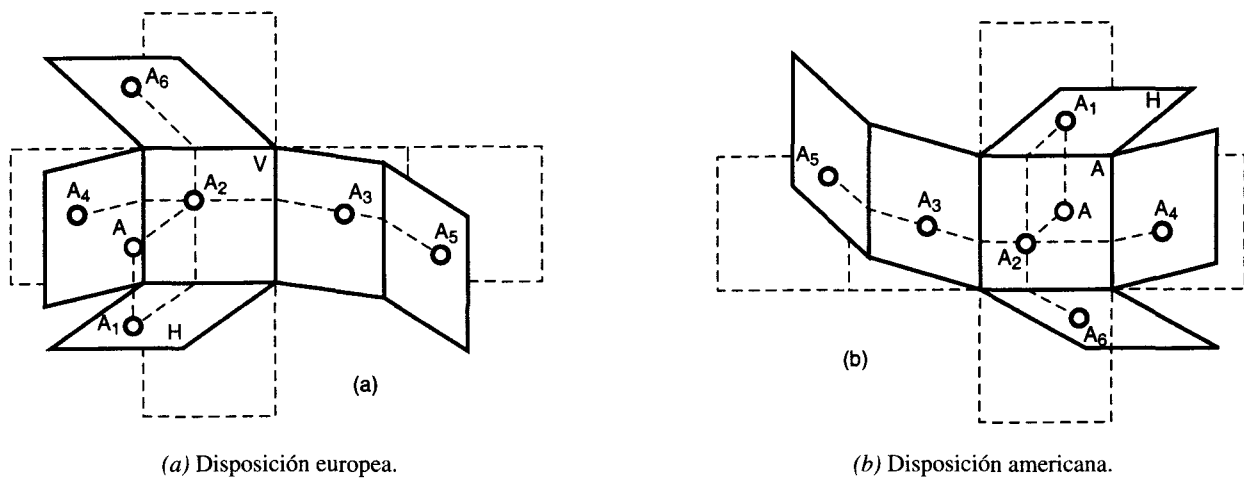


Fig. 6.16.—Las seis proyecciones de un punto.

traza rectilínea (Fig. a) o quebrada (Fig. b). Suelen dibujarse aparte o superpuestas en el dibujo (Fig. 6.15) y, a veces, (Fig. 6.14) resulta más claro representar el cuerpo por la planta y sección que por su planta alzado.

6.9. Disposición de las seis proyecciones principales de un cuerpo

Sea A (Fig. 6.16) un punto situado en el interior de un cubo, de caras coincidentes con H y V . Si proyectamos A ortogonalmente sobre la parte interior de las seis caras del cubo (Fig. a) y desarrollamos éste sobre el plano vertical, como indica la figura, se obtienen las seis proyecciones o vistas fundamentales que siguen:

- A_1 = proyección horizontal, vista superior o planta.
- A_2 = proyección vertical, vista frontal o alzado.
- A_3 = vista lateral izquierda.
- A_4 = vista lateral derecha.
- A_5 = vista posterior, y
- A_6 = vista inferior.

Esta es la llamada *disposición europea*, por utilizarse en gran parte de los países europeos (Ver norma UNE 1-032-74).

En América (Fig. b) se considera que A y el centro de proyección (punto de vista) están separados por la cara del cubo, supuesta transparente. Si dibujamos sobre la parte exterior de cada cara las respectivas proyecciones del punto sobre ellas y desarrollamos el cubo sobre el vertical, se obtiene la llamada *disposición americana*, cuyas proyecciones se han numerado de acuerdo con los nombres de las vistas antes citadas.

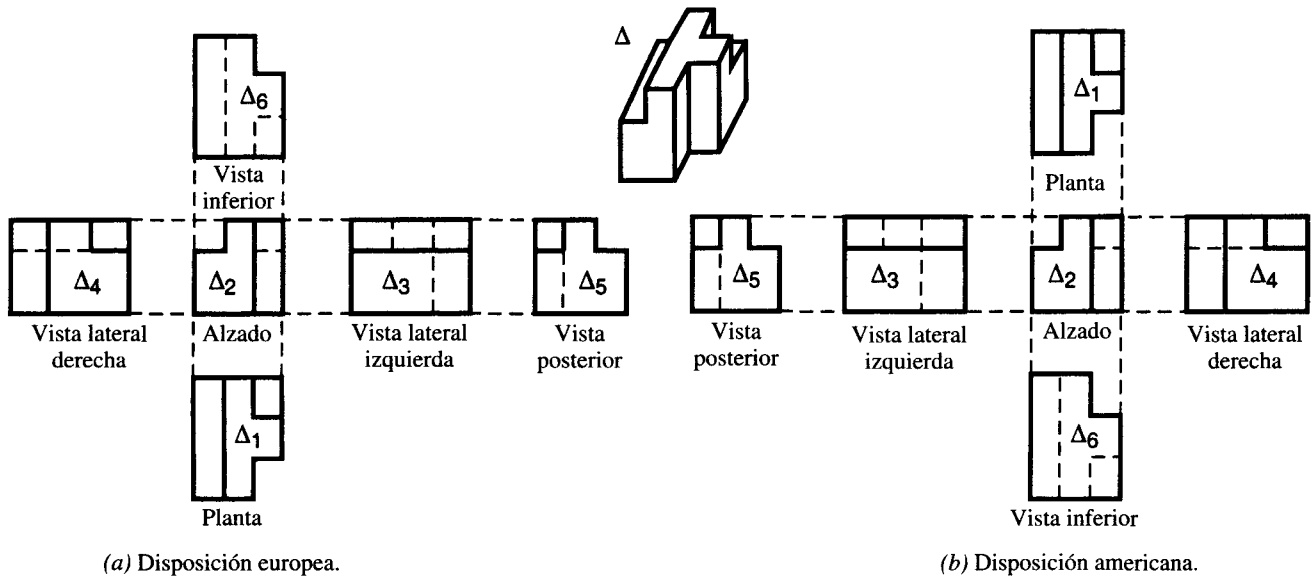


Fig. 6.17.—Las seis proyecciones principales de un cuerpo.

En la figura 6.17, se han dibujado las seis proyecciones de la pieza Δ , representada en perspectiva. Como se ve, las seis proyecciones son iguales en ambas disposiciones, pero no su colocación. Esto explica que, en la representación americana, la planta aparece encima del alzado y, en Europa, a la inversa.

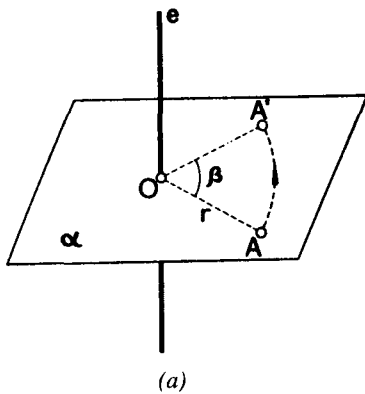
La diferencia esencial estriba en que, al colocar el

cuerpo dentro del cubo, sus caras se consideran opacas (disposición europea) o transparentes (americana). En el primer caso, el cuerpo se proyecta sobre la parte interior de las caras y, en el segundo, sobre la exterior; es decir, como si mirásemos la pieza desde fuera del cubo, a través del cristal de la cara. (Ver núms. 7,1 a 7,21 de n/E. de G.D.).

7. GIROS

7.1. Generalidades. Giro de un punto

Si un punto A (Fig. 7.1-a) gira alrededor de una recta e (eje de giro), describe una circunferencia de plano α , normal al eje, de centro $O \equiv [e, \alpha]$ y radio $r = \overline{OA}$ (distancia de A al eje). Si A gira un ángulo β , describe el arco AA' y se traslada a la posición A' .



Si falta alguna de estas condiciones, la nueva posición del punto queda indeterminada.

En la práctica, se utilizan ejes normales a H o V . Si

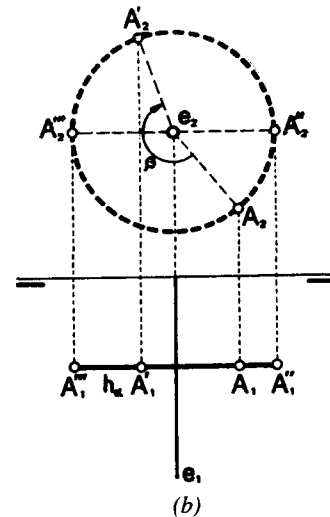


Fig. 7.1.—Giro de un punto.

Todos los giros se efectúan alrededor de una recta (eje). En el caso de una figura de plano α , se dice que A gira alrededor de O , pero realmente gira alrededor del eje e , normal a α que pasa por O .

Para definir un giro, debe indicarse:

- La figura o forma que gira (punto, plano, cuerpo, ..., etc.)
- El eje de giro
- El ángulo que gira
- El sentido del giro

A_1-A_2 (Fig. b) gira alrededor de la recta de punta e_1-e_2 , la circunferencia descrita, de plano frontal α , se proyecta horizontalmente, según el segmento $\overline{A_1''A_1'}$ y verticalmente, según la circunferencia de centro e_2 y radio e_2A_2 , en verdadera magnitud. Para girar un ángulo β , en el sentido de la flecha, se traza el arco A_2A_2' (de centro e_2 , radio e_2A_2 y ángulo $\beta = \widehat{A_2e_2A_2'}$) y se refiere A_2' a la paralela h_w a LT , en A_1' , siendo $A_1'-A_2'$ el punto girado. Si el eje fuera vertical, se procedería de forma análoga.

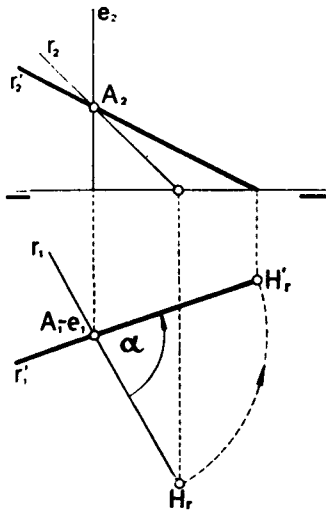


Fig. 7.2.—Giro de recta que corta al eje.

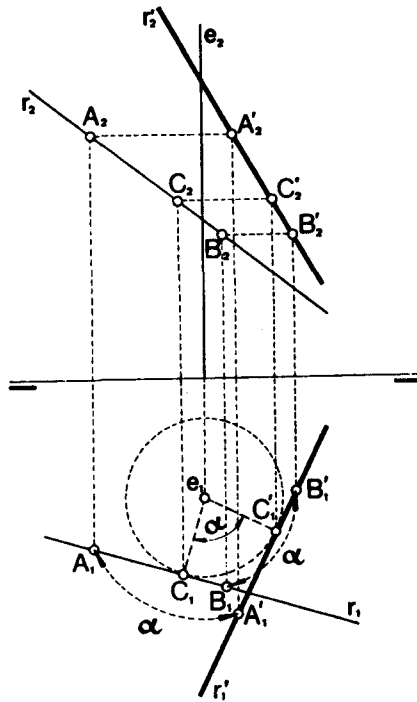


Fig. 7.3.—Giro de recta que se cruza con el eje.

7.2. Giro de una recta

Las proyecciones de la recta girada se hallan, girando dos de sus puntos y uniendo sus proyecciones homónimas. En los dos casos que siguen, supondremos que la recta r gira un ángulo α , alrededor del eje e , en el sentido de la flecha.

a) *La recta corta al eje* (Fig. 7.2). El punto de corte $A \equiv [e, r]$ no varía por pertenecer al eje (punto doble) y su traza horizontal H_r describe el arco $\alpha \equiv H_r H'_r$, situándose en H'_r , siendo $r'_1 r'_2$ las proyecciones de la recta girada.

b) *La recta se cruza con el eje* (Fig. 7.3). Basta girar dos puntos A y B de ella, como ya se sabe. Las nuevas proyecciones $A'_1 A'_2$ y $B'_1 B'_2$ de éstos determinan la recta girada $r'_1 r'_2$.

Lo más práctico es trazar la perpendicular común a e y r , de proyección $e_1 C_1$ normal a r_1 , a la que corta en C_1 . Al girar r , r_1 se conserva la tangente a la circunferencia de centro e_1 y radio $e_1 C_1$, lo cual sirve para resolver muchos problemas. De aquí, la construcción:

Trazar la perpendicular común a e y r que corta a r , en $C_1 - C_2$ y girar el pie $C_1 - C_2$ el ángulo α , hasta la posición $C'_1 - C'_2$. Las proyecciones de la recta girada son: r'_1 (normal a $e_1 C'_1$, en C'_1) y $r'_2 \equiv C'_2 A'_2$, siendo $A'_1 - A'_2$ la posición de cualquier punto de r girado. En vez de girar A , resulta más fácil utilizar la traza H_r de r (no dibujada) o tomar directamente sobre r'_1 , $C'_1 A'_1 = \overline{C_1 A_1}$ o $\overline{C_1 H_r} = \overline{C_1 H_r}$.

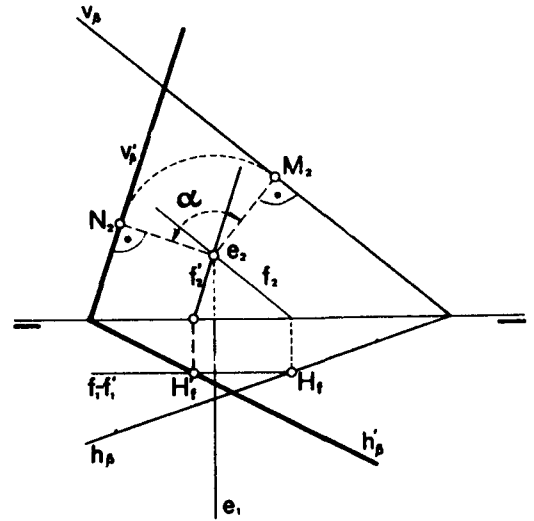


Fig. 7.4.—Giro del plano.

La perpendicular común es muy útil en giros de rectas para convertirlas en horizontal o frontal, para que pasen por un punto dado o corten a una vertical o recta de punta.

7.3. Giro de un plano

Para girar el plano β un ángulo α , alrededor de un eje de punta $e_1 - e_2$ (Fig. 7.4), basta girar la traza v_β y la frontal que corta al eje, de proyección f_2 , trazada por e_2 . El giro de v_β se obtiene, por el giro del radio $e_2 M_2$, perpendicular a v_β , hasta la posición $e_2 N_2$, siendo v'_β la normal a $e_2 N_2$, en N_2 .

Las nuevas proyecciones de f_2 son: la paralela f'_2 a v'_β , trazada por e_2 , y la paralela f'_1 a LT , trazada por H_r , quedando h'_β determinada por la traza H'_r de f' . Lo mismo se procedería con otra frontal del plano.

Si el eje es vertical, basta girar una horizontal y la traza horizontal del plano. (Ver los núms. 6,1 a 6,20 de n/E. de G.D.).

8. ABATIMIENTOS

8.1. Generalidades

Abatir un plano α sobre otro H (Fig. 8.1) es girar α , alrededor de su traza h_α con H , hasta hacerlo coincidir. El eje de giro h_α se llama *charnela*.

El abatimiento se refiere sólo a un plano o a la figura contenida en él. Así, para abatir una recta, por ejemplo, se hace pasar por ella un plano y al abatir éste, se obtiene el abatimiento de la recta. En todo abatimiento, lo mismo que en el giro, hay que especificar:

- Qué plano se abate.
- Alrededor de qué traza o charnela se gira y
- El sentido del giro (abatimiento) para hacerlo coincidir con el otro.

El abatimiento es uno de los artificios más usados en Descriptiva para medir ángulos, distancias, verdaderas magnitudes, etc. El plano de abatimiento suele ser H , V o algún otro paralelo a éstos, para obtener la forma abatida en verdadera magnitud.

Los puntos y rectas abatidos se representan con sus mismas letras, encerradas en un paréntesis. Si se realizan varios abatimientos, se les afecta de un número como subíndice.

8.2. Abatimiento del punto

Si desde la proyección A_1 de un punto A de α (Fig. 8.1), se traza la normal A_1M a h_α , la recta AM (recta de máxima pendiente de α) es normal a h_α (núm. 5,4-b)

y al abatir α sobre H , el punto A describe una circunferencia de radio \overline{MA} y plano normal a h_α que corta a H en los abatimientos (A) y $(A)_2$ de A , situados en la normal A_1M a h_α y distantes de éstas, la longitud $d = \overline{MA}$.

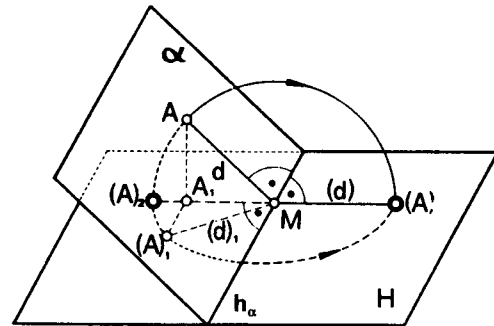


Fig. 8.1.—Abatimiento de un punto.

La distancia d puede conocerse, abatiendo sobre H el triángulo rectángulo AA_1M , en $A_1(A)_1M$, siendo $\overline{A_1(A)_1}$ paralela a h_α e igual a la cota $\overline{AA_1}$ de A . De aquí, el método a seguir:

Para abatir un punto A de α , sobre H , se traza desde A_1 la perpendicular y la paralela a h_α y se toma sobre ésta última la longitud $\overline{A_1(A)_1}$ igual a la cota $\overline{AA_1}$ de A . Con centro en el pie M de la perpendicular, se traza luego el arco de radio $\overline{M(A)_1}$ que corta a A_1M , en los abatimientos (A) y $(A)_2$ de A (según el sentido del abatimiento).

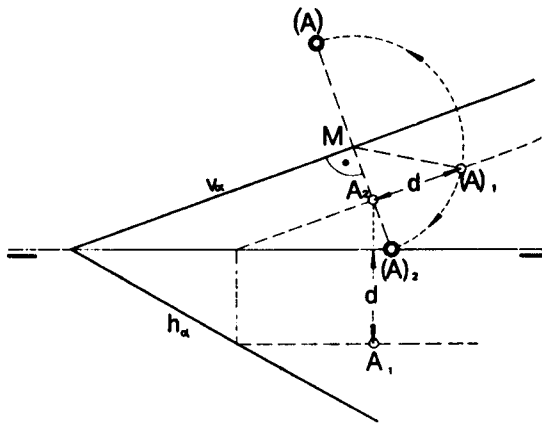


Fig. 8.2.—Abatimiento de un punto sobre V .

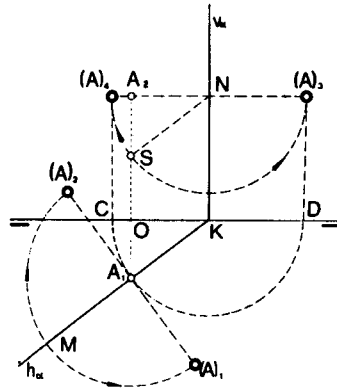


Fig. 8.3.—Abatimiento de un plano proyectante.

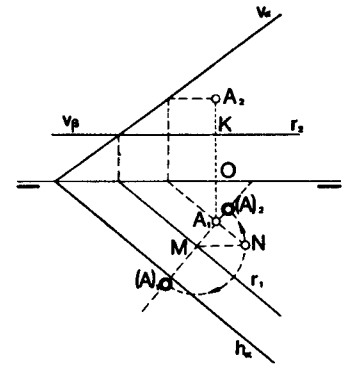


Fig. 8.4.—Abatimiento sobre un plano paralelo a H .

Como aplicación, en la figura 8.2 se ha abatido el punto A de α , sobre V , trazando A_2M y $A_2(A)_1$, perpendicular y paralela a v_α siendo $A_2(A)_1$ igual al alejamiento d de A . El arco de centro M y radio $\overline{M(A)_1}$ corta a A_2M , en los abatimientos (A) y $(A)_2$ de A . Es una coincidencia que $(A)_2$ caiga en LT .

8.5), basta abatir dos puntos de ella: la traza horizontal $A \equiv (A)$ (coincidente con su abatimiento, por pertenecer a la charnela h_α) y cualquier otro punto C_1-C_2 , abatido en (C) siendo $(A)(C)$ el abatimiento de la recta. Si

8.3. Casos particulares

1.º Abatimiento de un plano proyectante α (Fig. 8.3).

Para abatir un punto A de α sobre H , basta trazar por A_1 la perpendicular a h_α y tomar sobre ella $\overline{A_1(A)_1} = \overline{A_1(A)_2} = \overline{OA_2}$.

Para abatir sobre V , se ha seguido el método general: Trazar desde A_2 la perpendicular y la paralela a v_α y tomar sobre ésta, $\overline{A_2S} = \overline{OA_1}$. El arco de centro N y radio \overline{NS} corta a A_2N , en los abatimientos $(A)_3$ y $(A)_4$ de A .

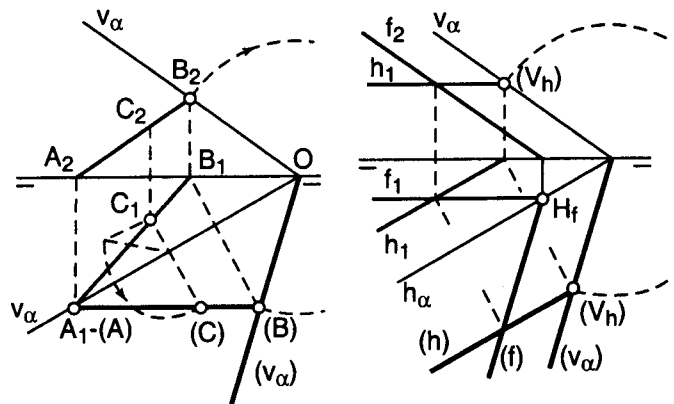
También podía haberse trazado el arco de centro K y radio $\overline{KA_1}$ y referir sus intersecciones D y C con LT , a A_2N , en $(A)_3$ y $(A)_4$. Los puntos D y C son los abatimientos de A_1 , alrededor de v_α .

2.º Abatimiento sobre planos paralelos a H o V (Fig. 8.4)

Para abatir el punto A de α sobre el plano horizontal β , se ha seguido el método general, tomando como charnela, la traza r_1-r_2 de α y β y como cota, su altura $\overline{KA_2}$ respecto a β .

8.4. Abatimiento de la recta

Para abatir la recta AB del plano α , sobre H (Fig.



(a) Recta cualquiera.

(b) Horizontal y frontal.

Fig. 8.5.—Abatimiento de rectas.

en vez de C , se abate la otra traza B (tomando $\overline{O(B)} = \overline{OB_2}$), se obtiene también el abatimiento $(v_\alpha) \equiv O(B)$ de v_α puesto que la distancia de B a O se conserva en el abatimiento y viene dada, en verdadera magnitud, en $\overline{OB_2}$, por pertenecer a v_α .

El abatimiento de la horizontal h (Fig. b) es la paralela (h) a h_α , trazada, por el abatimiento (V_h) de su traza y el de la frontal f es la paralela (f) a (v_α) que pasa por su traza H_f .

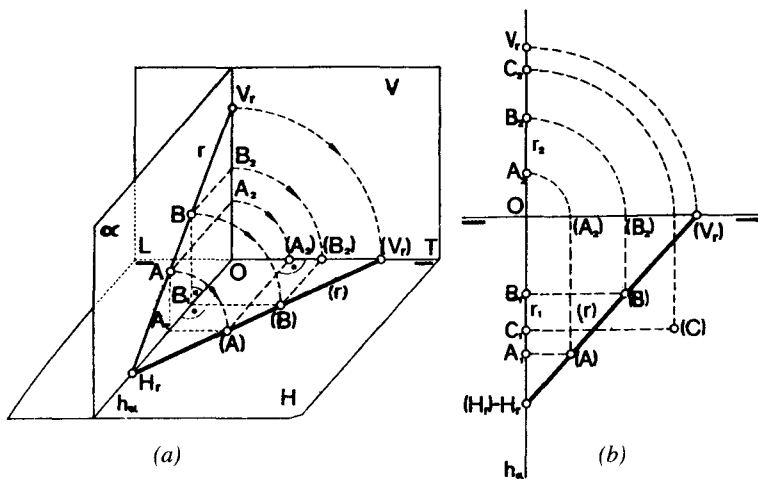


Fig. 8.6.—Abatimiento de una recta de perfil.

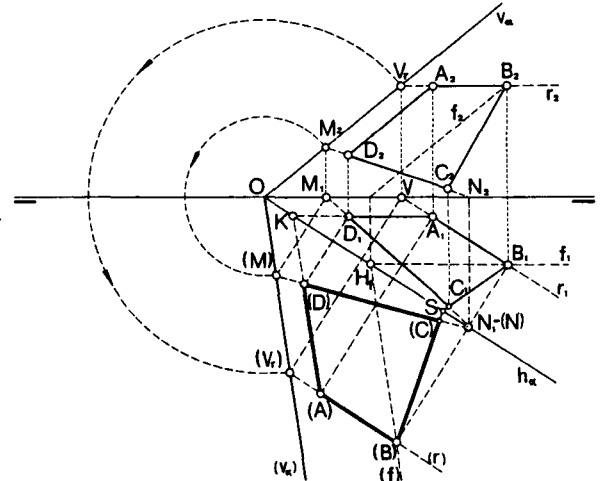


Fig. 8.7.—Abatimiento de una figura plana.

El abatimiento sobre H de una recta de perfil r , dada por dos puntos A y B (Fig. 8.6), se obtiene por abatimiento de éstos, trazando por A_1 y B_1 perpendiculares a $r_1 \equiv A_1B_1$ y tomando sobre ellas $\overline{A_1(A)}$ y $\overline{B_1(B)}$, iguales a las cotas $\overline{OA_2}$ y $\overline{OB_2}$ de A y B , siendo $(r) \equiv (A)(B)$ el abatimiento de r . También pueden abatirse A_2 y B_2 , en (A_2) y (B_2) que determinan (A) y (B) , por paralelas a r_1 .

Prolongando $(r) \equiv (A)(B)$, se obtienen los abatimientos de las trazas H_r y (V_r) (desabatida en V_r) que pertenecen a las trazas h_α y v_α del plano de perfil que contiene a r .

Para determinar (Fig. b) si un punto C_1-C_2 de α pertenece o no a r , basta abatirlo en (C) y comprobar si pertenece o no a (r) .

Para abatir sobre V , se procede de forma análoga.

8.5. Abatimiento de una figura plana

En la práctica, no interesa el abatimiento de un plano, como tal superficie plana, sino el de los elementos geométricos y figuras planas contenidas en él.

Para abatir el cuadrilátero $ABCD$ de plano α (Fig. 8.7), sobre H por ejemplo, se utilizan los métodos que siguen:

1º) *Por puntos o rectas aislados.* Consiste en abatir los vértices A, B, C y D , en $(A), (B), (C)$ y (D) , como ya se dijo (núm. 8,2), y unirlos ordenadamente, como se ve en la figura.

2º) *Por rectas y traza auxiliares.* Se hallan las trazas N y M del lado \overline{CD} , prolongado, y se abate M en (M) , que determina los abatimientos $(v_\alpha) \equiv O(M)$ y $(N)(M)$, de va y NM . Las normales a h_α trazadas por C_1 y D_1 , cortan a $(N)(M)$ en los abatimientos (C) y (D) de C y D .

Se hallan luego las trazas K y S de AD y BC que, unidas con (D) y (C) , determinan los abatimientos $K(D)$ y $S(C)$ de KD y SC . Refiriendo a ellos A_1 y B_1 , por normales a h_α , se obtienen (A) y (B) .

En la figura se ha supuesto que \overline{AB} es horizontal y \overline{AD} , frontal, lo cual facilita las construcciones. El abatimiento (B) , por ejemplo, también puede obtenerse, como intersección de los abatimientos (r) y (f) de la horizontal r y frontal f , trazadas por B .

3º) *Por afinidad.* Como ya se dijo (núm. 2,4-b), la proyección y el abatimiento de una forma de plano α , se corresponden en una afinidad ortogonal, definida por su eje h_α y un par de puntos homólogos D_1 y (D) ; M_1 y (M) ; ...: etc. En esta afinidad, las rectas homólogas C_1D_1 y $(C)(D)$; C_1B_1 y $(C)(B)$;... concurren en puntos de h_α y las rectas de unión de puntos homólogos A_1 y (A) ; M_1 y (M) ; ... son normales a h_α .

Basta pues abatir la traza M de NM , en (M) , y trazar la homóloga $(M)(N)$ de M_1N_1 y las normales a h_α por D_1 y C_1 , que cortan a $(M)(N)$, en (D) y (C) . Análogamente, las homólogas $K(D)$ y $S(C)$ de KD_1 y SC_1 cortan a las normales a h_α trazadas por A_1 y B_1 , en (A) y (B) . (Ver núms. 5,1 a 5,17 de n/E. de G.D.).

8.6. Problema inverso

Si se conoce el abatimiento $(A)(B)(C)(D)$ de un cuadrilátero de plano α (Fig. 8.7), se pueden hallar fácilmente sus proyecciones, por afinidad, abatiendo v_α en (v_α) y prolongando los lados hasta cortar a h_α y (v_α) , en $K, S, (M)$ y (V_r) . Al desabatir, se obtiene N_1M_1 , homóloga de $N_1(M)$ y sus intersecciones D_1 y C_1 con las normales a h_α trazadas por (D) y (C) . Los restantes vértices y lados se obtienen de forma análoga.

9. ÁNGULOS

9.1. Generalidades y definiciones

Recordemos brevemente las definiciones y propiedades geométricas relativas a los ángulos de rectas y planos.

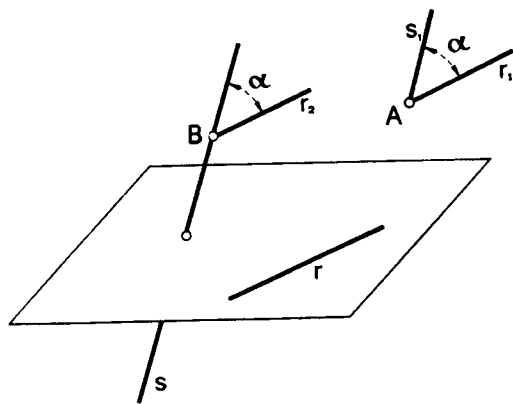


Fig. 9.1.—Ángulo de rectas que se cruzan.

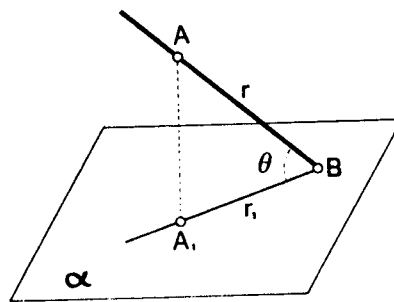


Fig. 9.2.—Ángulo de recta y plano.

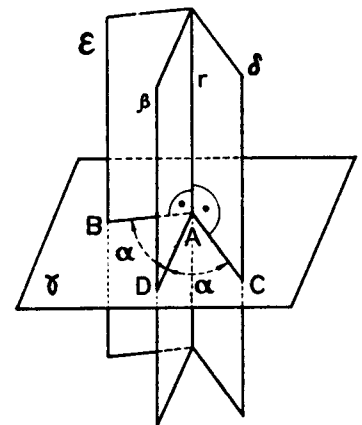


Fig. 9.3.—Ángulo de dos planos.

Para medir este ángulo, suele tomarse el más pequeño α de los dos que forman las rectas; es decir, el agudo. Si $\alpha = 90^\circ$, se dice que las rectas *se cruzan ortogonalmente*.

De lo expuesto se deduce que si r forma con s un ángulo α , formará el mismo ángulo con todas las paralelas a s .

b) *Ángulo de recta r y plano α* (Fig. 9.2). Es el ángulo agudo que r forma con su proyección ortogonal r_1 sobre α .

Según esto, las paralelas a r forman ángulos iguales con α y con todos los paralelos a α .

a) *Ángulo de dos rectas r y s que se cruzan* (Fig. 9.1) es el formado por las paralelas r_1 y s_1 a ellas, trazadas por un punto A del espacio, o *el formado por s , por ejemplo, y la paralela r_2 a r , trazada por un punto B de s* .

El ángulo θ también puede hallarse como complementario del que forma r con la perpendicular AA_1 , a α , trazada desde un punto A de r .

c) *Ángulo de dos planos* (Fig. 9.3). La figura formada por dos planos ϵ y δ que se cortan se llama *ángulo diedro*; los planos ϵ y δ , *caras* y su intersección r , *arista del diedro*.

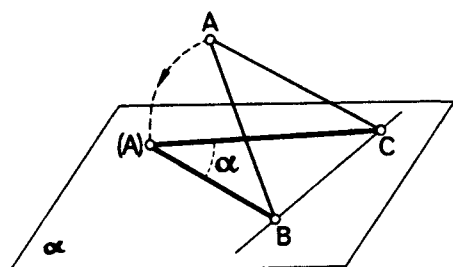
Todo plano γ perpendicular a la arista r del diedro corta a éste, según las perpendiculares AB y AC a r . El ángulo BAC se llama *rectilíneo del diedro*.

La medida de un ángulo diedro es la de su rectilíneo correspondiente.

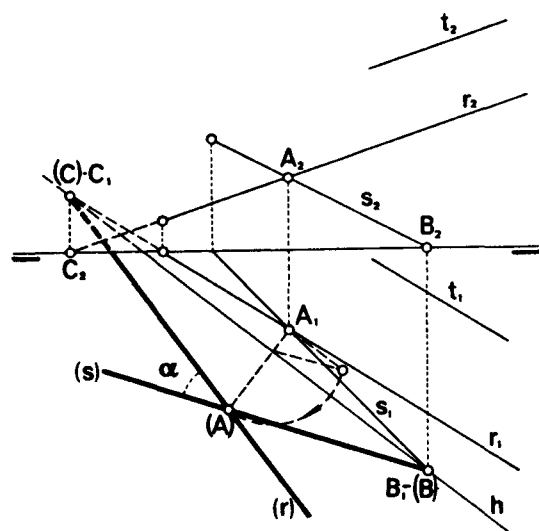
Plano bisector β de un diedro es el que pasa por su arista r y lo divide en dos diedros iguales. Queda definido por r y la bisectriz AD de uno de los rectilíneos del diedro.

9.2. Ángulo de dos rectas (Fig. 9.4)

Si las rectas se cortan en un punto A (Fig. a), el ángulo α que forman se halla, abatiendo A sobre cual-



a) Por abatimiento.



b) Trazado en diédrica.

Fig. 9.4.—Ángulo de rectas que se cortan.

quier plano α , siendo $B(A)C = a$ y B y C , las trazas de las rectas con α .

Así se ha hecho con las rectas r_1-r_2 y s_1-s_2 que se cortan en A_1-A_2 (Fig. b). Las trazas C_1-C_2 y B_1-B_2 de r y s determinan la traza $h \equiv BC$ del plano $[r, s]$ que podemos abatir sobre el horizontal y con él, el vértice

A , en (A) , siendo $(r) \equiv (A)C_1$ y $(s) \equiv (A)B_1$ los abatimientos de r y s que forman el ángulo α , en verdadera magnitud.

9.3. Ángulo de recta y plano

Es el $\gamma \equiv ABC$ (Fig. 9.5) que forma la recta dada r_1-r_2 con su proyección ortogonal BC sobre el plano α , siendo B_1-B_2 la traza de r con α , y C_1-C_2 , la traza de a con la normal t_1-t_2 a él, trazada por un punto A de r . (Ver Fig. 9.2). Las trazas B y C de α con r y t se han hallado, valiéndonos de los planos proyectantes horizontales de r y t .

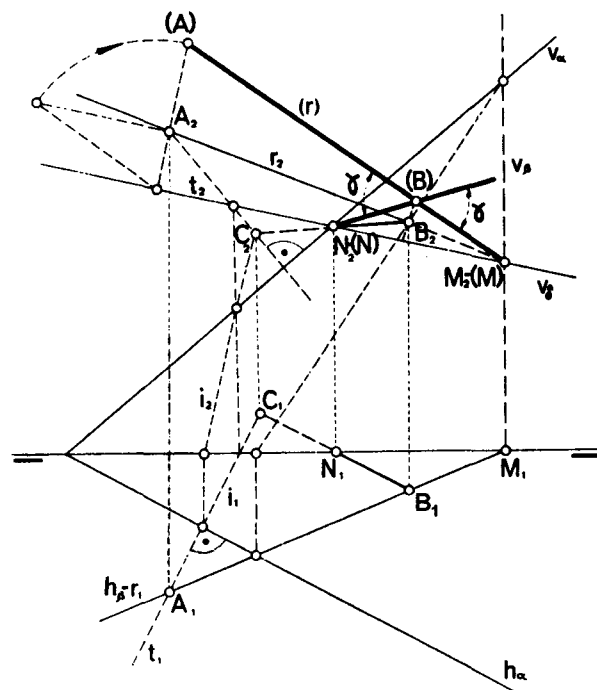
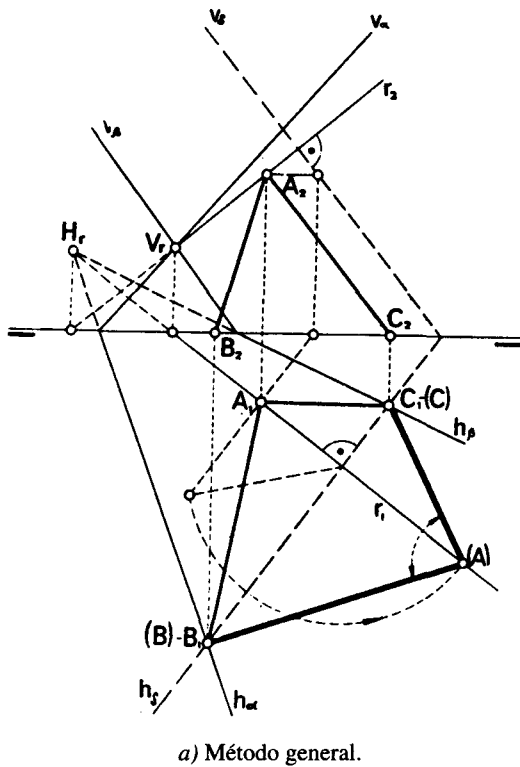


Fig. 9.5.—Ángulo de recta y plano.

Se hallan, luego, las trazas verticales M y N de r y BC (las horizontales se salen del dibujo) y se abate el plano $\delta \equiv [A, B, C]$ sobre el vertical, alrededor de su traza $v_\delta \equiv NM$. El abatimiento (A) de A (no se ha abatido el vértice B para más claridad de la figura) determina el $(r) \equiv (A)(M)$ de r que corta a la perpendicular $B_2(B)$ a v_δ , en (B) , siendo $(B)(N)$ el abatimiento de BN y $\gamma \equiv (A)(B)(N)$ el del ángulo buscado.

Más fácil es hallar γ , como complementario del $\gamma' \equiv \widehat{rt}$ (núm. 9,1-b).



por un plano δ , perpendicular a r , trazado por un punto A de r , valiéndolos de la horizontal de δ que pasa por A . Las intersecciones $AB \equiv [\delta, \alpha]$ y $AC \equiv [\delta, \beta]$ son los lados del rectilíneo BAC buscado, abatido sobre el horizontal en $(B)(A)(C)$, siendo (A) el abatimiento de A .

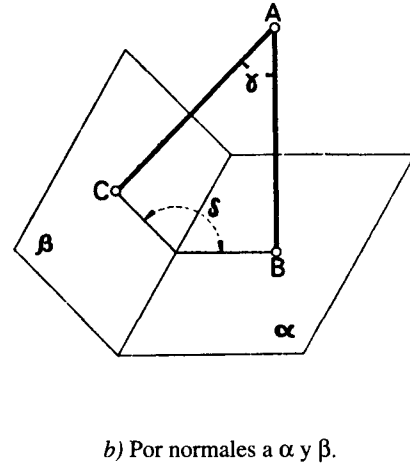


Fig. 9.6.—Ángulo de dos planos.

9.4. Ángulo de dos planos

Se determina (Fig. 9.6), hallando la intersección $r \equiv H_r V_r$ de los planos dados α y β y luego, cortándolos

El ángulo δ del rectilíneo (Fig. b) también puede hallarse como complementario del ángulo γ formado por las perpendiculares a α y β , trazadas por un punto A del espacio.

CASOS PARTICULARES

9.5. Ángulo de una recta con los planos de proyección

El ángulo γ que la recta dada r_1-r_2 forma con H

(Fig. 9.7-a) se obtiene, abatiendo el plano proyectante horizontal α de r y, con él, la traza V_r (o un punto cualquiera de r), en (V_r) . El ángulo pedido es el $\gamma \equiv (\widehat{r})r_1$.

El ángulo δ que r forma con V se halla, abatiendo el plano proyectante vertical β de r y con él, r en $(r)_1$, por medio del abatimiento (H_r) de H_r , siendo $\delta = (r)_1 r_2$. También puede girarse r , alrededor de un eje verti

cal o de punta, trazado por un punto de r , hasta dejarla frontal u horizontal. En la figura b, se ha girado r alrededor del eje vertical e_1-e_2 , hasta su posición frontal $r'_1-r'_2$, siendo γ el ángulo que forma r'_2 con LT .

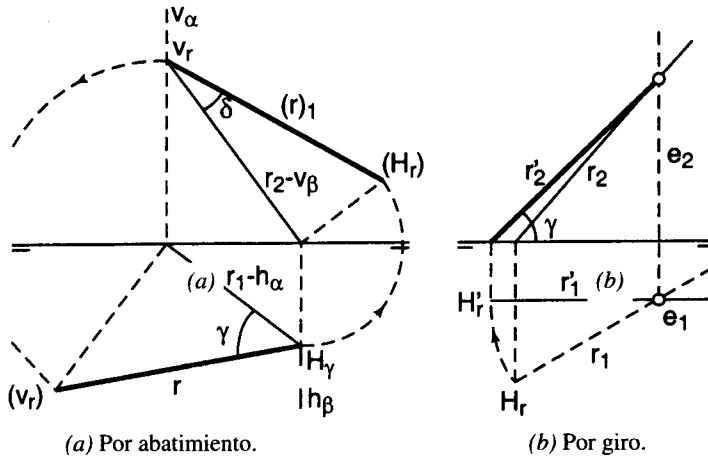


Fig. 9.7.—Ángulos de r con H y V .

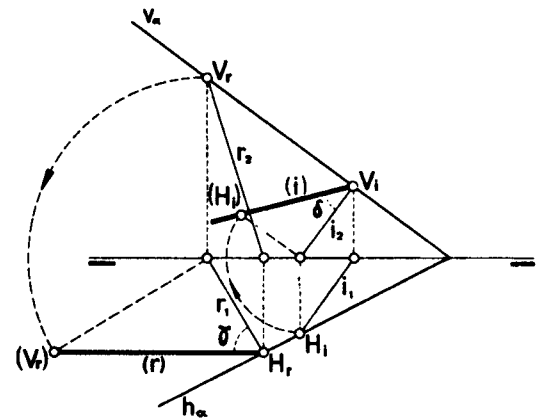


Fig. 9.8.—Ángulo de un plano con H .

9.6. Ángulo de un plano con los de proyección

El ángulo del plano α con H (Fig. 9.8) es el γ formado por su recta de máxima pendiente r con H , siendo r y r_1 los lados del rectilíneo del diedro $[\alpha, H]$.

Análogamente, el ángulo δ de α con V , es el formado por su recta de máxima inclinación i_1-i_2 con V . En la figura, γ y δ se han hallado por abatimiento de r e i , como en el caso anterior, siendo $\gamma = (r)r_1$ y $\delta = (i)i_2$. (Ver núms. 5,1 a 5,17 de n/E. de G.D.).

B. CURVAS Y SUPERFICIES

10. CURVAS

10.1. Curvas planas, Generalidades y definiciones

a) La línea es la trayectoria de un punto que se mueve o el lugar geométrico de las posiciones sucesivas de un punto móvil. Si la dirección del punto móvil es o no constante, la línea es *recta o curva* y si todos sus puntos están o no en un plano, *plana o alabeada*, respectivamente. Si la ley del movimiento es continua y determinada, la línea se llama *geométrica* y si es arbitraria o indeterminada, *gráfica*.

Dos puntos A y B de la curva, infinitamente próximos (Fig. 10.1), determinan un segmento \overline{AB} (cuerda) llamado *elemento rectilíneo* o simplemente *elemento* de la curva.

La curva ϵ también puede definirse como *el límite al que tienden las poligonales $ABCD\dots$ y $A'B'C'D'\dots$, de lados infinitamente pequeños, inscrita y circunscrita a ϵ* . La prolongación de un elemento \overline{AB} se convierte en la tangente t a ϵ , cuando A y B tienden a confundirse en un solo punto.

b) *Tangente y normal. Tangente a una curva γ en un punto T (Fig. 10.2) es la posición límite de una secante TA que gira alrededor de T , hasta que el segundo punto de corte A se confunda con T . Si T es impropio, se llama *asíntota*.*

Esta es la *tangente ordinaria, principal* o de *primera especie*. La *tangente de segunda especie*, en T (Fig. 10.3) es la posición límite t' de una secante s que se mueve de cualquier forma (en este caso, paralelamente a sí misma), aproximando entre sí sus dos puntos de

contacto A y M ; B y N ; C y P ; ... con la curva, hasta que ambos se confundan en T . La recta t' se considera como tangente, por no tener más que un solo punto común con γ , pudiéndose así obtener cuantas tangentes se deseen.

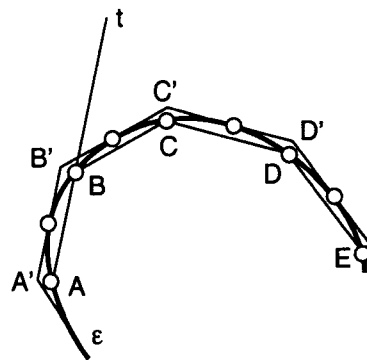


Fig. 10.1.—La curva como límite de poligonales, de lados infinitamente pequeños, inscrita y circunscrita a ella.

En general, por un punto de una curva se puede trazar una tangente ordinaria y ninguna, o infinitas de segunda especie.

Normal a una curva γ , en un punto P (Fig. 10.4) es la perpendicular n a la tangente t a γ , en P .

c) *Puntos ordinarios y singulares.* Un punto de una curva es *ordinario* o *singular*, según que las tangentes de segunda especie en dicho punto se confundan o no con la principal.

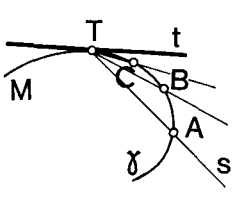


Fig. 10.2.—Tangente como límite de secantes.

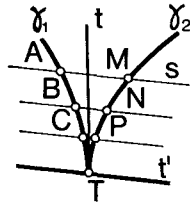


Fig. 10.3.—Tangente de primera y segunda especie.

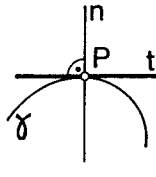


Fig. 10.4.—Normal a una curva.

Según esto, el punto de inflexión B es ordinario como el A (Fig. 10.5) y ambos se diferencian en que la tangente t_A , en A , tiene dos puntos infinitamente próximos, comunes con la curva, y la t_B tiene tres puntos (el B y el anterior y posterior a él) o dos elementos contiguos.

Los puntos singulares se han dibujado en la figura 10.6. Otros puntos notables de una curva son:

- El punto *doble*, *triple* o *múltiple* por el que el punto generador pasa dos, tres o varias veces.

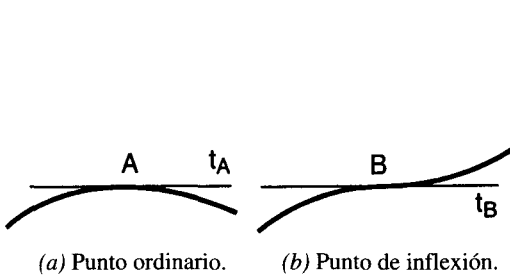


Fig. 10.5.—Puntos ordinarios

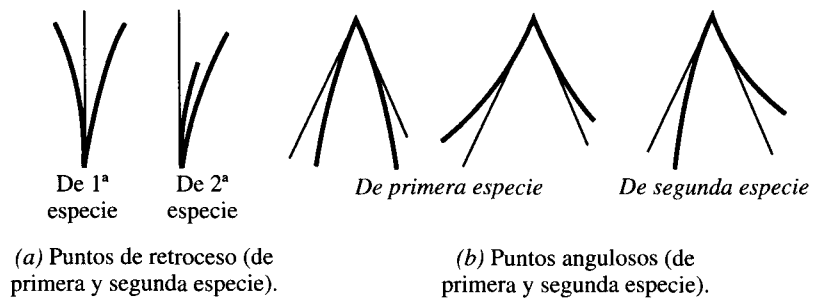


Fig. 10.6.—Puntos singulares

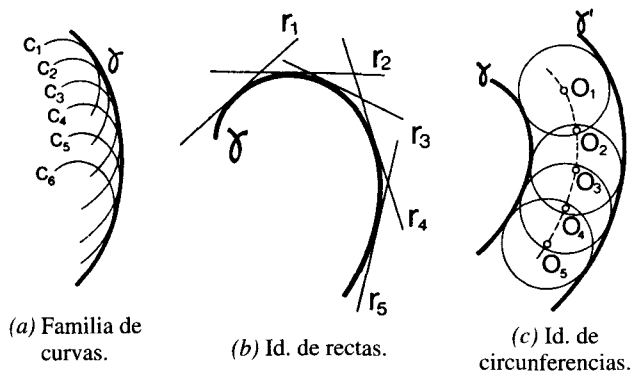


Fig. 10.7.—Envoltente e involutas.

- El más algo o bajo; más a la derecha o a la izquierda.
- El de máxima o mínima curvatura (vértices)
- Los situados en el contorno aparente, etc.

d) Orden y clase. Convexidad y concavidad.

Orden de una curva plana es el número máximo de puntos en que puede ser cortada por cualquier recta. Clase es el número máximo de tangentes que pueden trazarse a la curva desde cualquier punto exterior.

Una curva es convexa si la tangente en cualquier punto de ella la deja toda al mismo lado de la tangente, y cóncava, en caso contrario. La circunferencia y la elipse, por ejemplo, son curvas convexas, de segundo orden y segunda clase.

e) Contactos de líneas tangentes. Dos líneas tangentes tienen un contacto de primero, segundo, ..., o enésimo orden, si tienen uno, dos, ..., o n elementos comunes (o 2, 3, ..., o $n + 1$ puntos) confundidos con el de contacto. Estos contactos se determinan por cálculo diferencial, por tratarse de magnitudes infinitamente pequeñas. Según esto:

La tangente ordinaria a una curva tiene con ésta un contacto de primer orden.

Dos curvas son tangentes en un punto T , si pasan por T y admiten la misma tangente, en T .

f) Envoltentes e involutas (Fig. 10.7). Al conjunto de las posiciones c_1, c_2, c_3, \dots de una curva (indeformable o no) que se mueve en un plano, con arreglo a cualquier ley, se le llama familia (Fig. a); a la curva, tangente a todas ellas, *envoltente* y a las curvas c_1, c_2, c_3, \dots , *involutas*.

Ejemplos:

- Toda curva γ (Fig. b) es la envoltente de sus tangentes.
- La envoltente de una familia de circunferencias iguales (Fig. c) son dos curvas γ y γ' "paralelas" (núms. 9,8-3° y 15,4-b de n/G.D.S. y A.) a la trayectoria O_1, O_2 de su centro. Si ésta es recta o circular, γ y γ' también lo son.
- En acotado, las curvas de nivel de taludes son envoltentes de las trazas de igual cota de los conos de talud (núm. 25,6).

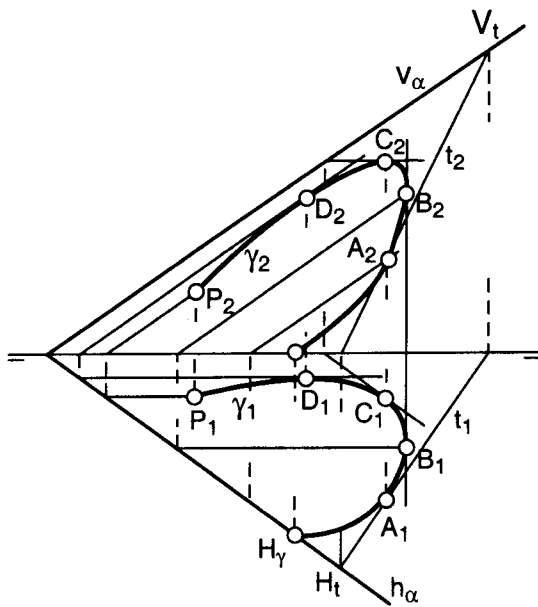


Fig. 10.8.—Representación de una curva plana.

10.2. Representación de curvas planas

Una curva γ (Fig. 10.8) se determina por su proyección horizontal (o vertical) γ_1 y las trazas h_α - v_α del plano que la contiene. La proyección vertical P_2 de un punto P_1 de γ_1 se halla por medio de la frontal de α , trazada por P_1 .

La tangente t a γ , en A , por ejemplo, está en α y se halla, trazando la tangente t_1 a g_1 , cuyas trazas H_t y V_t determinan la proyección t_2 , tangente a γ_2 , en A_2 .

Para dibujar γ_2 , nos hemos auxiliado de la traza H_γ de γ , del punto B de tangente vertical, situado más a la derecha; del C , de tangente horizontal (punto más alto), y del D , de tangente frontal (punto de menor alejamiento).

Las curvas más conocidas (cónicas, curvas de rodadura, etc.) se exponen en los capítulos 10 y 11 de n/G.D.S. y A. Nosotros nos limitaremos a las cónicas y, dentro de éstas, a la circunferencia y elipse que son las de mayor aplicación.

ELIPSE Y CIRCUNFERENCIA

10.3. Elipse. Diámetros conjugados

a) La elipse (Fig. 10.9) es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos fijos F y F' es constante e igual a la longitud $\overline{AB} = 2a$ del eje mayor. Es una curva cerrada y plana, de ejes \overline{AB} y \overline{CD} , perpendiculares entre sí, que se cortan en su punto medio O (centro de la elipse). La longitud \overline{CD} del eje menor se representa por $2b$ y la $\overline{FF'}$ (distancia focal), por $2c$. Por ser C un punto de la elipse, se verifica:

$$\overline{CF} + \overline{C'F'} = 2a, \text{ pero } \overline{CF} = \overline{CF'}, \text{ luego: } \overline{CF} = \overline{CF'} = a$$

Esto sirve para hallar los focos, trazando el arco de centro C y radio $\overline{CF} = a$ que corta a \overline{AB} , en F y F' . Se forma así un triángulo rectángulo OCF' de catetos b y c e hipotenusa a que permite hallar uno de los lados, conociendo los otros dos.

b) *Diámetros conjugados* (Fig. 10.10). Diámetro de una elipse es toda cuerda que pasa por su centro.

Dos diámetros son conjugados, si cada uno pasa

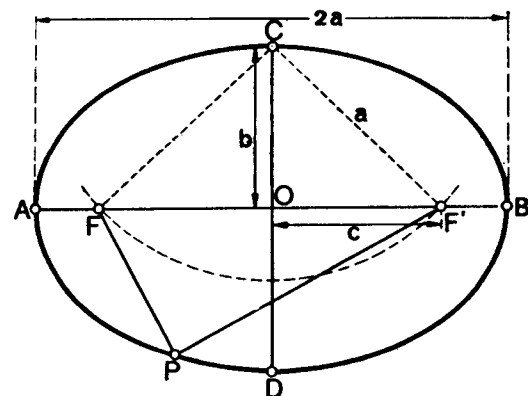


Fig. 10.9.—La elipse como lugar geométrico.

por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro. Esto permite hallar el diámetro conjugado de uno dado \overline{IG} , como recta que une los puntos medios M y N de dos cuerdas arbitrarias \overline{RS} y \overline{PQ} , paralelas a \overline{IG} . Como comprobación, \overline{MN} ha de pasar por O .

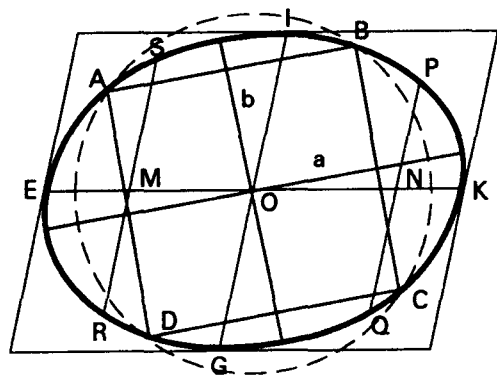


Fig. 10.10. - Diámetros conjugados.

En el límite, las cuerdas paralelas a \overline{IG} , en los extremos E y K de MN , son tangentes a la elipse en dichos puntos, e inversamente, las tangentes en los extremos de \overline{IG} son paralelas a su conjugado \overline{EK} . Por tanto:

Las tangentes en los extremos de dos diámetros conjugados forman un paralelogramo circunscrito a la elipse (paralelogramo de tangentes). La recíproca no es cierta, es decir, los diámetros paralelos a los lados de un paralelogramo circunscrito, pueden no ser conjugados.

Los ejes son los únicos diámetros conjugados perpendiculares entre sí. Se obtienen fácilmente, trazando una circunferencia arbitraria, de centro O , que

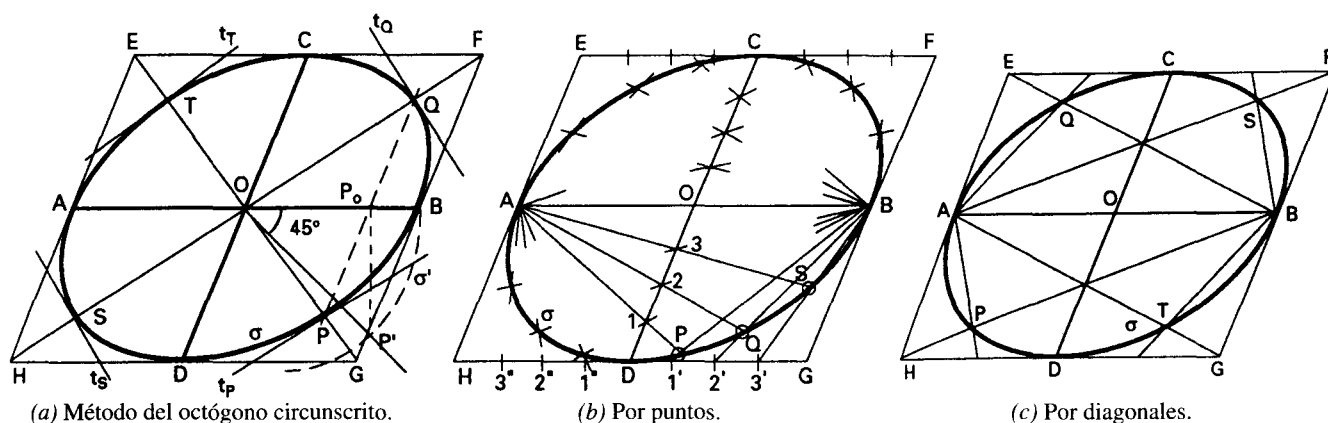


Fig. 10.11. - Trazado de la elipse dada por dos diámetros conjugados.

corte la elipse en cuatro puntos A , B , C y D . Las mediatrices de los lados del rectángulo $ABCD$ son los ejes buscados.

c) De lo expuesto se deduce que la proyección ortogonal u oblicua de dos diámetros de una circunferencia, perpendiculares entre sí, son diámetros conjugados de la elipse proyección.

10.4. Trazado de la elipse, dada por dos diámetros conjugados \overline{AB} y \overline{CD}

1.º Método del octógono circunscrito (Fig. 10.11-a). Se basa en la afinidad que existe entre la elipse σ y la circunferencia σ' , de diámetro \overline{AB} (núm. 1,2 de n/E. de G.D.). Consiste en trazar el paralelogramo de tangentes, paralelas a AB y CD ; las diagonales EG y FH y el radio $\overline{OP'}$ de σ' , inclinado 45° respecto a \overline{AB} y proyectar ortogonalmente su extremo P' sobre \overline{AB} , en P_o . La paralela a \overline{CD} , trazada por P_o , corta a las diagonales en P y Q . Estos puntos y sus simétricos T y S , respecto a O , pertenecen a σ . Las tangentes t_p , t_q , t_s y t_r a σ , en dichos puntos, son paralelas a las diagonales

y determinan el octógono circunscrito que permite dibujar la elipse.

2.º Por puntos (Fig. b). Se basa en la determinación de cónicas por haces proyectivos (núm. 1,2-3º de n/E. de G.D.). Consiste en dividir los lados \overline{DO} y \overline{DG} del paralelogramo $DOBG$, en cuatro partes iguales, por ejemplo; numerar los puntos de división a partir de D y unirlos con A y B , respectivamente. Las intersecciones de los rayos homólogos $A1$ y $B1'$; $A2$ y $B2'$; $A3$ y $B3'$, son puntos P , Q y S de la elipse. Repitiendo lo dicho con los tres paralelogramos restantes, se obtienen tres nuevos puntos en cada uno, como se ve en la figura.

3.º Por diagonales. El método anterior se simplifica, observando que el rayo $A2$ (Fig. b) es la diagonal del paralelogramo $ABGH$, y el $B2'$ pasa por el punto medio de DG . De aquí, la construcción (Fig. c):

Trazar las diagonales de los paralelogramos $ABGH$ y $ABFE$ y sus rayos homólogos que unen A y B con los puntos medios de los semilados \overline{HD} , \overline{DG} , \overline{FC} y \overline{CE} y cortan a aquellas en los puntos P , T , S , y Q de σ . Para hallar más puntos, se repite la construcción con los paralelogramos $CDGF$ y $CDHE$.

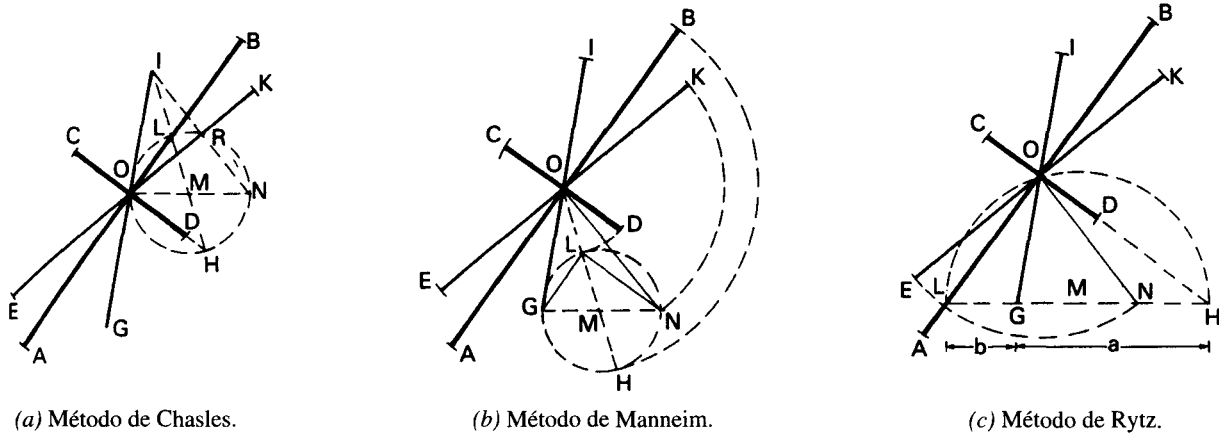


Fig. 10.14.—Ejes de la elipse dada por dos diámetros conjugados.

ferencia en L y H , siendo OL y OH los semiejes de longitudes $\overline{OB} = \overline{IH} = a$ y $\overline{OD} = \overline{IL} = b$. El segmento \overline{IH} es, como se ve, el borde de la regla trazadora del compás elíptico (núm. 10,5-3°).

2.º Método de Manheim (Fig. b). El semidiámetro OK , por ejemplo, se gira 90° alrededor de O , hasta la posición ON , normal a EK . El extremo N se une al extremo G del otro diámetro más próximo a él y se traza la circunferencia de centro M y diámetro \overline{NG} , y la secante OM que corta a ésta, en L y H . Los semiejes \overline{OB} y \overline{OD} son paralelos a \overline{LG} y \overline{LN} y de longitud $\overline{OB} = \overline{OH} = a$ y $\overline{OD} = \overline{OL} = b$.

3.º Método de Rytz (Fig. c). El semidiámetro OE , por ejemplo, se gira 90° alrededor de O , hasta la posición ON . Se traza la recta \overline{GN} y con centro en M (punto medio de \overline{GN}) y radio \overline{MO} se traza una semicircunferencia que corta a \overline{GN} en L y H , siendo $\overline{GH} = a$ y $\overline{GL} = b$.

Los semiejes \overline{OB} y \overline{OC} son las rectas \overline{OL} y \overline{OH} , de longitud $\overline{OB} = \overline{GH} = a$ y $\overline{OC} = \overline{GL} = b$.

En el núm. 1,3 de n/E. de G.D. se indican otros métodos para hallar los ejes.

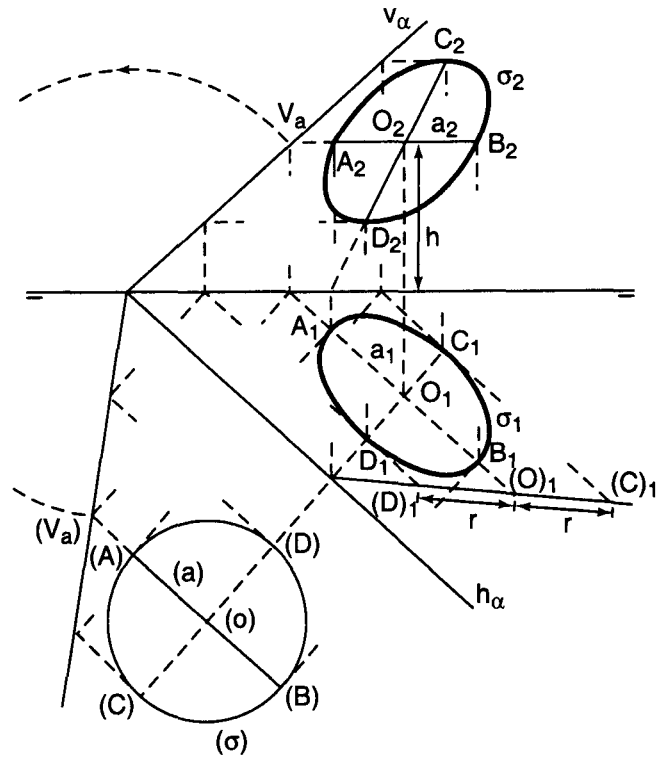


Fig. 10.15.—Representación de la circunferencia.

10.7. Proyecciones de la circunferencia

Las proyecciones horizontal y vertical (Fig. 10.15) de una circunferencia σ , de centro O_1-O_2 , radio r y plano α y la de sus diámetros \overline{AB} y \overline{CD} (paralelo y perpendicular a h_α) son: la elipse σ_1 , de ejes $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ y la σ_2 , de diámetros conjugados $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$ (núm. 10,3-c). De aquí, la construcción:

Abatir O sobre el horizontal, en (O) (por medio de la horizontal a_1-a_2); trazar la circunferencia abatida (σ) de radio r y los diámetros $\overline{(A)(B)}$ y $\overline{(C)(D)}$ (paralelo y normal a h_α). Al desabatir éstos (por medio de hori-

zontales) se obtienen los ejes $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ de σ_1 y dos diámetros conjugados $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$ de σ_2 , que permiten dibujarlas (núms. 10,4 y 10,5).

Los ejes pueden hallarse directamente, sin abatir α , puesto que \overline{AB} es horizontal y se proyecta en verdadera magnitud en $\overline{A_1B_1}$, y \overline{DC} es la recta de máxima pendiente de α , cuya proyección se obtiene, abatido el plano proyectante de \overline{CD} sobre el horizontal, tomando $\overline{O_1(O)}$, igual a la cota h de O y $\overline{(O)_1(C)_1} = \overline{(O)_1(D)_1} = r$. Análogamente se procedería con σ_2 , abatido la recta de máxima inclinación de α , trazada por O .

CURVAS ALABEADAS

10.8. Generalidades y definiciones

a) Como ya dijimos (núm. 10,1-a), *curva alabeada es la que no está contenida en un plano, es decir, que cuatro puntos sucesivos (tres elementos) no son coplanarios.*

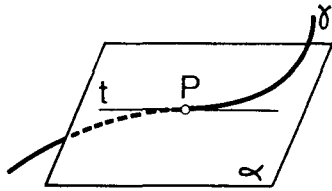


Fig. 10.16.—Tangente y plano tangente.

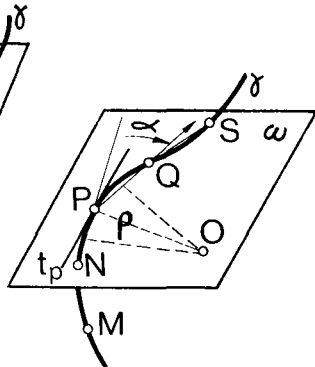


Fig. 10.17.—Plano osculador.

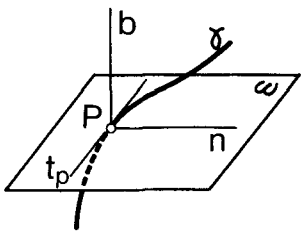


Fig. 10.18.—Normal principal y binormal.

c) El plano tangente ω que contiene a tres puntos (o dos elementos) consecutivos N , P , y Q de la curva (Fig. 10.17), se llama *plano osculador de γ en P* , y puede definirse como la posición límite del plano determinado por tres puntos sucesivos N , P , y Q de ella, cuando N y Q tienden a confundirse con P . El plano osculador, en un punto ordinario P de γ , es el único plano tangente que corta a la curva, en P . Los restantes planos tangentes dejan a la curva, en el entorno de P , al mismo lado del plano.

d) *Normal a una curva alabeada γ , en P* (Fig. 10.18) es la perpendicular, trazada por P , a la tangente t_p a γ , en P . Existen infinitas normales a γ , en P , que están contenidas en el *plano normal* a γ , en P . La normal n contenida en el plano osculador ω es la *normal principal*, y la normal b a ω , la *binormal*.

10.9. Proyecciones de curvas alabeadas

a) Como ya se dijo en el núm. 1,5, la *proyección de una curva alabeada γ* (Fig. 10.19), desde un punto V ,

b) La tangente t a una curva alabeada γ (Fig. 10.16), en un punto P de ella, se define lo mismo que la de una curva plana (núm. 10,1-b).

Todo plano α que pase por t es tangente a γ , en P , y se llama *plano tangente*. Por tanto, por cada punto P de γ se puede trazar una tangente e infinitos planos tangentes.

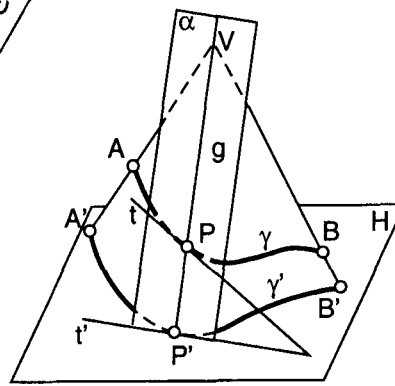


Fig. 10.19.—Proyección de una curva.

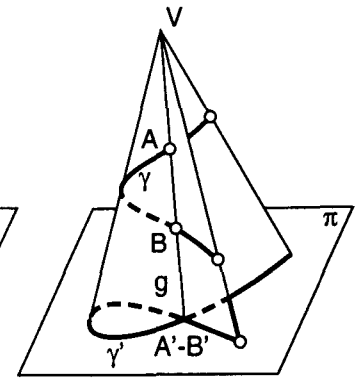


Fig. 10.20.—Punto doble correspondiente a puntos ordinarios.

sobre un plano π no incidente con V , es la sección γ' de π con el cono proyectante de V .

Así mismo, la *proyección de la tangente t a γ , en P* , es la tangente t' a γ' , en la proyección P' de P (núm. 1,5-d).

b) *Puntos singulares*. En general, las *proyecciones de puntos singulares de una curva γ son puntos singulares de la curva proyección γ'* . Se exceptúan los de máxima o mínima curvatura, por no ser la perpendicularidad un invariante proyectivo.

La recíproca no es cierta, es decir, γ' puede presentar puntos singulares correspondientes a puntos ordinarios de γ . Tal sucede (Fig. 10.20) con el punto doble $A' \equiv B'$ (por cortar γ dos veces a la generatriz g) y con los casos siguientes (Fig. 10.21):

Si el plano osculador ω de γ , en P , pasa por V , la proyección P' de P es, en general, un punto de inflexión (Fig. a), de retroceso (Fig. b) u ordinario (Fig. c), según que V sea exterior a t , incidente con ella o con su punto de contacto P .

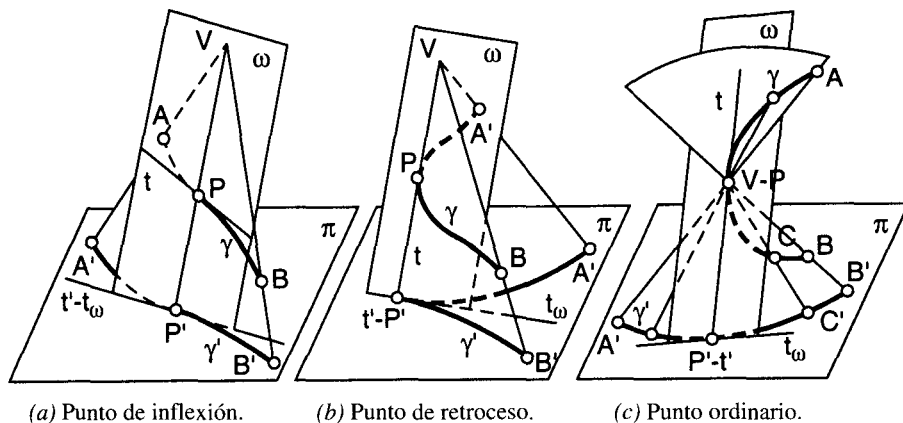


Fig. 10.21.—Proyección de puntos ordinarios.

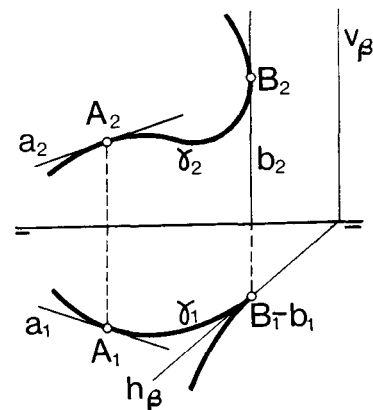


Fig. 10.22.—Representación de curva alabeada.

En efecto, por ser ω proyectante y contener a t , ésta se proyectará en su traza t_ω y por ser secante a γ (núm. 10,18-c), las dos ramas PA y PB se proyectarán a distinto lado de t_ω excepto en la figura c que pertenecen a distintas hojas del cono proyectante.

Como se ve en la figura c, el proyectar γ desde un punto P de ella, la proyección de P es la traza P' de la tangente t a γ , en P .

10.10. Representación

Una curva alabeada γ (Fig. 10.22) se representa por sus proyecciones γ_1 y γ_2 , sobre H y V y queda definida como intersección de los cilindros proyectantes de trazas γ_1 y γ_2 .

Si un punto A pertenece a γ , A_1 y A_2 han de estar en γ_1 y γ_2 , respectivamente. La tangente en A se proyecta, en general, según las tangentes a_1 y a_2 a γ_1 y γ_2 , en A_1 y A_2 , respectivamente.

Si la tangente b_1-b_2 , por ejemplo, es normal a H , la proyección $B_1 \equiv b_1$ del punto de contacto es, en este caso, un punto de retroceso de γ_1 y la tangente en B_1 es la traza h_β del plano osculador β de γ , en B (núm. 10,11).

10.11 Hélice cilíndrica (Fig. 10.23)

Es la curva γ engendrada por un punto A que se desliza, con velocidad uniforme, sobre una recta AG , al mismo tiempo que ésta gira, con velocidad uniforme, alrededor de un eje e , paralelo a ella. El cilindro de revolución de eje e y radio r , engendrado por AG , es el cilindro, eje y radio de la hélice.

En un giro de 360° , el punto describe el arco ADG (espira) y recorre la longitud $P = \overline{AG}$ (paso de la hélice

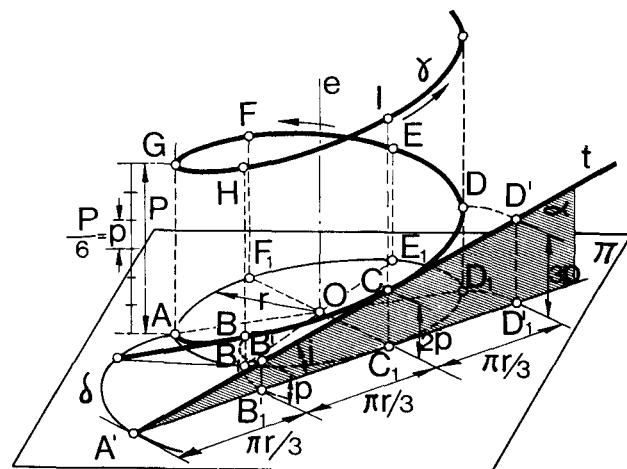


Fig. 10.23.—Propiedades de la hélice.

o *paso de rosca*). La hélice dibujada se llama *a derechas* o *de paso a la derecha* y si gira en sentido contrario, *a izquierda* o *de paso a la izquierda*. Sus propiedades más importantes son:

1ª) Las ordenadas (alturas) $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$, ... de los puntos de γ son proporcionales a sus abscisas curvilíneas AB , AC , ... y a los ángulos girados.

A un arco de longitud r (radián) le corresponde un punto de altura P , llamada *paso reducido* o *parámetro del movimiento helicoidal*. Su valor se deduce de la proporcionalidad: $P/r = P/2\pi r$, de donde $P_r = P/2\pi$.

2ª) El desarrollo de γ sobre un plano α tangente al cilindro, en un punto C de ella, es la tangente t a γ , en C . La hélice es, por tanto, la línea más corta (*línea geodésica*) que une dos puntos de una superficie cilíndrica, no situados en una misma generatriz ni en un plano normal al eje.

3ª) La hélice es una curva de inclinación constante *i* respecto a las generatrices del cilindro, y lo mismo sucede con sus tangentes (elementos rectilíneos) y sus

planos osculadores, definidos por dos elementos sucesivos.

4ª) La longitud $A'C_1$ de la subtangente de un punto C es igual a la de su abscisa curvilínea AC_1 .

En el movimiento helicoidal, los puntos de la hélice describen la misma hélice a la que pertenecen, es decir, la hélice se mueve helicoidalmente coincidiendo consigo misma, como sucede en el roscado del tornillo en su tuerca.

10.12. Representación (Fig. 10.24)

La hélice γ , a derechas, de eje vertical OV , radio r y paso P , se proyecta horizontalmente, según la circunferencia γ_1 , de centro O_1 y radio r , y verticalmente, según la senoide γ_2 , de eje O_2V_2 , periodo P y amplitud r .

Para dibujarla, se ha dividido γ_1 y el paso P en doce partes iguales, a partir del punto A_1-A_2 y sobre las verticales de los puntos de división, se han llevado cotas sucesivas $p, 2p, 3p, \dots$ (siendo $p = P/12$), obteniéndose la espira ACE , los puntos de inflexión B_2 y D_2 , y los A_2 y C_2 de máxima amplitud r de la senoide.

La tangente t a γ , en B , se proyecta según las tangentes t_1 y t_2 a γ_1 y γ_2 , en B_1 y B_2 y se obtiene (núm. 10,11-4º), tomando sobre t_1 , la longitud $\overline{B_1H_1}$ del cuadrante rectificado o la semisuma de los lados del triángulo y del cuadrado inscritos en γ_1 , de longitud:

$$r\sqrt{3} + r\sqrt{2} = (1,73+1,41)r = 3,14r \approx \pi r.$$

con un error menor que una centésima de radio (núm. 11,7 de n/G.D.S. y A.).

La paralela AV a t corta al eje en el vértice V de un cono de base γ_1 y altura $\overline{V_2O_2} = P_r$ (paso reducido) llamado *cono director* de γ , por ser la generatriz VA de igual inclinación $i = \overline{V_2O_2}/\overline{A_2O_2} = P/r$ que las tangentes de γ . Según ésto, para hallar la inclinación de la tan-

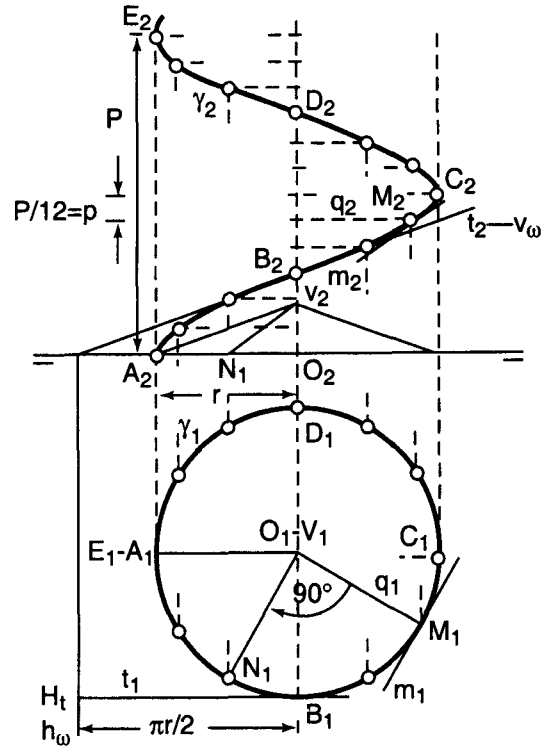


Fig. 10.24. - Representación en diédrica.

gente t en B_1-B_2 , se gira B_1 90º, en sentido contrario al del avance de la hélice, hasta la posición A_1 , siendo t paralela a la generatriz VA del cono.

Esto es lo que se ha hecho para hallar la tangente a γ , en M , por ejemplo. Girar M_1 90º, en sentido contrario al del avance de la hélice, hasta la posición N_1 . La paralela a la generatriz VN del cono es la tangente m_1-m_2 buscada.

El plano osculador de γ en B , es el de canto ω , definido por t , y la normal al eje trazada por B y el osculador en M , el $[m, q]$ (núm. 13,3 de n/G.D.S. y A.).

11. SUPERFICIES

11.1. Generalidades y definiciones

Las superficies que interesan al técnico son *las engendradas por una línea (generatriz), indeformable o no, que se mueve en el espacio, según una ley determinada y continúa o apoyándose sobre una o varias líneas o superficies (directrices)*. La generatriz puede ser recta o curva y la directriz, un punto, una línea o una superficie. El punto y la línea pueden ser propios o impropios.

La superficie también se engendra *como envolvente de otras superficies*.

Podemos darnos idea de la superficie, considerándola como una película infinitamente delgada que separa un cuerpo del resto del espacio. Un cuerpo es un volumen finito y determinado y la superficie es la envuelta inmaterial que rodea el cuerpo.

Cuerda es el segmento determinado por dos puntos de la superficie no incidentes con una generatriz rectilínea.

Diámetro es la cuerda que pasa por el centro.

El lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de una superficie, paralelas entre sí, es otra superficie llamada *diametral* que puede ser plana (*plano diametral*), como sucede en las superficies de segundo orden.

En las superficies con centro, los planos diametrales concurren en él, luego dos planos diametrales se cortan según un diámetro.

Los planos diametrales normales a las cuerdas que bisecan se llaman *planos principales*, y sus intersecciones, *ejes*.

11.2. Clasificación

En general, una superficie admite distintos sistemas de generación. De aquí, la dificultad de su clasificación.

Según que la generatriz sea recta o curva, las superficies se clasifican en *regladas y no regladas* (curvas). La reglada más sencilla es el plano.

Las regladas se subdividen, según que puedan o no desarrollarse sobre un plano, en:

Desarrollables (cono, cilindro, convoluta, etc.)

No desarrollables o alabeadas (cono alabeado, conoide, cilindroide, etc.).

Las superficies no regladas o curvas no son desarrollables, pero no se llaman alabeadas, reservándose este nombre para las regladas.

Las *superficies de revolución* forman otro grupo importante de superficies. Se engendran por el giro de una línea (recta o curva) alrededor de un eje y son, generalmente, superficies no regladas o curvas (esfera, toro, escocia, etc.). Si la generatriz es rectilínea, engendra, según que corte o no al eje, una reglada desarrollable (cono y cilindro de revolución) o alabeada (hiperboloide de revolución).

Finalmente, las formadas por dos o más superficies distintas se llaman *compuestas*, y son las que el técnico utiliza en la práctica. Las poliedrales, por ejemplo, podrían incluirse en este grupo, por ser combinaciones de superficies poligonales planas (caras del poliedro).

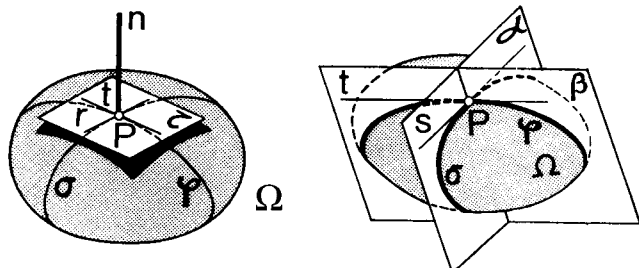


Fig. 11.1. - Tangente a una superficie.

11.3. Tangente y normal (Fig. 11.1)

a) Tangente a una superficie Ω en un punto P de ella (Fig. a) es la tangente t , en P , a cualquier línea φ contenida en la superficie y que pasa por P .

Si φ es una generatriz rectilínea, t coincide con ella.

Todo plano secante α que pasa por una tangente s a Ω , en P , (Fig. b) corta a Ω , según una línea σ , ... tangente a s , en P .

b) *Plano tangente* (Fig. a). En geometría se demuestra que el lugar geométrico de las tangentes r, t, \dots a las curvas σ, φ, \dots de una superficie Ω que pasan por P es, en general, un plano τ llamado *plano tangente a Ω , en P* . En este caso, P es un punto ordinario y, en caso contrario, *punto singular*. Según esto:

El plano τ , tangente a una superficie Ω en un punto ordinario P de ésta, es el definido por las tangentes r y t , en P , a dos curvas (o dos generatrices rectilíneas) σ y φ de Ω que pasen por P . De lo expuesto se deduce (Fig. 11.2):

Todo plano secante α que pase por un punto P de una superficie Σ corta a ésta y a su plano tangente τ , en P , según una curva σ y su tangente t , en P , respectivamente.

En general (Fig. 11.3), el lugar geométrico de las tangentes a la superficie, en un punto singular, es (Fig. a) una superficie cónica (punto cónico S) que puede degenerar (Fig. b), en dos planos (punto doble biplanar D), en un plano doble (punto doble uniplanar R) o como se ve en la figura c, en una recta (punto cónico de tangente única).

c) *Normal y plano normal*. Normal a una superficie Ω , en un punto P de ella (Fig. 11.1-a), es la normal n al plano τ tangente a Ω , en P . Todo plano trazado por

n se llama *plano normal* a la superficie en P y la sección producida, *sección normal*.

d) *Orden de contactos de líneas y superficies*. Aplicando lo dicho en el 10,1-e a líneas y superficies, podemos enunciar:

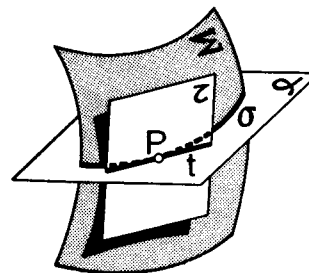
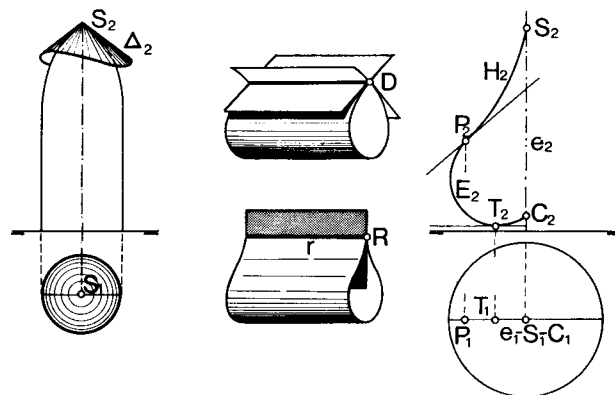


Fig. 11.2. - Plano secante.

Una línea y una superficie tienen un contacto de primero, segundo, ..., n -ésimo orden, si tienen 1, 2 ..., n elementos comunes (o 2, 3, ..., $n + 1$ puntos) confundidos con el de contacto. Si el contacto es el de mayor orden posible, la línea y la superficie se llaman *osculatrices*.

Dos superficies son tangentes, en un punto P , si admiten el mismo plano tangente en P . Si t es tangente a ambas superficies, en P , se dice que éstas tienen un *contacto de orden n , en P , en dirección t* , si todos los planos trazados por t cortan a las superficies, según curvas tangentes en P , con un contacto de orden n . Si esto sucede con todas las tangentes en P , las superficies tienen un *contacto de orden n , en P* .

El plano τ tangente a Σ (Fig. 11.2), en un punto ordinario P , de ella, tiene, en general, un contacto de primer orden.



(a) Punto cónico. (b) Puntos dobles biplanares o uniplanares. (c) Punto cónico, de tangente única.

Fig. 11.3. - Puntos singulares.

11.4. Orden y clase de una superficie

Orden o grado de una superficie es el máximo número de puntos en que puede ser cortada por una

recta. El plano es de primer orden. Las de segundo, tercero, cuarto orden, ... se llaman cuádricas, cúbicas, cuárticas, ...

Clase de una superficie es el número de plano tangentes que pasan por una recta.

La sección plana de una superficie es del mismo orden que ésta. Así, la sección plana de un plano es una recta; la de una cuádrica, una cónica, ... etc.

11.5. Intersección de dos superficies

a) Analíticamente se demuestra que la intersección i de dos superficies de orden m y n es una curva alabeada de orden $m \times n$ que puede descomponerse en otras curvas cuya suma de órdenes sea $m \times n$. Así, la intersección de dos cuádricas es una curva alabeada de orden $2 \times 2 = 4$ que puede descomponerse en dos cónicas o en una recta y una cúbica.

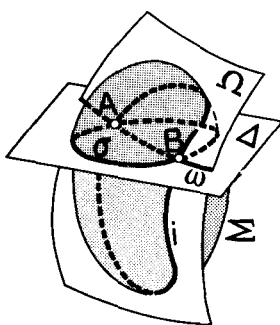


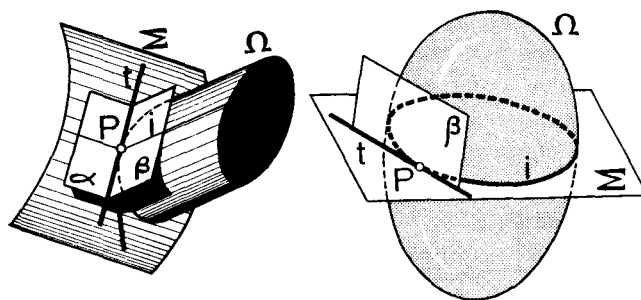
Fig. 11.4.—Intersección de superficies. Método de superficies secantes auxiliares.

La intersección i se determina (Fig. 11.4), cortando las dos superficies Σ y Ω , por otra auxiliar Δ . Las intersecciones σ y ω con ellas se cortan en puntos A y B comunes a Σ y Ω y pertenecientes por tanto a i . Repitiendo la construcción con otras superficies auxiliares, se obtienen nuevos puntos que, unidos ordenadamente, permiten dibujar la intersección i buscada.

Conviene que las superficies auxiliares corten a las dadas, según curvas fáciles de hallar. La más utilizada es el plano y a veces, superficies esféricas o cilíndricas.

b) *Tangente a la línea de intersección* (Fig. 11.5). La tangente a la intersección i de dos superficies Σ y Ω (Fig. a), en un punto ordinario P de ella, es la intersección i de los planos α y β tangentes a Σ y Ω , en P . En efecto, t ha de pertenecer a α y β (núm. 11,3-b), luego es la intersección de ambos.

Las normales en P (no dibujadas) a Σ y Ω determinan el plano γ normal a i , en P , siendo t perpendicular a γ . Este método resulta práctico en superficies como la esférica, cuya normal se traza fácilmente.



(a) Superficies curvas.

(b) Sección plana.

Fig. 11.5.—Tangente a la línea de intersección.

Si Σ es un plano (Fig. b), la tangente a i es la intersección de Σ con el plano β tangente a Ω , en P , (núm. 11,3-b).

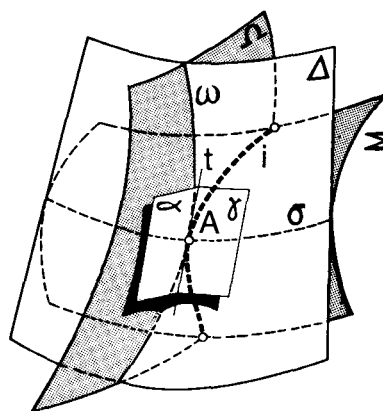


Fig. 11.6.—Superficie límite.

c) *Superficie límite*. Si dos superficies Σ y Ω se cortan según una curva i (Fig. 11.6), toda superficie auxiliar Δ tangente a Σ , por ejemplo, (superficie límite de Σ) corta a Ω según una curva ω , tangente a i en un punto A llamado punto límite, (núm. 14,11 de n/G.D.S. y A.)

Esta propiedad se aplica mucho en las superficies radiadas, si Δ es un plano.

11.6. Contorno aparente (Fig. 11.7)

a) *Contorno aparente de una superficie Σ , desde un punto V , exterior a ella (Fig. a), es el lugar geométrico σ de los puntos de contacto A, B, C, \dots de las tangentes (o de los planos tangentes) a Σ que pasan por V . La superficie cónica de vértice V , circunscrita a Σ , según σ , es el lugar geométrico de las tangentes VA, VB, \dots o la envolvente de los planos tangentes a Σ , trazados por V , como el $[V, t_r]$. Según ésto:*

b) *La proyección del contorno aparente σ , desde V , sobre el plano π , es la sección σ' del cono circunscrito a Σ , producida por el plano π o la envolvente de las trazas t_r de los planos tangentes a Σ , trazados desde V . Si V es el centro de proyección o punto de vista, σ*

es el contorno de Σ , visto desde V y separa la parte vista de la oculta y si es un foco luminoso, σ es la separtriz de sombra que separa la zona iluminada y la de sombra.

c) Si V es impropio, el cono se transforma en un cilindro, como sucede en el diédrico (Fig. b). En proyección horizontal, la curva de tangencia del cilindro proyectante Σ , circunscrito a la superficie Δ , es el *contorno aparente horizontal* $\sigma \equiv \sigma_1 - \sigma_2$ y en proyección vertical, el cilindro proyectante Ω define el contorno aparente vertical $\omega \equiv \omega_1 - \omega_2$.

d) Analíticamente se demuestra que *los conos y cilindros circunscritos a una superficie algebraica son del mismo orden que ésta*, luego:

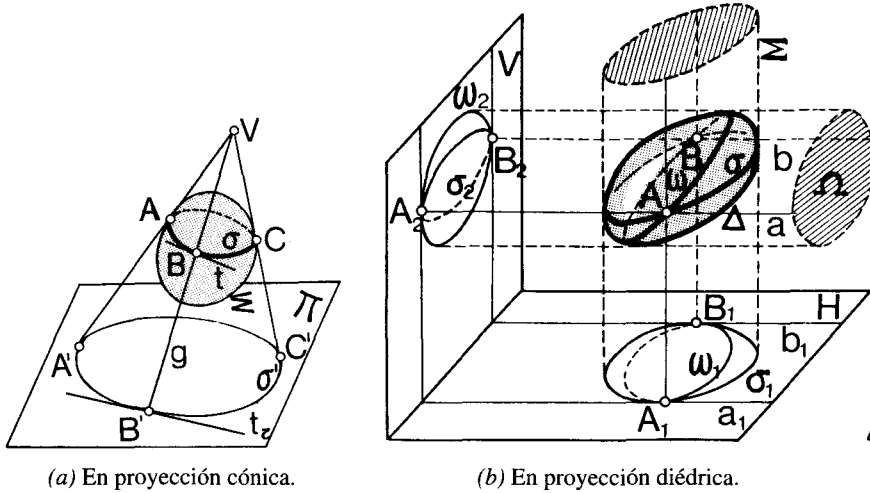


Fig. 11.7. - Contornos aparentes.

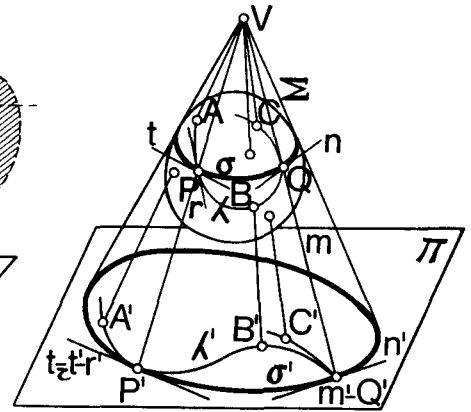


Fig. 11.8. - Líneas que cortan al contorno aparente.

La proyección del contorno aparente de una superficie de orden n , desde un punto V (propio o impropio) sobre un plano, es una curva de orden n . En la figura b, si Δ es una cuádrica, $\sigma_1, \sigma_2, \omega_1$ y ω_2 son cónicas.

11.7. Propiedades del contorno aparente

1ª) *Si una línea λ (recta o curva) de una superficie Σ (Fig. 11.8) corta al contorno aparente σ , en un punto ordinario P , se proyecta según una línea λ' , tangente a σ' , en P' , o presenta en P' un punto de retrceso, según que la tangente a λ , en P , sea exterior o incidente con V , respectivamente.*

Basta ver que las tangentes t y r a σ y λ , en P , pertenecen al plano tangente al cono, en P , y se proyectan, por tanto, sobre su traza t_r , luego λ' y σ' son tangentes por tener la misma tangente t_r en P . Si la tangente m a λ , en Q , pasa por V , $Q' \equiv m'$, es un punto de retrceso de λ' (núm. 10,9-b). Según ésto:

2º) *La proyección del contorno aparente σ de E , sobre un plano π , es la envolvente σ' de las proyecciones λ' de las distintas posiciones de la generatriz λ de Σ o el lugar de sus puntos de retrceso Q' , puesto que si λ corta a σ en todas sus posiciones, sus proyecciones λ' , son tangentes a σ' .*

Ambas propiedades son muy útiles para representar superficies o líneas contenidas en ellas.

3ª) El contorno aparente es, en general, una línea alabeada curva, poligonal o mixta, como sucede al proyectar ortogonalmente el cono de vértice W y base plana ω , sobre π (Fig. 11.9). El cilindro proyectante se compone de dos planos verticales (proyectantes) tangentes al cono, según las generatrices WA y WB y del cilindro proyectante de la curva ACB . El contorno aparente es, por tanto, la línea mixta cerrada $WACBW$ y su proyección horizontal, la $W'A'C'B'W'$, siendo $W'A'$ y $W'B'$ las tangentes a ω' , en A' y B' .

11.8. Representación de superficies

Las superficies no se representan, como las líneas, por las proyecciones de todos sus puntos, puesto que éstas cubrirían total o parcialmente el plano de proyección.

En general, se representan por las proyecciones del mínimo número de directrices que permitan hallar la generatriz que pase por cualquier punto de ellas,

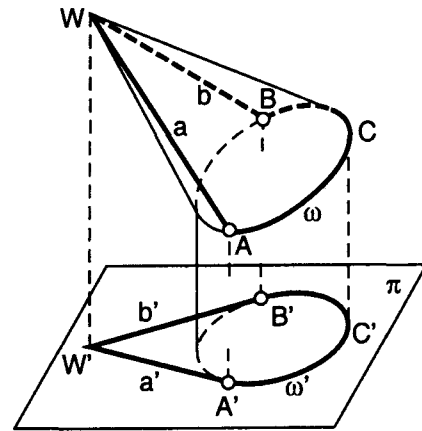


Fig. 11.9.—Contorno aparente de un cono.

pudiéndose así obtener las proyecciones de cualquier punto de las superficie.

La representación se completa, dibujando las líneas más caracterizadas y su contorno aparente.

12. POLIEDROS

12.1. Generalidades

a) *Poliedro es el cuerpo limitado por superficies poligonales planas de modo que cada lado pertenezca a dos polígonos y que dos polígonos contiguos (de lado común) no sean complanarios* (Fig. 11.1-a).

Los polígonos y sus lados, vértices y ángulos internos son, respectivamente, las *caras*, *aristas*, *vértices* y *ángulos* planos del poliedro.

Dos caras contiguas $AEGF$ y EGD forman un *diédro del polígono* de arista \overline{EG} . Las aristas concurrentes en un vértice D , por ejemplo, forman un *ángulo poliédrico* (ángulo sólido del poliedro), de caras angulares EDC , CDG y GDE .

Diagonal es la recta que une dos vértices del poliedro, sin ser arista ni diagonal de ninguna cara, como la \overline{EK} . *Plano diagonal* es el definido por una arista y un vértice o por dos aristas, sin que sea cara, como el $[E, G, H]$.

Género de un poliedro es el número de sus caras.

La pirámide y el prisma son también poliedros de los que trataremos en los capítulos siguientes.

b) Si el plano de cada cara deja al poliedro en el mismo semiespacio se llama *convexo* y son los únicos que vamos a estudiar. Según esto:

Un poliedro convexo no puede ser cortado por una recta en más de dos puntos, pues si fuera cortado en tres puntos A , B , y C (Fig. b), alineados por este orden, A y C estarían a distinto lado del plano α de la

cara que contiene a B , y el poliedro no quedaría todo a un mismo lado de α , luego no sería convexo. Por tanto:

La sección plana de un poliedro convexo es un polígono convexo puesto que una recta sólo puede cortarlo en dos puntos.

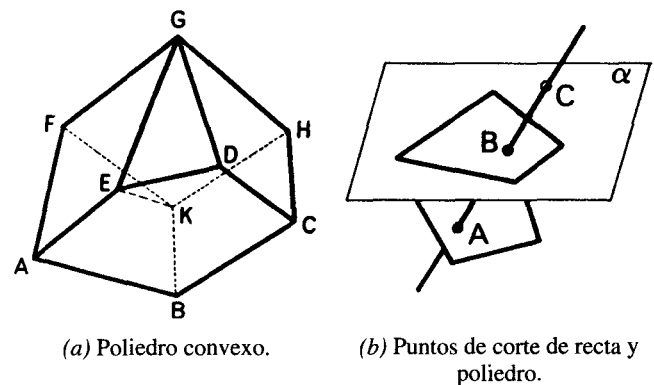


Fig. 12.1.—Poliedros no regulares.

c) *No existe ningún poliedro convexo con todas sus caras de más de cinco lados y todos sus ángulos sólidos de más de cinco aristas.* También se demuestra que sólo existen cinco géneros de poliedros convexos, cuyas caras sean del mismo número de lados y sus ángulos sólidos, del mismo número de aristas. Estos son (Fig.12.2):

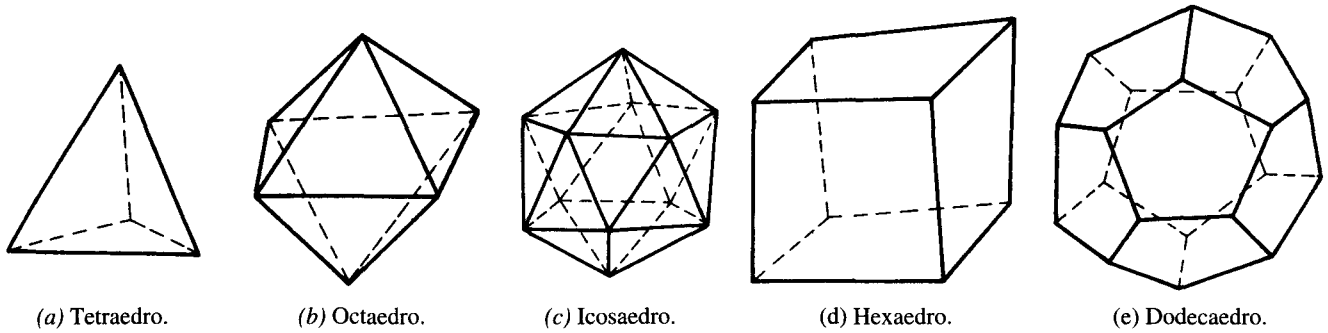


Fig. 12.2.—Poliedros convexos no regulares de caras de igual número de lados y ángulos sólidos, de igual número de aristas.

- El tetraedro, de cuatro caras triangulares (Fig. a).
- El octaedro, de ocho caras triangulares (Fig. b).
- El icosaedro, de veinte caras triangulares (Fig. c).
- El hexaedro o cubo, de seis caras cuadradas (Fig. d).
- El dodecaedro, de doce caras pentagonales (Fig. e).

d) Poliedros regulares son los que tienen sus caras y ángulos diédricos iguales y pueden ser *convexos* y *estrellados*. Sólo existen cinco géneros de poliedros regulares convexos, también llamados *platónicos*, que son los ya citados (Figs. 12.6 a 12.10).

Todo poliedro regular es inscriptible y circunscriptible a la esfera. Los radios de las esferas inscrita y circunscrita se llaman *apotema* y *radio* del poliedro y, el centro común, centro del poliedro.

Apotema es el segmento normal a una cara, determinado por el centro de ésta y el de poliedro.

12.2. Contorno aparente

Si proyectamos ortogonalmente los vértices de un poliedro convexo Σ , sobre un plano horizontal π (Fig. 12.3), el polígono convexo perimetral de las proyecciones es la traza $A_1B_1F_1G_1H_1D_1$ del prisma de generatrices verticales circunscrito a Σ . La línea de tangencia del prisma (contorno aparente horizontal) es el polígono alabeado $ABFGHD$ y, su proyección $A_1B_1F_1G_1H_1D_1$, la proyección horizontal del contorno.

Toda vertical (proyectante) interior al prisma, como la PQ , corta al poliedro en dos puntos P y Q (núm. 12.1.b). En proyección horizontal, será visto el punto P , por ser el de mayor cota (más alejado de π) y el Q , oculto.

Los lados del contorno aparente horizontal son vistos; dividen a la superficie del poliedro, en una parte vista y otra oculta, y son intersecciones de una cara vista y otra oculta.

Si la proyección E_1 de un vértice es interior a la del contorno, las aristas que concurren en E son vistas u ocultas, según lo sea E . En la figura, son ocultas por ser E el de menor cota y por tanto, oculto.

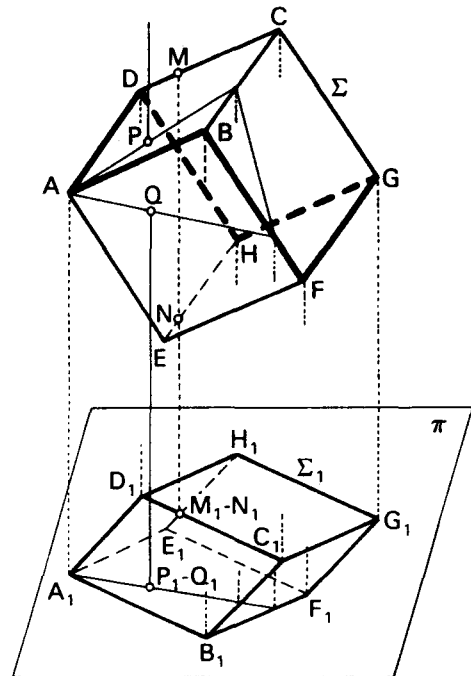


Fig. 12.3.—Contorno aparente de un poliedro.

Para determinar cuál de las aristas interiores C_1D_1 y E_1H_1 es vista en proyección horizontal, se traza la vertical que pasa por su intersección M_1 y corta a las respectivas aristas, en M y N . Como M es visto, \overline{CD} es vista y \overline{EH} , oculta. Esto es lo que se ha hecho para representar el paralelepípedo Σ , en diédrica (Fig. 12.4).

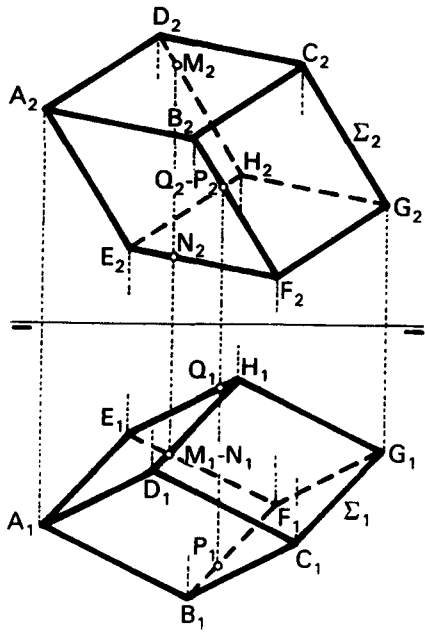
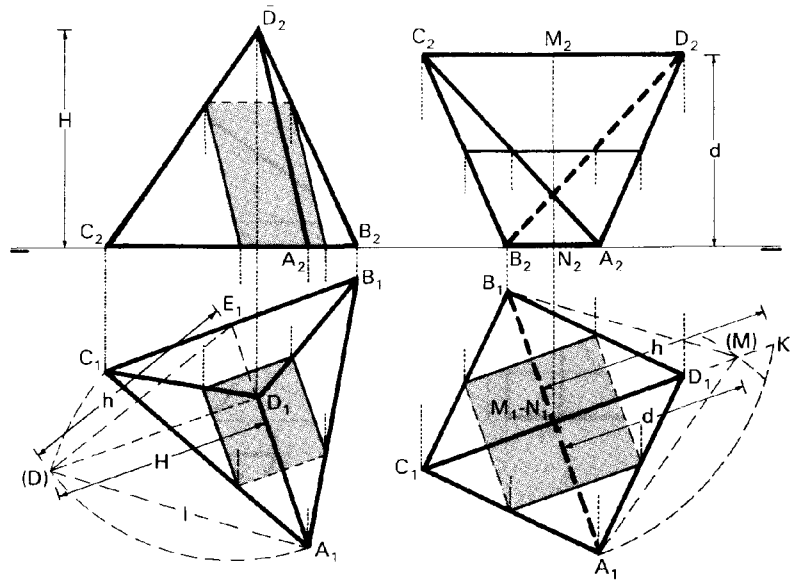


Fig. 12.4.—Representación diédrica.

El polígono perimetral $A_1B_1C_1G_1H_1E_1$ es la proyección horizontal del contorno aparente horizontal $ABCGHE$. Por otra parte, de los triedros de vértices D_1 y F_1 , interiores al contorno, es visto el de mayor cota D . También puede hallarse, por medio de la vertical que pasa por el punto de corte M_1 de $\overline{D_1H_1}$ y $\overline{E_1F_1}$, y corta a estas aristas, en M y N , siendo M el de mayor cota.



(a) Con una cara en H. (b) Con dos aristas horizontales.

Fig. 12.6.—Representación del tetraedro regular.

halla directamente, por ser el de mayor alejamiento, o por medio de la recta de punta PQ , siendo P el de mayor alejamiento.

12.3 Sección plana

En un poliedro convexo, dos caras paralelas entre sí, o que se cortan según una arista paralela al plano secante, son cortadas por éste, según rectas paralelas.

La sección plana es un polígono convexo que puede hallarse: determinando sus vértices, como intersecciones del plano secante con las aristas; hallando las intersecciones (lados) del plano secante con las caras o combinando ambos métodos.

Más práctico resulta transformar el plano secante en proyectante, por un giro o cambio de plano. Esto permite hallar la sección de forma inmediata y referir los vértices a las proyecciones primitivas.

La sección del tetraedro $ABCD$ por el plano $h_\alpha-v_\alpha$ (Fig. 12.5) se ha hallado, por medio de un cambio de plano vertical, siendo la nueva línea de tierra normal a h_α . El plano α se concierte en proyectante vertical, y su nueva traza v'_α corta a las nuevas proyecciones $A'_2B'_2C'_2D'_2$ del tetraedro, en N'_1, M'_1, P'_1 y Q'_1 que, referidas a las aristas primitivas, determinan la sección $M_1N_1P_1Q_1-M_2N_2P_2Q_2$. Como comprobación, las prolongaciones de los lados P_1Q_1 y N_1M_1 situados en las caras del diedro de arista A_1B_1 , concurren en un punto K de ésta.

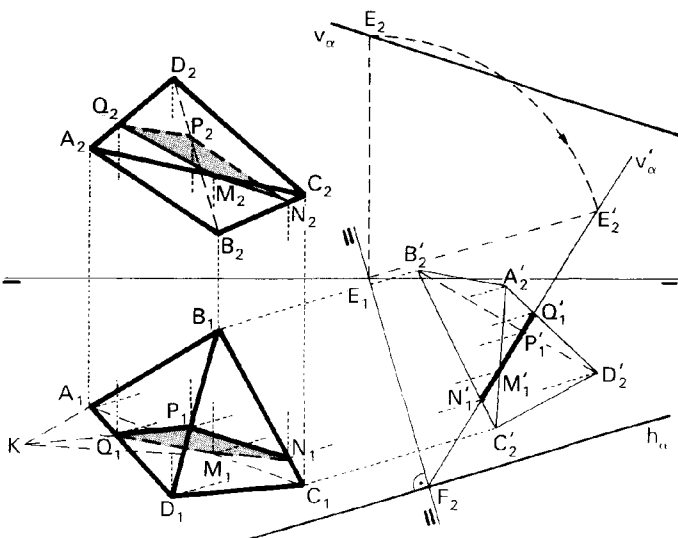


Fig. 12.5.—Sección plana de un tetraedro.

El contorno aparente vertical es el polígono alabeado $ADCGFE$. El triedro de vértice interior visto B se

12.4. Intersección de una recta con un poliedro

Se halla, trazando por la recta un plano auxiliar (uno de los proyectantes de la recta) que corta al poliedro, según un polígono. Las intersecciones de la recta con el polígono-sección son los puntos de corte

con el poliedro.

En la pirámide y prisma, las secciones más sencillas son las producidas por planos que pasen por la recta y el vértice de la pirámide, o sean paralelos a las aristas del prisma.

REPRESENTACIÓN DE POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

12.5. Tetraedro (Fig. 12.6)

La cara situada en el plano horizontal (Fig. a) es el triángulo equilátero $A_1B_1C_1$, de lado l (arista del poliedro), colocado en cualquier posición. La proyección D_1 del cuarto vértice es el centro del triángulo $A_1B_1C_1$ y su cota H , se obtiene abatiendo el triángulo rectángulo A_1D_1D , de hipotenusa $\overline{AD} = l$ y cateto $\overline{A_1D_1}$, o el triángulo isósceles $\overline{A_1E_1D}$, se base $\overline{AD} = l$ y lados iguales $\overline{A_1E_1} = \overline{ED} = h$ (altura de una cara).

El abatimiento (D) de D se obtiene, por tanto, como intersección del arco $C_1(D)$ (de centro A_1 y radio l) con la perpendicular $D_1(D)$ a $\overline{A_1D_1}$ o con el arco $A_1(D)$, de centro E_1 y radio $\overline{E_1A_1} = h$.

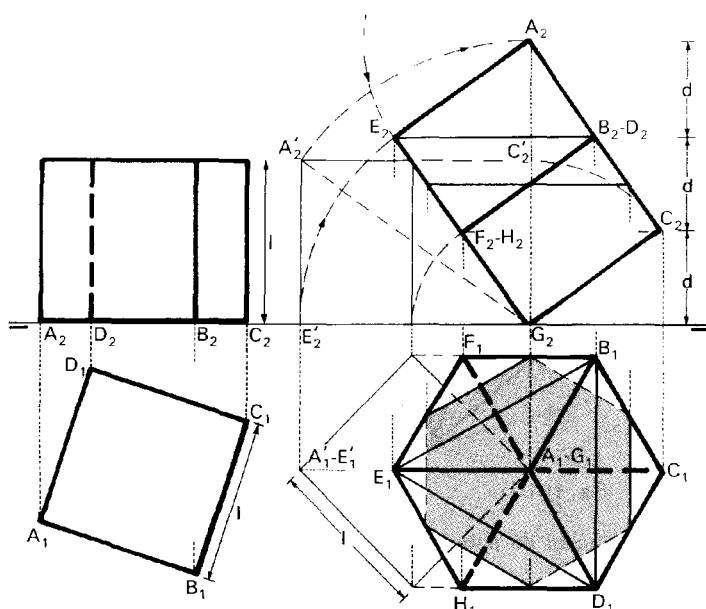
La arista \overline{CB} , por ejemplo, es perpendicular al plano vertical de traza A_1E_1 y a la arista \overline{AD} , contenida en él, luego *los pares de aristas opuestas de un tetraedro se cruzan perpendicularmente*. Esto sirve para representar el tetraedro con dos aristas horizontales (Fig. b). Los vértices A y B , situados en H , determinan con el punto medio M de la arista \overline{CD} , el triángulo isósceles \overline{ABM} , de base $\overline{AB} = l$ y lados $\overline{MA} = \overline{MB} = h$ (altura de una cara). De aquí, la construcción:

Construir el triángulo equilátero A_1B_1K , de altura $\overline{M_1K} = h$ y luego, el triángulo isósceles $A_1B_1(M)$, de lados $\overline{A_1(M)} = \overline{B_1(M)} = h$ y altura $\overline{M_1(M)} = d$ (mínima distancia entre las aristas \overline{AB} y \overline{CD}). Los vértices C y D son, por tanto, puntos de cota d y proyecciones C_1 y D_1 situados en la mediatriz de $\overline{A_1B_1}$ y distantes de M_1 la longitud $\overline{M_1C_1} = \overline{M_1D_1} = l/2$.

En los poliedros regulares, el centro del poliedro equidista de los vértices y caras y es centro de simetría del poliedro, excepto en el tetraedro que no tiene centro de simetría.

12.6. Hexaedro o cubo (Fig. 12.7)

La cara situada en el horizontal (Fig. a) es un cuadrado de arista l , en posición arbitraria, y las aristas normales a ella son verticales, de longitud l .



(a) Con una cara en H.

(b) Con una diagonal vertical

Fig. 12.7.—Representación del hexaedro regular o cubo.

Para representar un cubo con una diagonal vertical (Fig. b), se coloca previamente (figura de la izquierda) con una cara horizontal y dos diagonales frontales y luego, se gira alrededor del eje de punta G_1G_2 , hasta que la diagonal $\overline{A_1G_1}$ quede vertical, en \overline{AG} . El plano diagonal girado es el rectángulo $A_2C_2G_2E_2$, siendo E_2 la intersección del arco $E_2'E_2$ con el de centro A_2 y radio l . Los demás vértices se hallan fácilmente, como se ve en la figura. En esta posición, las propiedades más importantes de sus proyecciones son (núm. 10,5 de n/E. de G.D.):

1ª) La proyección $B_1C_1D_1H_1E_1F_1$ del contorno aparente horizontal es un exágono regular.

2ª) Las proyecciones verticales de los extremos de las tres aristas, concurrentes en A y G , están sobre las normales E_2B_2 y H_2C_2 a $\overline{A_2G_2}$, distantes de A_2 y G_2 la longitud $d = \overline{A_2G_2}/3$

3ª) Las proyecciones de las diagonales de caras, no coincidentes con radios, como la $\overline{B_1D_1}$, están en verdadera magnitud.

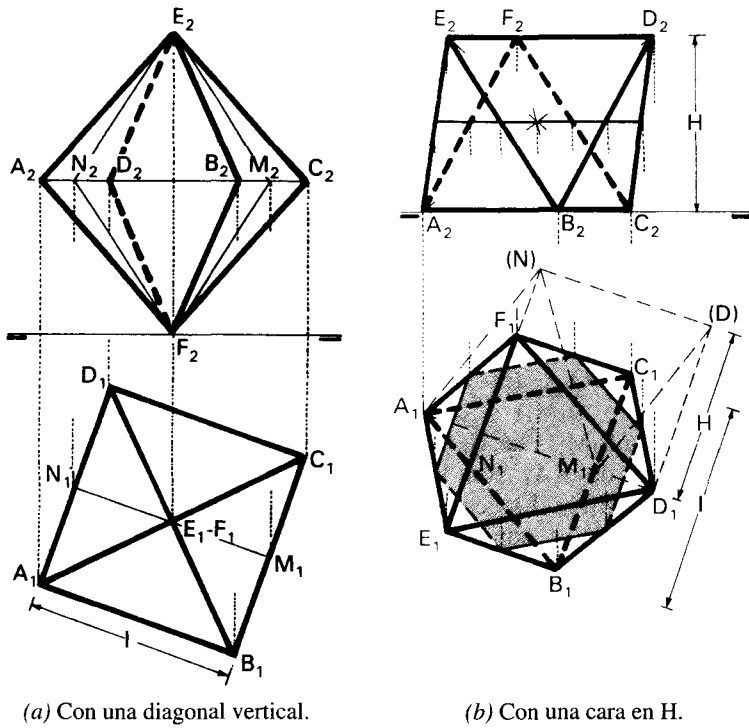


Fig. 12.8.—Representación del octaedro regular.

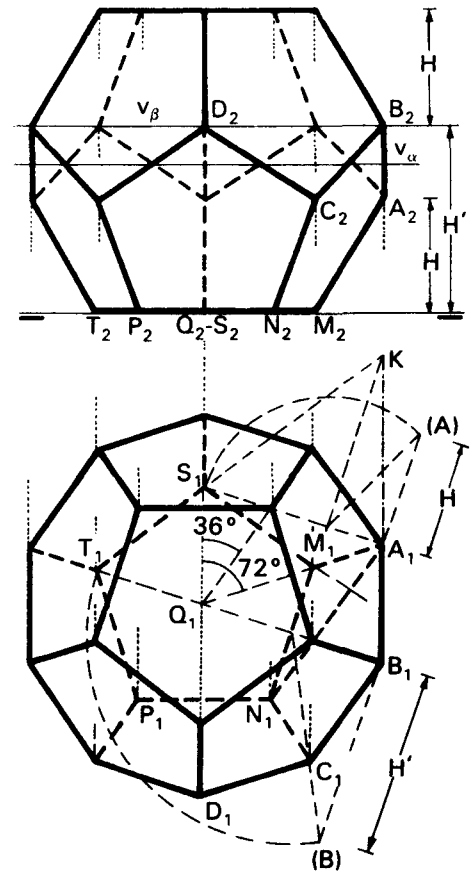


Fig. 12.9.—Dodecaedro regular.

12.7. Octaedro (Fig. 12.8)

Si el octaedro se coloca con una diagonal \overline{EF} vertical (Fig. a), la sección diagonal, normal a ella, es el cuadrado $ABCD$, de plano horizontal, representado en verdadera magnitud, siendo $\overline{E_2F_2} = \overline{A_1C_1} = \overline{B_1D_1}$, lo que demuestra que las diagonales del octaedro son iguales y perpendiculares entre sí. El plano de simetría trazado por \overline{EF} , por ejemplo, es mediatriz de las aristas \overline{AD} y \overline{BC} , y corta al octaedro, según un rombo $EMFN$ de lados $\overline{EM} = \overline{MF} = \overline{FN} = \overline{NE} = h$ (altura de una cara) y diagonal $\overline{NM} = l$ (arista del poliedro).

Esto sirve para representarlo con la cara ABC , en el horizontal (Fig. b). La cota H de la cara opuesta EDF se halla, abatiendo el rombo-sección $AMDN$, producido por el plano de simetría de traza A_1M_1 , en $A_1M_1(D)(N)$, siendo $A_1M_1(N)$ un triángulo isósceles que puede construirse, por ser $\overline{A_1M_1} = \overline{A_1N} = h$ y $\overline{M_1N} = l$. A partir de estos datos, se hallan fácilmente los restantes vértices.

12.8. Dodecaedro (Fig. 12.9)

Si se coloca el dodecaedro con una cara en el horizontal (Fig. 12.9), ésta es la base pentagonal regular $MNPTS$, de lado l (arista del poliedro). Como las tres caras del triedro M , por ejemplo, son iguales, la arista

\overline{MA} se proyecta en la bisectriz del ángulo $S_1M_1N_1$ (prolongación del radio $\overline{Q_1M_1}$) y los abatimientos de las caras de arista común \overline{MA} coincidirán con el pentágono base, siendo S_1 y N_1 los abatimientos del vértice A de cada cara. De aquí, la construcción:

La proyección A_1 es la intersección de la normal S_1A_1 a N_1M_1 con Q_1A_1 (prolongación del radio $\overline{Q_1M_1}$) o con N_1A_1 (normal a S_1M_1). La B_1 es la intersección de KA_1 con la normal T_1B_1 a N_1M_1 . Las cotas H y H' de A y B se obtienen, deshaciendo el abatimiento, como se indica en la figura.

La proyección horizontal se completa fácilmente, por simetría, ya que A_1, C_1, \dots están sobre las prolongaciones de los radios $\overline{Q_1M_1}, \overline{Q_1N_1}, \dots$, a distancias $\overline{M_1A_1} = \overline{N_1C_1} = \dots$, etc y B_1, D_1, \dots , sobre las apotemas, a distancias $\overline{Q_1B_1} = \overline{Q_1D_1} = \dots$, etc.

La quebrada alabeada $ABCD\dots$ (contorno aparente horizontal) divide al poliedro en dos partes iguales y se proyecta, según el decágono regular $A_1B_1C_1D_1\dots$. Al colocar la mitad superior sobre la inferior, los ángulos salientes de una encajan en los entrantes de la otra.

Cada par de caras opuestas son paralelas, lo mismo que las aristas que las forman, y la base superior se

proyecta en planta, según un pentágono regular, girado 36° respecto a la base inferior.

12.9. Icosaedro (Fig.12.10)

Si se coloca la diagonal \overline{MN} vertical (Fig. a), las bases pentagonales de las pirámides de vértices M y N son horizontales y se proyectan, según dos pentágonos regulares, de lado l (arista del poliedro) cuyos vértices

simétrico del $A_1B_1C_1$, respecto al centro común. El vértice D es común a la cara ABD y al pentágono $BCFED$, abatidos en $A_1B_1C_1$ y en el pentágono regular $B_1C_1(F)(E)(D)$ luego si por C_1 y (D) , se trazan perpendiculares a sus charnelas $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{B_1C_1}$, se cortan en D_1 . Los restantes vértices se obtienen fácilmente, por simetría.

Las cotas h y H de L y G , por ejemplo, se obtienen (núm. 5,8), como catetos de triángulos rectángulos de hipotenusa l y catetos $\overline{B_1L_1}$ y $\overline{C_1G_1}$ (o deshaciendo los

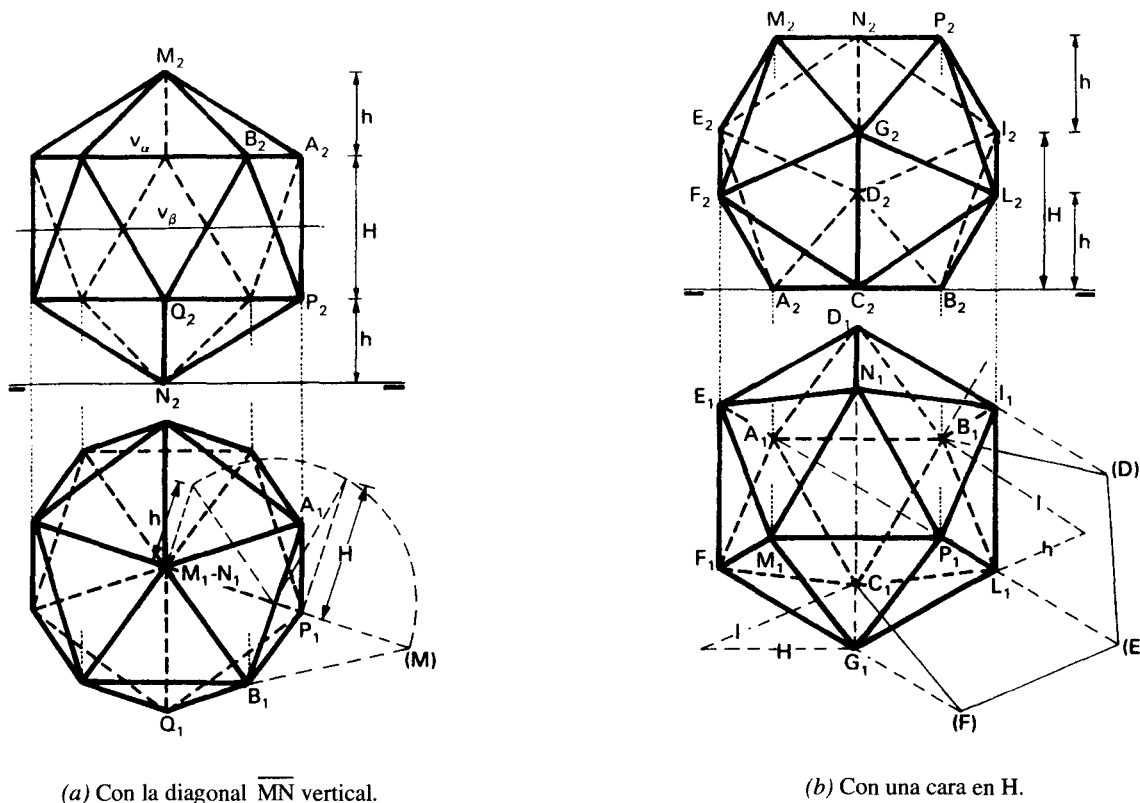


Fig. 12.10.—Representación del icosaedro regular.

$A_1, P_1, B_1, Q_1, \dots$ forman un decágono regular que define la proyección horizontal del poliedro.

El triángulo equilátero $A_1B_1(M)$ es el abatimiento de las caras ABM y ABP sobre el plano horizontal que pasa por \overline{AB} . Al deshacer el abatimiento, se obtienen las alturas h y H de las pirámides del cuerpo central que permiten dibujar el alzado.

Si se coloca la cara ABC en el horizontal (Fig. b), en $A_1B_1C_1$, la cara opuesta es el triángulo $P_1M_1N_1$,

abatimientos de D y E), lo cual permite dibujar el alzado.

12.10. Secciones importantes

Sección principal de un poliedro es la producida por un plano α que pasa por su centro, contiene los radios r, R y R' de las esferas inscrita, circunscrita y tangente a las aristas, y es plano de simetría del polie-

dro. Si α es frontal (Fig. 12.11), la sección es el contorno aparente vertical del poliedro, y se proyecta sobre V , en verdadera magnitud.

En cada figura se indican los elementos que definen

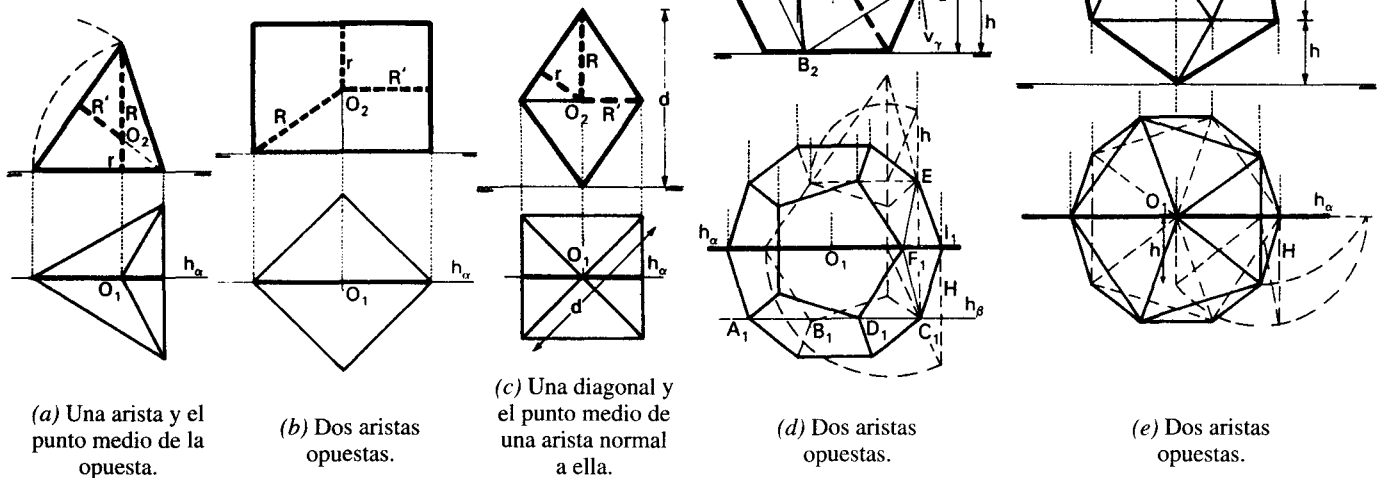


Fig. 12.11.—Secciones principales y elementos que las definen.

el plano α . En el tetraedro, el centro O es el ortocentro de la sección principal.

Como secciones notables de los cinco poliedros, citaremos las siguientes:

Poliedro	Plano secante	Sección poligonal
Tetraedro	Paralelo a dos aristas opuestas (Fig. 11.12a).	Rectángulo
	Paralelo y equidistante de dos aristas opuestas (Fig. 11.12b).	Cuadrado
Cubo (Fig. 11.13b).	Dado por los extremos E, B y D de tres aristas concurrentes en un vértice.	Triángulo equilátero
	Normal a una diagonal por su punto medio.	Hexágono regular
Octaedro	Paralelo y equidistante de dos caras opuestas (Fig. 11.14b).	Hexágono regular
Dodecaedro	Plano β , paralelo a dos aristas opuestas y coincidente con cuatro vértices (Fig. 11.17d)	Cuadrado ABCD
	Plano α , paralelo y equidistante de dos caras opuestas (Fig. 11.15)	Decágono regular
	Plano β que pasa por los vértices equidistantes de una cara (Fig. 11.15)	Pentágono regular
	Plano γ , dado por los extremos C, E, F de tres aristas concurrentes en un vértice I (Fig. 11.17d).	Triángulo equilátero CEF
Icosaedro	Plano γ normal a una diagonal por su punto medio (Fig. 11.17e).	Decágono regular
	Plano β dado por los extremos de aristas concurrentes en un vértice (Fig. 11.17).	Pentágono regular

OTROS POLIEDROS

12.11. Poliedros conjugados (Fig. 12.12)

Si se unen los centros de las caras concurrentes en cada vértice de un cubo (Fig. a), se obtienen las ocho caras de un octaedro regular y recíprocamente. Los poliedros, así obtenidos, se llaman *conjugados* o *recíprocos*.

Análogamente, los centros de las caras de un dodecaedro (Fig. c), son vértices de un icosaedro y recíprocamente. Los de un tetraedro lo son de otro tetraedro (Fig. b). Por tanto, el octaedro y el cubo son conjugados, lo mismo que el sicosaedro y el dodecaedro. El tetraedro, en cambio, es conjugado de sí mismo.

12.12. Poliedros semiregulares o arquimedianos

Son poliedros convexos de aristas iguales, de caras poligonales regulares de dos o tres géneros (las del mismo género, iguales) y ángulos sólidos no regulares (triedros, tetraedros o pentaedros) iguales o simétricos. Son inscriptibles en la esfera y pueden no ser circunscriptibles en otras concéntricas.

Arquímedes demostró que sólo existen trece de estos poliedros. Se designan con la notación AI, AII,

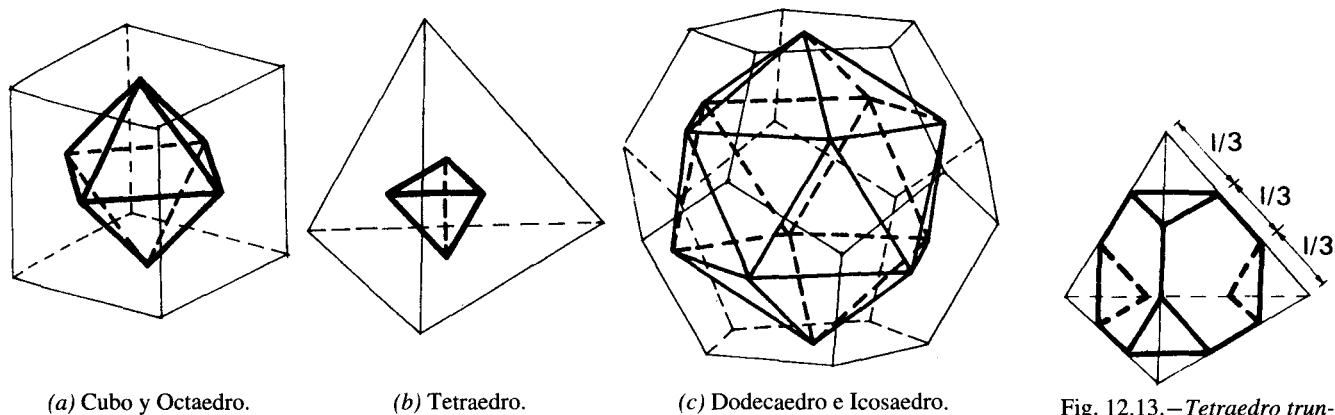


Fig. 12.12. - Poliedros conjugados.

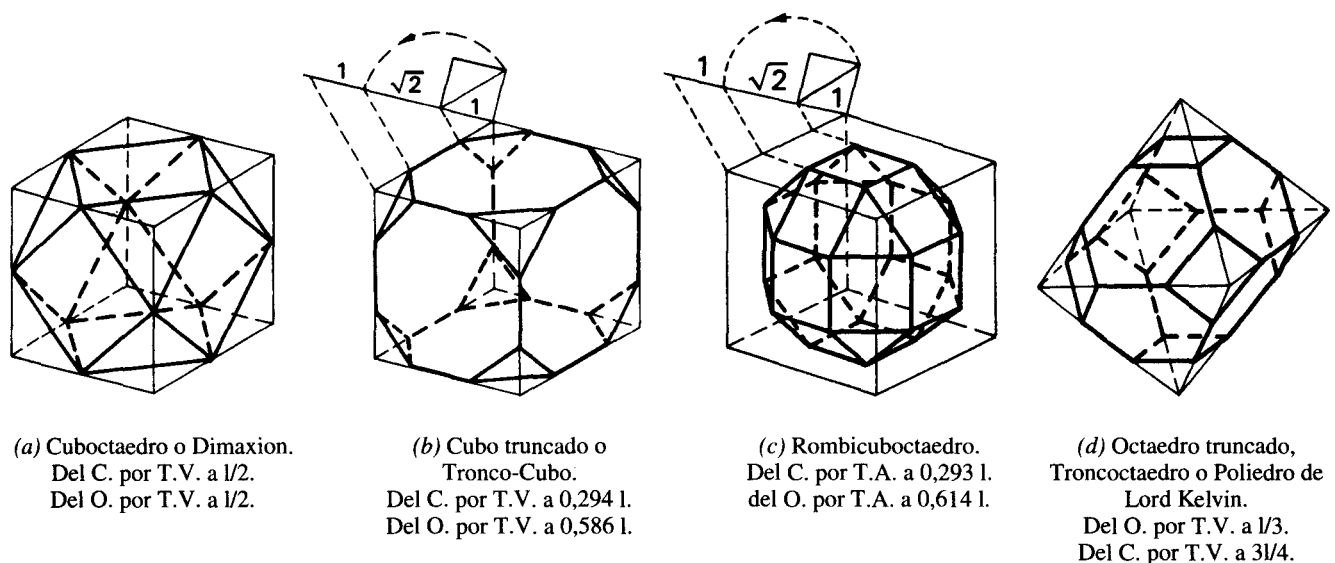


Fig. 12.14. - Poliedros semiregulares o arquimedianos, derivados del cubo o del octaedro.

AIII, ..., AXIII, y pueden obtenerse, a partir de poliedros regulares, por truncadura de vértices (T.V.) o de aristas (T.A.) o por otras combinaciones. Así el AI se obtiene del tetraedro (T); del AII al AVII, del cubo (C) o del octaedro (O) y del AVIII al AXIII, del dodecaedro (D) o del icosaedro (I). Inversamente, prolongando las caras de estos poliedros, se obtienen los cinco poliedros regulares convexos. En las figuras 12.13 a 12.15, se representan los más sencillos y se indica el poliedro del que se obtiene y la forma de obtenerlo.

12.13. Prismas y antiprismas regulares o arquimedianos (Fig. 12.16)

Son dos series de poliedros añadidos por Arquímedes a los poliedros semiregulares. El prisma

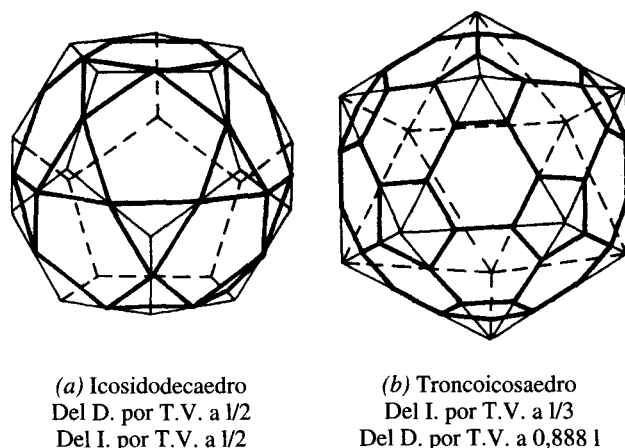


Fig. 12.15. - Poliedros semiregulares o arquimedianos, derivados del dodecaedro o del icosaedro.

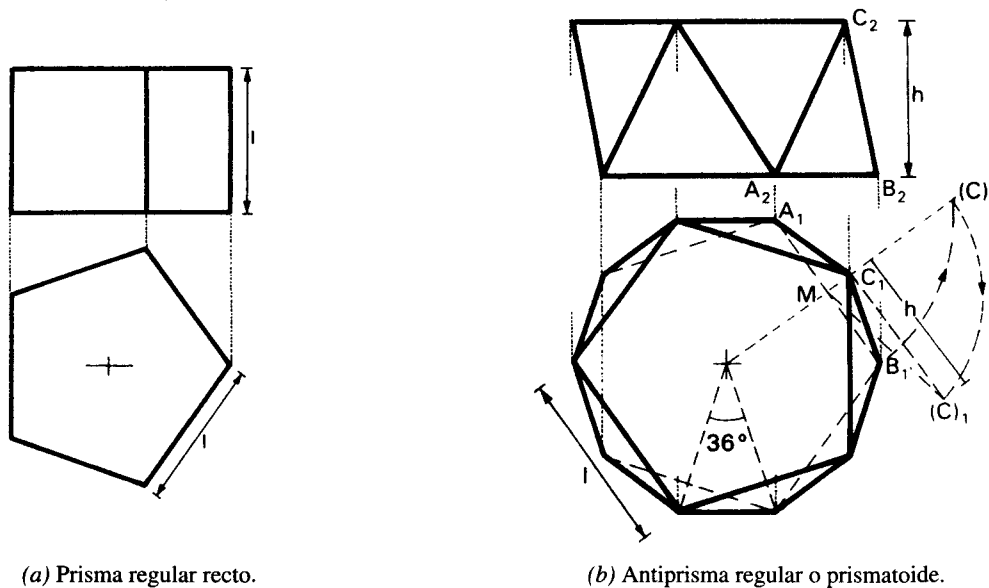


Fig. 12.16. - Prisma y antiprisma regular o arquimediano.

regular recto (Fig. a) es inscriptible en la esfera y tiene dos bases poligonales regulares convexas iguales, de n lados y n caras laterales cuadradas. El de base cuadrada es el cubo.

El antiprisma regular o prismatoide (Fig. b) es inscriptible en la esfera y tiene dos bases poligonales regulares convexas iguales, de n lados, giradas entre sí

$360^\circ/2n$, y $2n$ caras laterales triangulares equiláteras. El de base triangular es el octaedro regular (Fig. 12.b-b). La altura h se ha hallado, como cateto del triángulo rectángulo MC_1C , de hipotenusa \overline{MC} , igual a la altura de la cara ABC , abatida en $A_1B_1(C)$. (Ver núms. 10,1 a 10,22 de n/E. de G.D.).

13. PIRÁMIDE

13.1. Superficies radiadas. Generación

La proyección de una línea ω , abierta o cerrada (Fig. 13.1), desde un punto V es, en general, una superficie *cónica* (Fig. a), abierta o cerrada, respectivamente, y si V es impropio, una superficie *cilíndrica* (Fig. b). Si ω es una cónica, la superficie es de *segundo orden o cuádrica* (cono y cilindro cuádrico).

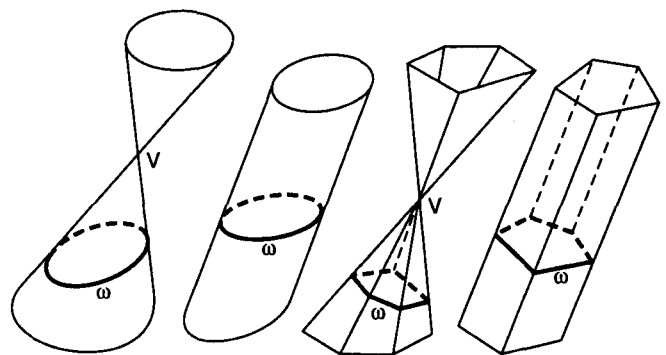
Si ω es poligonal, la proyección es una superficie poliedral que puede ser *piramidal* (Fig. c) o *prismática* (Fig. d), según que V sea propio o impropio. Las cuatro superficies son figuras de la radiación de vértice V (núm. 1,2), por lo que también se llaman *superficies radiadas*.

La línea ω es la *directriz* de la superficie, y las proyectantes de todos sus puntos, las *generatrices*. En las poliédricas, las proyectantes de los vértices son las *aristas*. Como directriz puede tomarse cualquier línea plana o alabeada trazada en la superficie, con la condición de que corte a cada generatriz en un sólo punto.

Las superficies radiadas también pueden definirse como superficies regladas engendradas por una generatriz rectilínea que se mueve en el espacio, pasando por V y apoyándose en la directriz ω . Son por tanto, superficies ilimitadas, por serlo la generatriz.

El cuerpo limitado por el vértice propio V y una sección plana ω se llama *cono* (Fig. a) o *pirámide*

(Fig. c) y en las de vértice impropio, el limitado por dos secciones paralelas, *cilindro* (Fig. b) o *prisma* (Fig. d).



(a) Cónica (b) Cilíndrica. (c) Piramidal. (d) Prismática.

Fig. 13.1.—Superficies radiadas.

Aunque la representación y propiedades de estas superficies son esencialmente las mismas, por razones didácticas, las estudiaremos por separado, empezando por las poliédricas (pirámide y prisma).

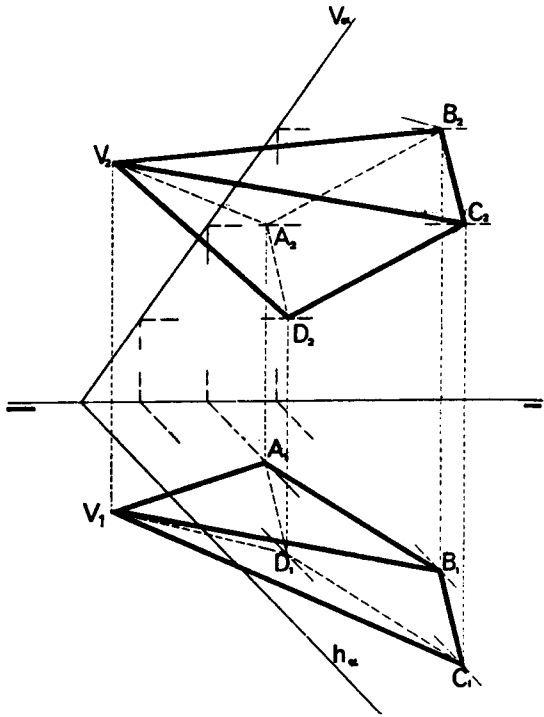


Fig. 13.2.—Pirámide de base de plano α .

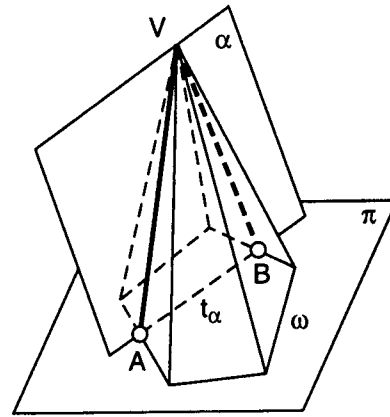


Fig. 13.4.—Sección por un plano que pasa por el vértice.

Las aristas son las rectas \overline{VA} , \overline{VB} , \overline{VC} y \overline{VD} . El contorno aparente horizontal es el $VABCV$ y el vertical, el $VBCDV$. En proyección horizontal, las aristas vistas son las \overline{VA} , \overline{VB} y \overline{VC} (por ser B el vértice de mayor cota) y en alzado, las \overline{VB} , \overline{VC} y \overline{VD} (por ser C , el de mayor alejamiento).

13.2. Representación de la pirámide

Una pirámide queda definida por el vértice V_1-V_2 (Fig. 13.2) y por la base (directriz) de plano α , representada por su proyección horizontal $A_1B_1C_1D_1$ (por

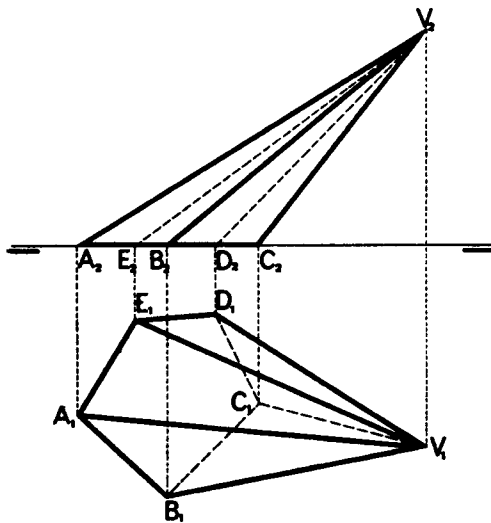


Fig. 13.3.—Pirámide de base horizontal.

ejemplo). La proyección vertical $A_2B_2C_2D_2$ se obtiene, trazando horizontales de α , que pasen por los vértices y refiriendo a ellas las proyecciones $A_1, B_1, \dots, etc.$

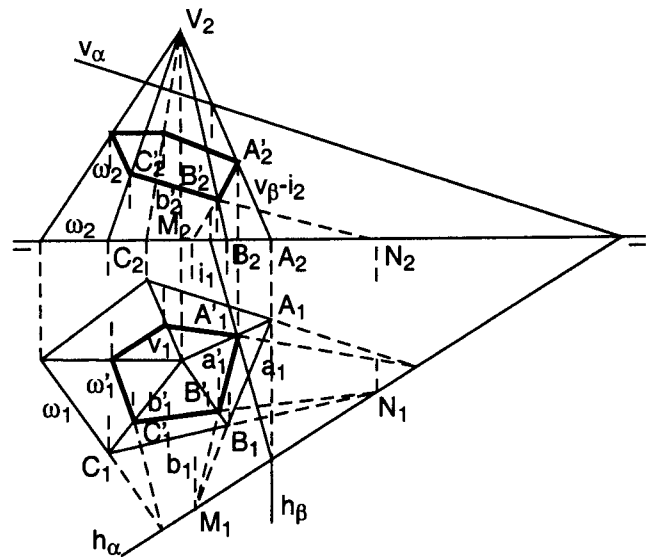


Fig. 13.5.—Sección de plano α .

Lo más sencillo es representar la pirámide con su base situada en H , por ejemplo, (Fig. 13.3). Los contornos aparentes y las aristas vistas se hallan de forma inmediata, como se ve en la figura.

13.3. Sección plana

En una pirámide de vértice V y base poligonal convexa ω (Fig. 13.4), todo plano secante α que pase por el vértice V corta a la pirámide, según dos, una o ninguna generatriz. Las generatrices de corte \overline{VA} y \overline{VB} son las rectas que unen V con los puntos de corte A y B de t_α y ω .

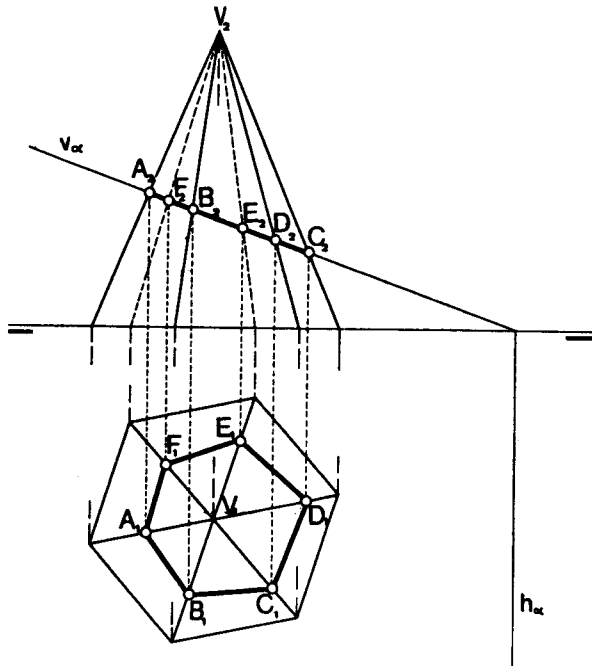


Fig. 13.6. - Sección de plano de canto.

La sección ω' producida por un plano cualquiera α (Fig. 13.5) se halla fácilmente, teniendo en cuenta que las trazas $a \equiv \overline{AB}$ y $a' \equiv \overline{A'B'}$, de cada cara VAB , con H y α , concurren en un punto M de h_α (arista del diedro $[H, \alpha]$), y los puntos de corte A y A' de cada arista VA con H y α están alineados con V . Esto demuestra que la sección ω' y la base ω de la pirámide se corresponden en el espacio (núm. 2,1), en una homología de centro V y eje h_α y sus proyecciones ω_1 y ω'_1 , en otra homología de centro V_1 y eje h_α (núm. 2,5)

La homología queda así definida por un par de puntos homólogos A y A' , siendo A' la intersección de α con la generatriz VA . De aquí, la construcción:

Hallar la intersección A' de α con la arista \overline{VA} y prolongar los lados $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, ... de la base, hasta cortar a h_α en M_1 , N_1 , ..., etc. El punto A' se ha hallado, por medio del plano β , proyectante vertical de \overline{VA} , que corta al α , según i_1-i_2 y ésta corta a $\overline{V_1A_1}$, en el homólogo A'_1 de A_1 .

La recta A'_1M_1 , homóloga de A_1B_1 , corta a $\overline{V_1B_1}$, en B'_1 ; la B'_1N_1 , homóloga de B_1C_1 , corta a $\overline{V_1C_1}$, en C'_1 , y así sucesivamente, hasta completar la sección. Refiriendo los vértices A'_1 , B'_1 , ..., etc. a las proyecciones verticales de las aristas, se obtiene la otra proyección ω'_1 de la sección.

Las proyecciones $a'_2 \equiv A'_2B'_2$, $b'_2 \equiv B'_2C'_2$, ... de los lados también pueden obtenerse, trazando $A'_2M'_2$ que corta a $\overline{V_2B_2}$, en B'_2 y luego, $B'_2N'_2$ que corta a $\overline{V_2C_2}$, en C'_2 , ..., etc.

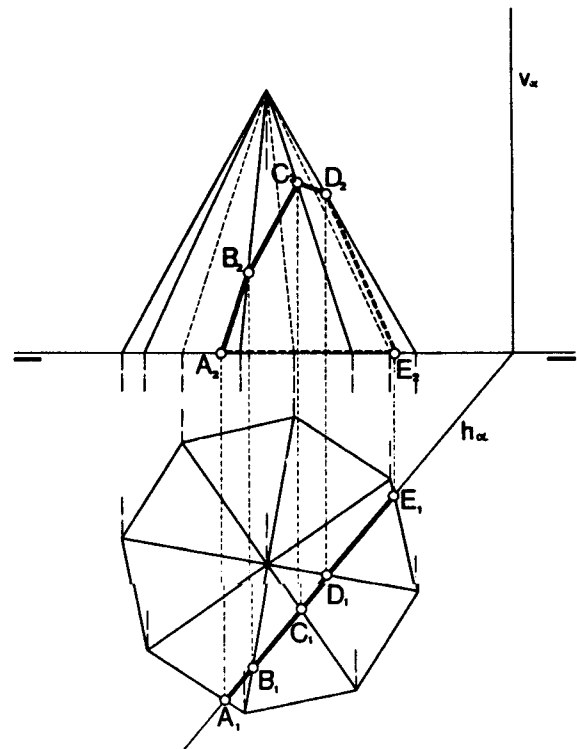


Fig. 13.7. - Sección de plano vertical.

13.4. Sección de plano proyectante

Si α es un plano de canto (Fig. 13.6), los vértices A_2 , B_2 , C_2 , D_2 , E_2 y F_2 son las intersecciones de v_α con las proyecciones verticales de las aristas. Refiriendo estos puntos a la proyección horizontal de las aristas, se obtiene la planta $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ de la sección.

Si α es vertical (Fig. 13.7), se hallan las intersecciones A_1 , B_1 , C_1 , D_1 y E_1 de h_α con la planta de la pirámide y se refieren a la proyección vertical, en $A_2B_2C_2D_2E_2$.

13.5. Intersección de recta y pirámide

Se halla (Fig. 13.8) valiéndonos del plano auxiliar α , definido por la recta dada r_1-r_2 y el vértice V de la pirámide. Para determinarlo, se une V con un punto C de r y se halla la traza H_1-H_2 de la recta VC , siendo

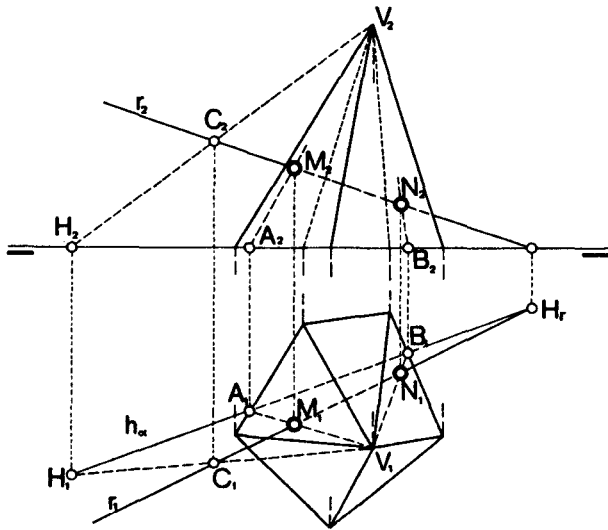


Fig. 13.8.—Intersección de recta y pirámide.

$h_\alpha \equiv H_1H_2$, la traza del plano que corta a la base, en A_1 y B_1 . Los puntos de corte de r_1 con $\overline{V_1A_1}$ y $\overline{V_1B_1}$, son las intersecciones M_1 y N_1 buscadas, referidas a r_2 , en M_2 y N_2 . Como comprobación, $\overline{V_2A_2}$ y $\overline{V_2B_2}$ han de pasar por M_2 y N_2 .

13.6. Desarrollo

Como ya se dijo (núm. 11,2), las superficies desarrollables (cono, cilindro, pirámide, prisma, etc.) pueden desarrollarse sobre un plano, sin roturas ni deformaciones. En el caso de la pirámide, el desarrollo se obtiene (Fig. 13.9-a), cortando la superficie por la arista \overline{VA} , por ejemplo, y abatiendo la cara VAB , sobre el plano de la cara VBC , tomando como charnela \overline{VB} . Luego, se abaten las dos caras sobre el plano $[VCD]$ y así sucesivamente, hasta obtener el desarrollo (Fig. b).

El problema se reduce, por tanto, a dibujar las caras, en verdadera magnitud, de modo que cada una tenga una arista común con la siguiente y estén colo-

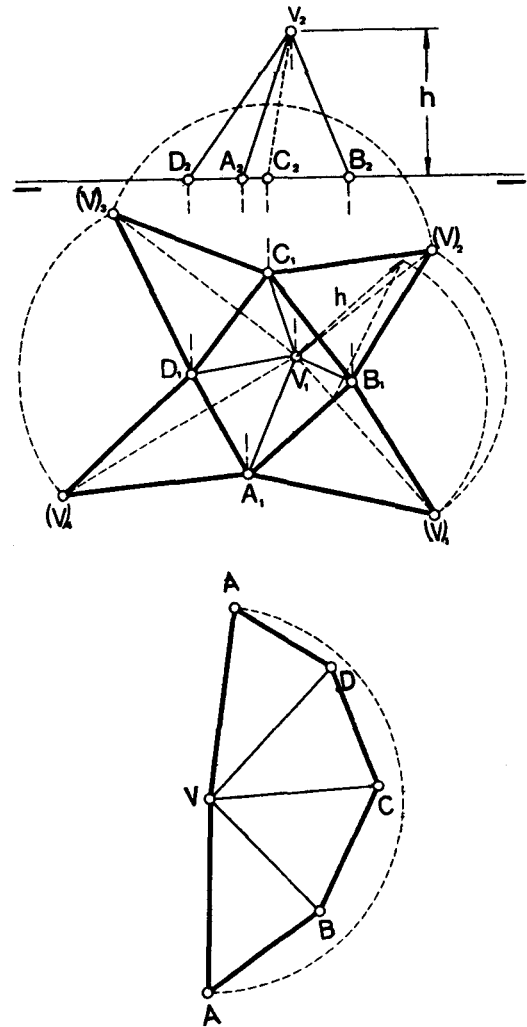


Fig. 13.9.—Desarrollo de la pirámide, por abatimiento de las caras.

cadas en el mismo orden que en la pirámide. La verdadera magnitud de las caras se obtiene por los dos métodos que siguen:

a) *Por abatimiento.* Basta abatir cada cara sobre el plano horizontal de la base, como ya se sabe. En este caso, resulta más rápido abatir sólo la cara VAB , por ejemplo, en $(V)_1A_1B_1$ y trazar por V_1 perpendiculares a los lados $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$ y $\overline{D_1A_1}$ de la base. Luego, con centro en B_1 , se traza el arco $(V)_1(V)_2$, que corta a $V_1(V)_2$, en $(V)_2$; con centro en C_1 , el arco $(V)_2(V)_3$ que corta a $V_1(V)_3$, en $(V)_3$, y con centro en D_1 , el arco $(V)_3(V)_4$ que corta a $V_1(V)_4$, en $(V)_4$. Para dibujar el desarrollo (Fig. b), se ha tomado como arista de apertura la VA .

b) *Por giro* (Fig. 13.10). Basta girar todas las aris-

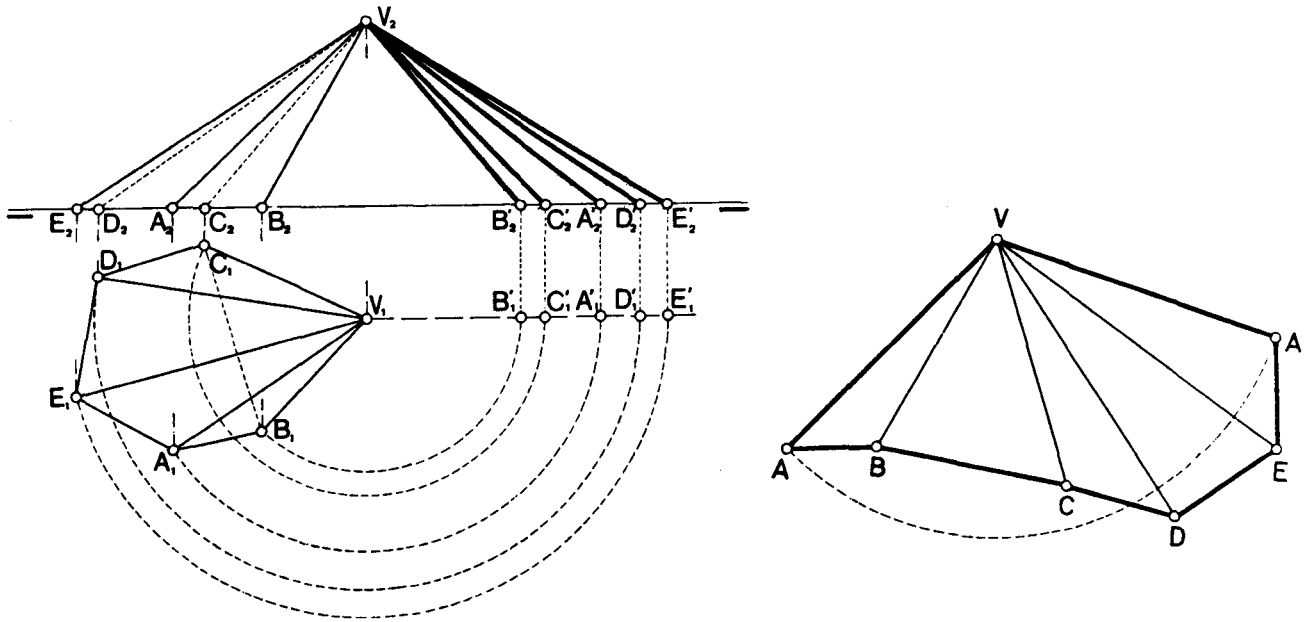


Fig. 13.10.—Desarrollo de la pirámide, por giro de las aristas.

tas, alrededor de un eje vertical, trazado por V , hasta su posición frontal, quedando representadas, en verdadera magnitud, en $\overline{V_2B'_2}$, $\overline{V_2C'_2}$, ..., etc.; pudiéndose así

dibujar el desarrollo (Fig. b), como se ha indicado. (Ver núms. 9,1 a 9,10 de n/E. de G.D.).

14. PRISMA

14.1. Representación

Sea h la altura de un prisma recto, de base exagonal, de plano α (Fig. 14.1) y proyección $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, dada. La proyección vertical $A_2B_2\dots$

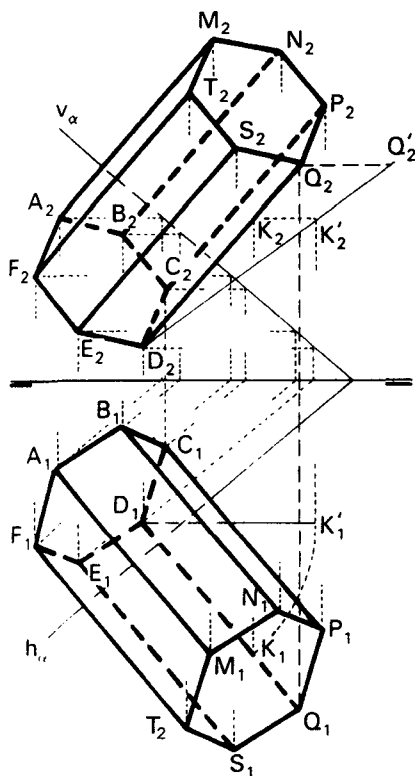


Fig. 14.1. - Prisma recto de base α .

F_2 se obtiene, trazando por los vértices, horizontales de α y refiriendo a ellas las proyecciones dadas.

La arista \overline{DQ} , por ejemplo, es normal a α (de proyecciones normales a h_α y v_α) y su extremo Q se halla, girando un punto K_1-K_2 de ella, alrededor del eje verti-

cal (no dibujado), trazado por D , hasta su posición frontal DK' . Se toma, luego, sobre D_2K_2' , la longitud $D_2Q_2' = h$ y al deshacer el giro, se obtiene la proyección Q_2 y luego, la Q_1 .

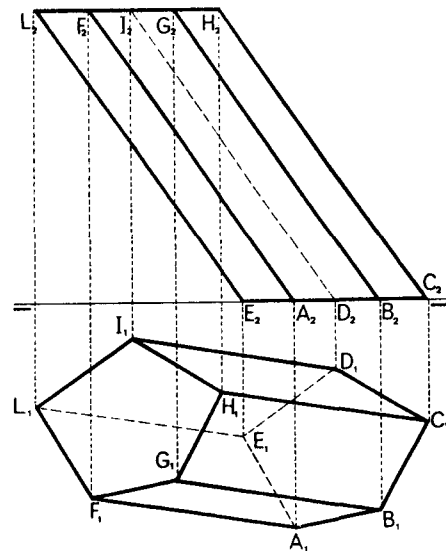


Fig. 14.2. - Prisma oblicuo de base horizontal.

Las restantes aristas se obtienen, trazando por los vértices segmentos \overline{CP} , \overline{BN} , ..., iguales y paralelos a \overline{DQ} . Como comprobación, los lados \overline{QP} , \overline{PN} , ..., etc. de la base superior han de ser paralelos a \overline{DC} , \overline{CB} , ..., etc.

El contorno aparente horizontal $FABCPQSTF$ y el vertical $AMNPQDEFA$ determinan las aristas vistas y las partes ocultas, como se ve en la figura.

Si la base es horizontal (Fig. 14.2), la representación es mucho más sencilla y las aristas vistas se hallan sin dificultad alguna.

14.2. Sección plana

Como ya dijimos en el núm. 13,3, la sección producida en un prisma oblicuo (Fig. 14.3) por un plano α , se corresponde con la base en una homología de vértice impropio (dirección de las aristas), es decir, en una

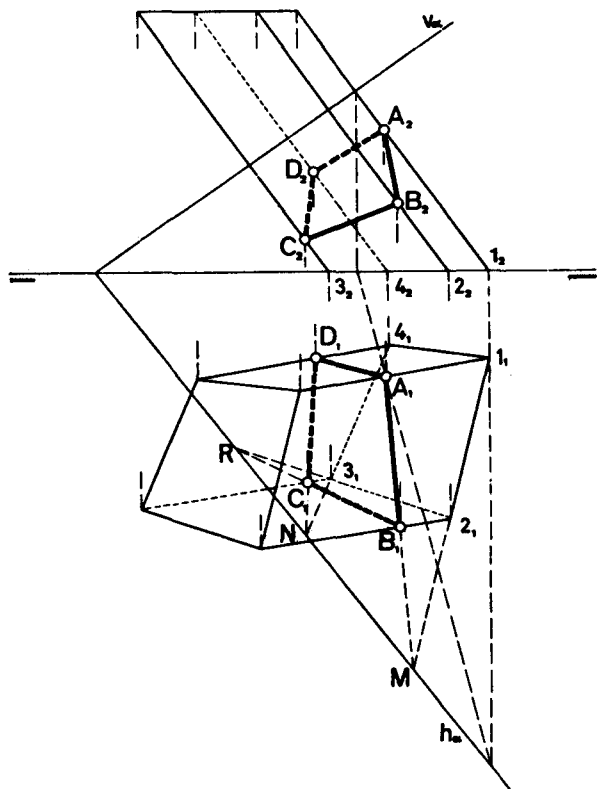


Fig. 14.3. - Sección plana del prisma.

afinidad de eje h_α y dirección de afinidad, la de las aristas y sus proyecciones se corresponden, en otra afinidad de eje h_α y dirección de afinidad I_1A_1 (núms. 2,1 y 2,5). De aquí, la construcción:

Primero se halla la intersección A_1-A_2 de la arista I_1-I_2 con α (por medio del plano proyectante vertical de la arista) y se prolongan los lados de la base hasta sus intersecciones M, R, \dots con h_α . La recta A_1M , homóloga de I_1I_2 , corta a la arista 2_1 , en B_1 ; la B_1R , homóloga de 2_1R , corta a la arista 3_1 , en C_1 , y así, sucesivamente, hasta completar la sección $A_1B_1C_1D_1$.

Refiriendo, luego, los vértices A_1, B_1, \dots a las proyecciones verticales de las aristas, se obtiene la otra proyección $A_2B_2C_2D_2$ de la sección.

Si α es de canto (Fig. 14.4), los vértices A_2, B_2, \dots de la sección son las intersecciones de v_α con las proyecciones verticales de las aristas. Refiriendo estos puntos a la planta de cada arista, se obtiene la planta $A_1B_1C_1D_1E_1$ de la sección.

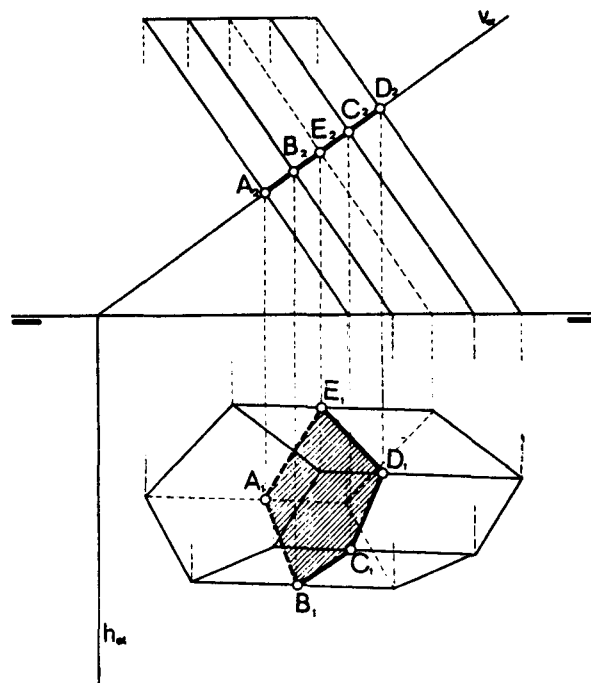


Fig. 14.4. - Sección plana de canto.

14.3. Intersección de recta y prisma

Se halla, trazando por un punto C_1-C_2 de la recta dada r_1-r_2 (Fig. 14.5), la paralela s_1-s_2 a las aristas laterales del prisma. Las trazas H_r y H_s de r y s determi-

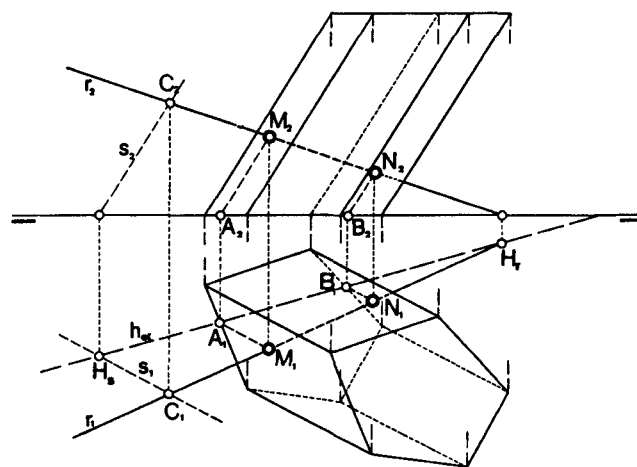


Fig. 14.5. - Intersección de recta y prisma.

nan la traza h_α del plano auxiliar α que corta a la base del prisma en A_1 y B_1 . Las intersecciones AM y BN de α con el prisma cortan a r en los puntos buscados M_1-M_2 y N_1-N_2 .

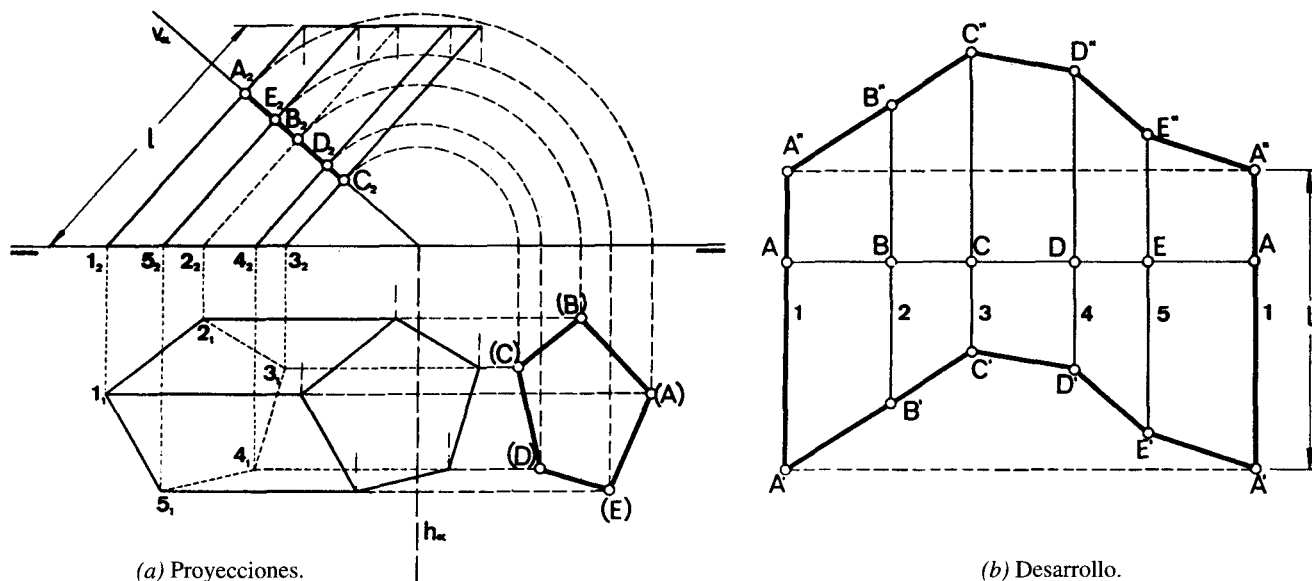


Fig. 14.6. - Desarrollo de prisma de aristas frontales.

14.4. Desarrollo

a) Se obtiene, dibujando las caras, en verdadera magnitud, a partir de la arista de apertura, de modo que cada una tenga una arista común con la siguiente y esté colocada en el mismo orden en que se encuentran en el prisma.

La verdadera magnitud de las caras se obtiene, por abatimiento de éstas o por medio de la sección recta, de lados perpendiculares a las aristas. En el desarrollo, las aristas son paralelas entre sí, y el perímetro de la sección recta es una recta perpendicular a las aristas, lo cual simplifica las construcciones.

Si las aristas son frontales (Fig. 14.6), se traza un plano normal a las aristas, que corta al prisma, según la sección recta $A_2B_2C_2D_2E_2$ (no es necesaria la proyección horizontal), abatida en $(A)(B)(C)(D)(E)$.

El desarrollo se obtiene (Fig. b), tomando sobre una recta, los lados $\overline{AB} = \overline{(A)(B)}$, $\overline{BC} = \overline{(B)(C)}$, ... de la sección recta, y trazando por A, B, C, \dots perpendiculares a ella. Sobre las perpendiculares, se llevan luego

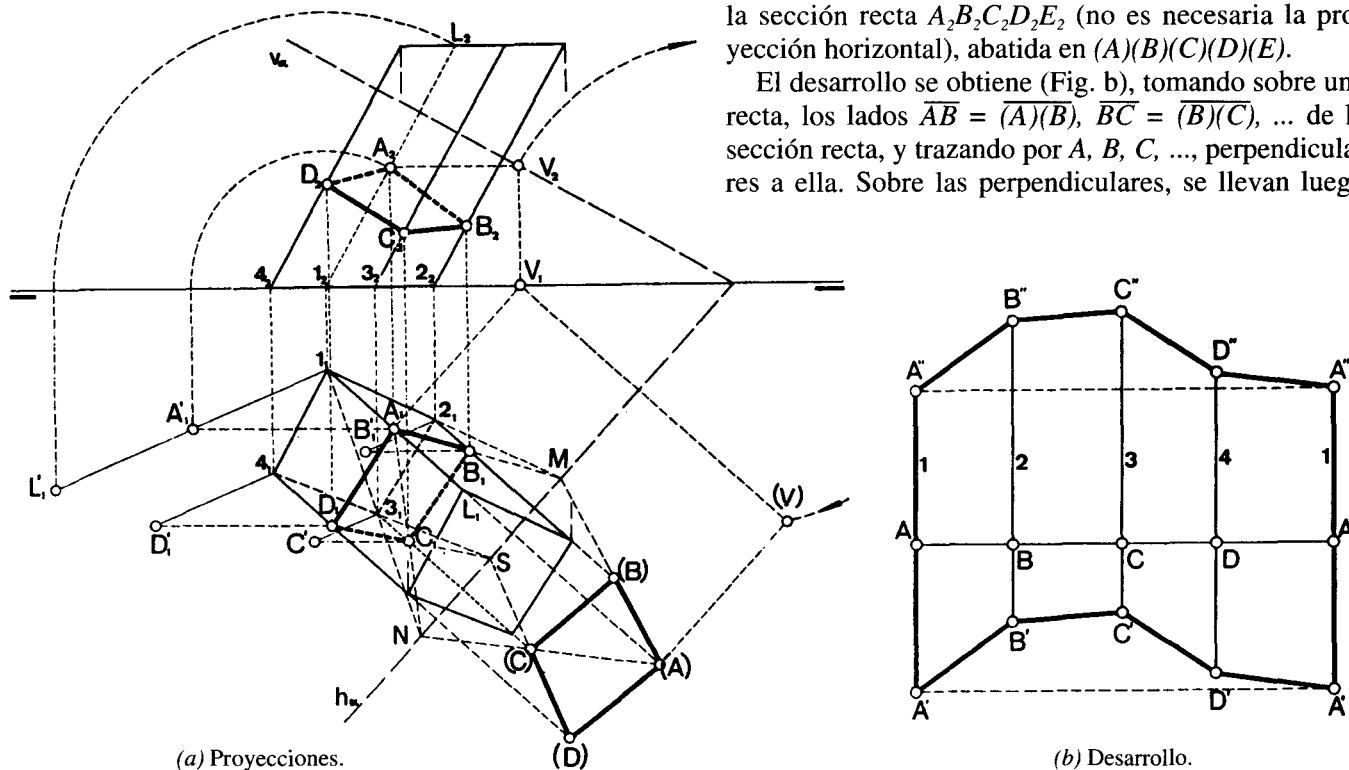


Fig. 14.7. - Desarrollo de un prisma cualquiera.

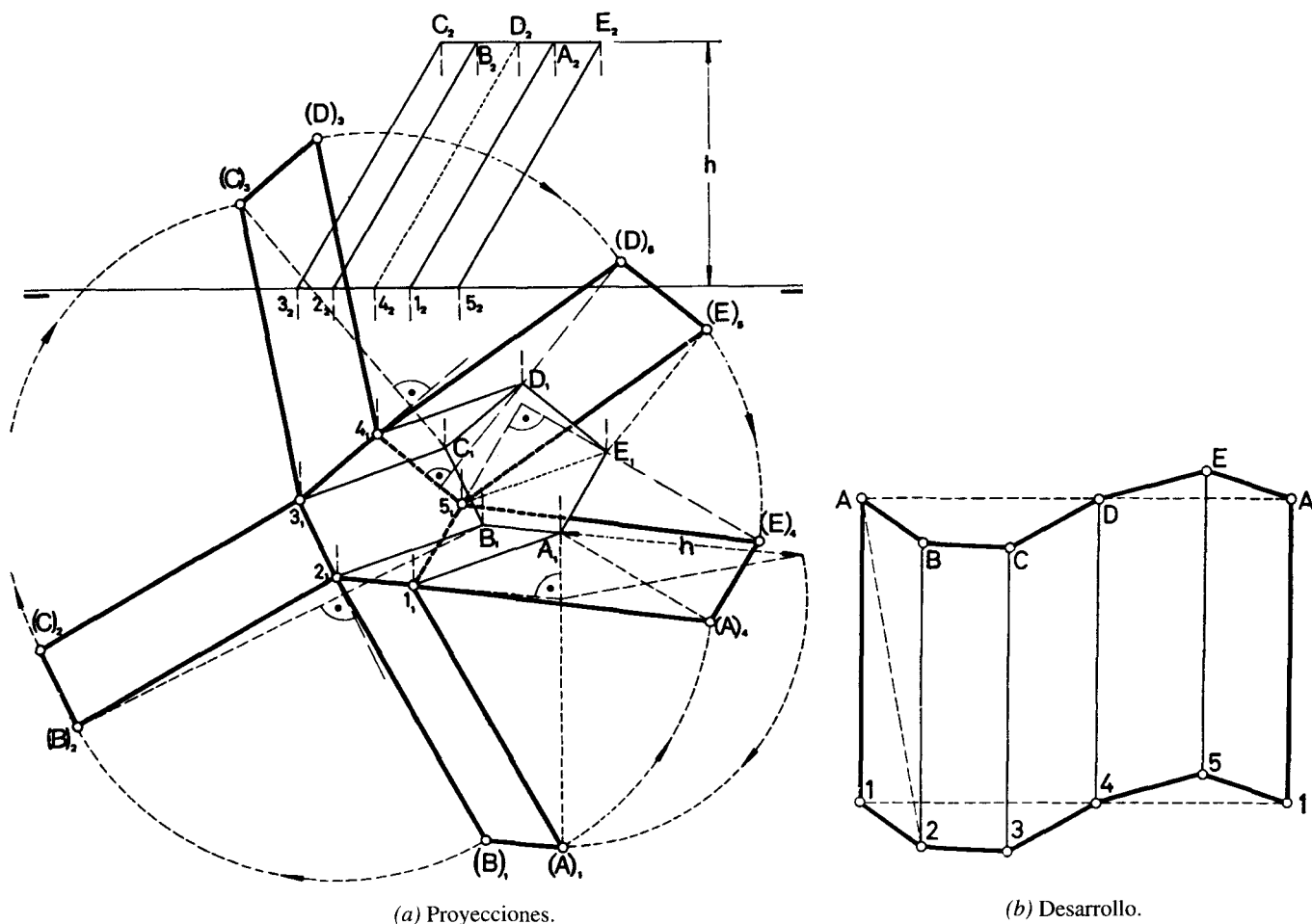


Fig. 14.8.—Desarrollo por abatimiento de caras.

longitudes $\overline{AA'} = \overline{A_2I_2}$, $\overline{BB'} = \overline{B_2I_2}$, ..., y a partir de A' , B' , ..., etc., longitudes $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \dots = l$ (longitud de la arista) que permiten dibujar el desarrollo.

Las quebradas $A'B'C'...$ y $A''B''C''...$ son los desarrollados de los perímetros de las bases del prisma.

b) Si las aristas no son frontales (Fig. 14.7-a) se procede de forma análoga, trazando el plano α , normal al prisma, por medio de la horizontal que pasa por un punto A de la arista l . Se halla, luego, la sección $ABCD$ (sección recta del prisma), como ya se sabe, y se abate sobre el horizontal, en $(A)(B)(C)(D)$, en verdadera magnitud.

La longitud de la arista l se ha hallado, girando el segmento \overline{IA} , alrededor de un eje de punta (no dibujado) que pasa por I_1-I_2 , hasta situarlo en el horizontal, en $\overline{I_1A'_1}$, siendo $\overline{I_1I'_1} = l$ la longitud de la arista. Si ahora se giran los segmentos $\overline{2B}$, $\overline{3C}$ y $\overline{4D}$, alrededor de ejes de punta, trazados por los vértices 2, 3 y 4, hasta situarlos en el horizontal, los segmentos girados son paralelos al $\overline{I_1A'_1}$, por ser los ejes paralelos lo mismo que los segmentos. Basta pues trazar por los puntos 2, 3, y 4, paralelas a $\overline{I_1A'_1}$ que cortan respecti-

vamente a las paralelas a LT , trazadas por B_1 , C_1 y D_1 , siendo $\overline{2_1B'_1}$, $\overline{3_1C'_1}$ y $\overline{4_1D'_1}$ los segmentos girados, en verdadera magnitud, que permiten dibujar el desarrollo, como antes se ha dicho:

Tomar sobre una recta AA (Fig. b), los lados $\overline{AB} = \overline{(A)(B)}$, $\overline{BC} = \overline{(B)(C)}$, ... de la sección recta, y tomar sobre las perpendiculares a ella, trazadas por A , B , ..., etc., longitudes $\overline{AA'} = \overline{I_1A'_1}$, $\overline{BB'} = \overline{2_1B'_1}$, ..., etc. y luego, $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \dots = \overline{I_1I'_1} = l$.

c) También pueden abatirse las caras (Fig. 14.8), abatiendo el vértice A , por ejemplo, en $(A)_1$, y trazando $\overline{(A)_1(B)_1}$ y $\overline{2_1(B)_1}$ paralelas a $\overline{1_1I_1}$ y $\overline{1_1(A)_1}$, respectivamente. A partir de esto, se obtiene el abatimiento de la cara $B_2C_2D_2$, trazando por B_2 la normal al lado $\overline{3_2I_2}$, hasta cortar en $(B)_2$ el arco $(B)_1(B)_2$, de centro 2_2 , y así sucesivamente hasta abatir todas.

Finalmente, los paralelogramos de las caras (Fig. b) se han construido por medio de dos lados contiguos \overline{AI} y $\overline{I_2}$ y la diagonal $\overline{A_2I_2}$, evitando así el empleo de ángulos, que es más inexacto, siendo la arista de apertura la IA . (Ver núms. 9,10 a 9,26 de n/E. de G.D.).

15. CONO

15.1. Generalidades

Como ya dijimos (núm. 13,1), cono es el cuerpo limitado por una hoja de una superficie cónica y un plano cualquiera que corta a todas las generatrices, sin pasar por el vértice; es decir, que el cono es un volumen. A veces se confunden las palabras *cono* y *superficie cónica* o se emplean ambas indistintamente.

Si el cono tiene por base un círculo, se llama *circunlar recto* u *oblicuo*, según que la recta que une el vértice con el centro de la base sea o no perpendicular al plano de ésta. Nosotros estudiaremos sólo los de base circular, sean o no de revolución.

15.2. Representación

a) En general, el cono queda definido por su vértice V_1 - V_2 (Fig. 15.1) y por una de sus secciones planas ω (directriz), representada por su proyección horizontal, por ejemplo, y el plano α que la contiene. La otra proyección se halla fácilmente por horizontales, como se explicó en el núm. 10,2.

Las generatrices son las rectas VA , VB , ..., etc. que unen el vértice V con los puntos A_1 - A_2 , B_1 - B_2 , ... de ω .

La tangente $t_i \equiv V_iT_i$ a ω_i es proyección de la generatriz del contorno aparente horizontal y su traza H_i per

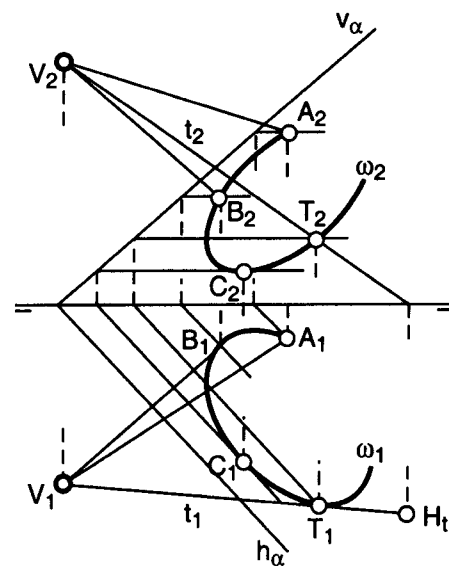


Fig. 15.1.—Cono de directriz plana ω

tenece a la traza horizontal del cono y es el punto de tangencia de t_i con dicha traza.

b) Lo más sencillo es representar el cono con su base ω en el horizontal, como así haremos en lo sucesivo (Fig. 15.2). Todo plano secante de canto, trazado por el vértice, corta al cono según dos generatrices a y

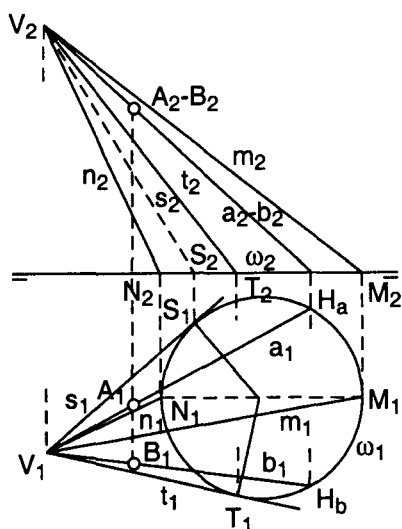


Fig. 15.2. - Cono de base horizontal.

b , de proyecciones $a_2 \equiv b_2$ coincidentes con su traza vertical. Se exceptúan los tangentes al cono, cuyas generatrices de tangencia m_2 y n_2 son las del contorno aparente vertical. Análogamente, los planos secantes verticales cortan al cono, según dos generatrices, excepto los dos tangentes cuyas generatrices de tangencia (generatrices de contorno aparente horizontal) se proyectan, según las tangentes t_1 y s_1 a ω_1 , trazadas desde V_1 .

Se obtiene así el contorno aparente horizontal $VSM TV$ (formado por las generatrices s y t y el arco SMT de ω) y el contorno aparente vertical $VNTMV$ que determinan las partes vistas en ambas proyecciones. Si V_1 es interior a ω_1 , no existe contorno aparente horizontal.

Las proyecciones de un punto de proyección dada A_2 , se hallan trazando la generatriz $V_2A_2 \equiv a_2 \equiv b_2$, cuyas trazas H_a y H_b determinan las proyecciones A_1 y B_1 de los puntos buscados, situadas en $a_1 \equiv V_1H_a$ y $b_1 \equiv V_1H_b$. Análogamente se procedería, conociendo la proyección horizontal.

15.3. Plano tangente

a) *Plano tangente en un punto A de la superficie cónica* (Fig. 15.3) Es el determinado por la generatriz

$g \equiv AB$ y la tangente al círculo sección, c , de plano paralelo a la base (núm. 11,3-b). También queda determinado por la generatriz \overline{AB} y la tangente s a la base, en la traza B de la generatriz. Este segundo método,

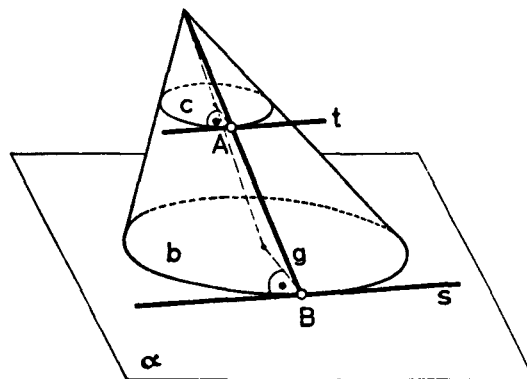


Fig. 15.3. - Plano tangente en A.

más práctico que el anterior, se basa en que *el plano tangente a una superficie desarrollable es tangente a la superficie en todos los puntos de la generatriz*, luego también lo es en B.

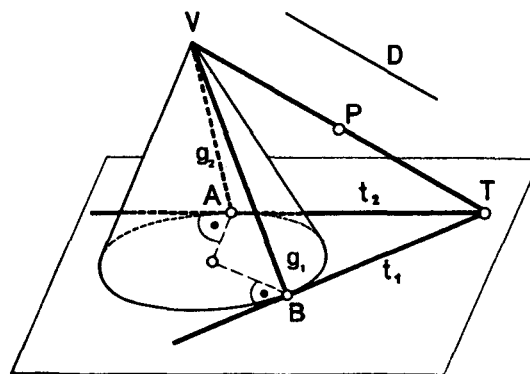


Fig. 15.4. - Plano tangente incidente con P o paralelo a D.

b) *Plano tangente que pase por un punto exterior P* (Fig. 15.4). Son los determinados por la recta VP y las tangentes t_1 y t_2 a la base del cono, trazadas desde la intersección (traza) T de VP con el plano de la base. Las generatrices de tangencia son las g_1 y g_2 , determinadas por los puntos de tangencia B y A de t_1 y t_2 , respectivamente.

c) *Plano tangente paralelo a una dirección D* (Fig. 15.4). Basta trazar, por V , la paralela VT a la dirección D , reduciéndose este caso al anterior, puesto que todo plano que pase por VT es paralelo a D .

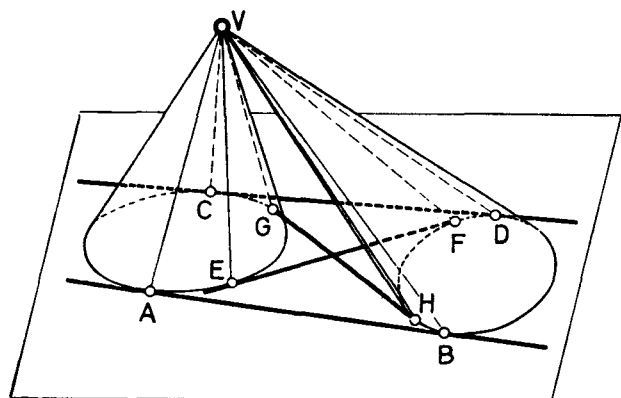


Fig. 15.5.—Plano tangente a dos conos de vértice común.

d) Plano tangente a dos conos de vértice común y bases coplanarias (Fig. 15.5). Son los determinados por V y las tangentes comunes a las bases de los conos que, en este caso, son AB , CD , EF y GH . El problema puede tener de cero a cuatro soluciones, según la posición de las bases.

Esto se aplica para trazar un plano tangente a un cono y que forme un ángulo dado con una recta o con un plano dado, o para trazar un plano tangente a un cono y a una esfera.

15.4. Aplicación al diédrico

a) En la figura 15.6, para hallar el plano α , tangente al cono de vértice V , en un punto A_1 de la superficie (no es necesaria A_2), se traza la generatriz \overline{VA} y por su traza B , la tangente t_1 a la base. El plano tangente es el $\alpha \equiv [V, t_1]$ (núm. 15,3-a), de trazas $h_\alpha \equiv t_1$ y v_α determinada por medio de la horizontal r_1-r_2 de α , trazada por V .

b) Si α ha de pasar por un punto A_1-A_2 , exterior al cono (Fig. 15.7), se halla la traza H_s de la recta $s \equiv VA$ y, desde H_s , las tangentes a la base (sólo se ha dibujado la t_1 , tangente a la base en B_1). El plano tangente es el $\alpha \equiv [V, t_1]$, de trazas $h_\alpha \equiv t_1$ y v_α determinada por la horizontal r_1-r_2 de α . La generatriz de tangencia es la $V_1B_1-V_2B_2$ (núm. 15,3-b).

15.5. Sección plana

a) Sección de plano que pasa por el vértice. Análogamente a lo expuesto en la Fig. 13.4, en un cono cuádrico de base ω , todo plano que pase por el vértice V y sea secante, tangente o exterior al cono, corta a éste, según dos generatrices, una o ninguna, respectivamente.

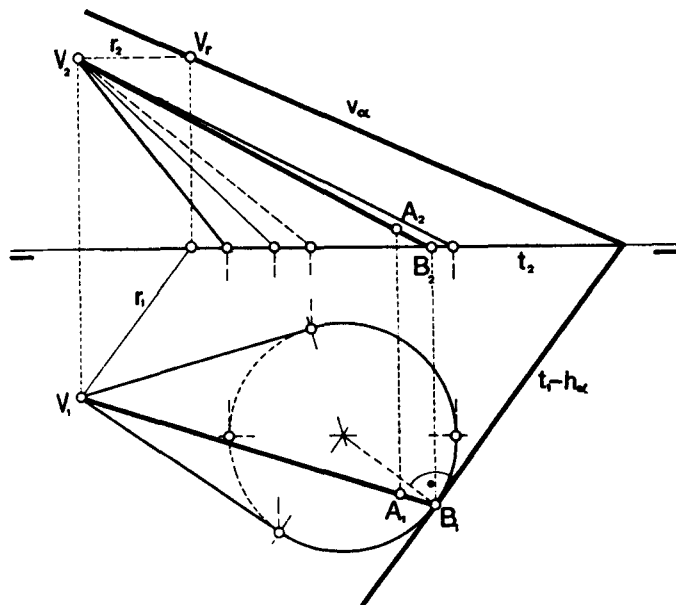


Fig. 15.6.—Plano tangente al cono, en A_1-A_2 .

te. Las generatrices de corte son las determinadas por los puntos de corte de la traza t_α con ω .

b) Sección de plano que no pasa por el vértice. La sección es la curva definida por las intersecciones de α con las generatrices. Si α es paralelo a dos, una o

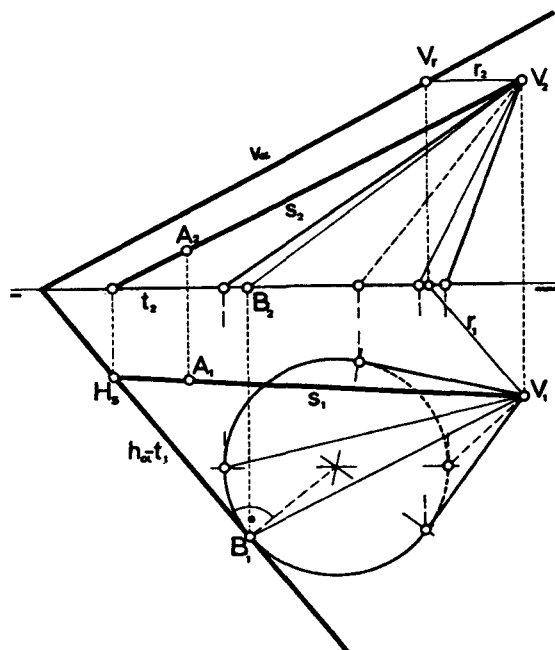


Fig. 15.7.—Plano tangente incidente con A_1-A_2 .

ninguna generatriz, la sección es hipérbola, parábola o elipse, respectivamente, por tanto:

Para determinar el género de la sección producida

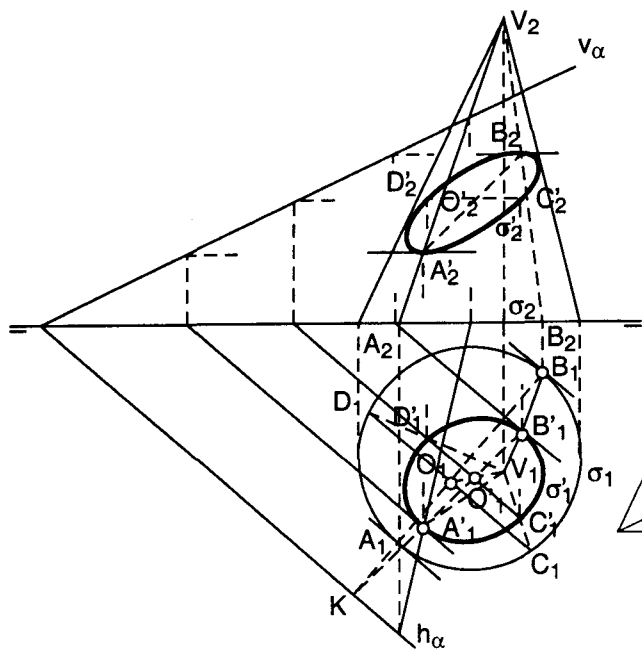


Fig. 15.8. - Sección de plano α del cono.

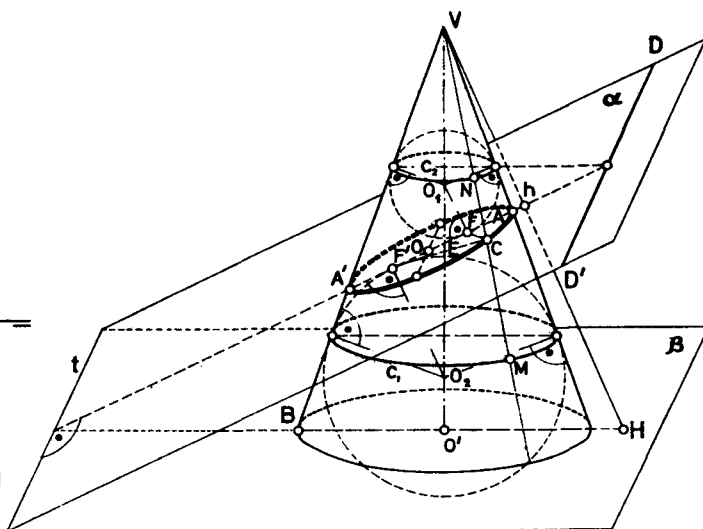


Fig. 15.9. - Sección elíptica.

Conviene advertir que en la homología entre dos secciones cónicas, los centros de σ_i y σ'_i no son homólogos pero, en la afinidad entre secciones cilíndricas, sí (núms. 7,5 y 7,6 de n/G.D.S. y A.).

en un cono cuádrico por un plano α , se traza por el vértice V , un plano β , paralelo al α . Según que β sea exterior, tangente o secante al cono, la sección será elipse, parábola o hipérbola, respectivamente, luego el cono admite las tres clases de secciones. De aquí, el nombre de secciones cónicas o simplemente, cónicas.

c) Aplicación al diédrico (Fig. 15.8). Como ya se dijo en el núm. 13,3, la sección σ' , de plano α y la base σ del cono se corresponden en una homología de centro V y eje h_α y sus proyecciones σ'_i y σ_i , en otra homología de centro V_i y eje h_α .

El par de puntos homólogos que nos interesa es el extremo A del diámetro \overline{AB} de σ , normal a h_α y el punto de corte A' de α , con la generatriz VA (habiéndonos auxiliado del plano proyectante vertical de VA), ya que siendo las tangentes a σ , en A y B , paralelas al eje, las tangentes a σ' en A' y B' (homólogo de B) también lo serán, luego $\overline{A'B'}$ es un diámetro de σ' y su centro O' , el punto medio de $\overline{A'B'}$. (El punto B'_i es la intersección de KA'_i con $\overline{V_iB_i}$).

Finalmente, el homólogo del diámetro $\overline{C'D'}$ de σ'_i , paralelo a h_α es la cuerda $\overline{C_iD_i}$ de σ , trazada por el homólogo O_i de O'_i , y sus extremos C_i y D_i son los homólogos de C_i y D_i , respectivamente, siendo $\overline{A'B'_i}$ y $\overline{C_iD_i}$ diámetros conjugados de σ'_i .

Refiriendo A'_i y B'_i a las generatrices $\overline{V_2A_2}$ y $\overline{V_2B_2}$ y C'_i y D'_i , a la horizontal de α trazada por O'_i , se obtienen dos diámetros conjugados A_2B_2 y C_2D_2 de σ'_2 que permiten dibujar ambas, como ya se sabe (núm. 10,4).

15.6. Secciones planas del cono de revolución

Los tres géneros de sección, producidas por un plano α en un cono de revolución, presentan interesantes propiedades que vamos a exponer.

En la figura 15.9, el eje mayor $\overline{AA'}$ de la elipse-sección es la intersección de α con el plano normal a él que pasa por el eje $\overline{VO'}$ del cono (proyección ortogonal del eje sobre α) y es también línea de máxima pendiente de α , respecto a β (plano de la base del cono), y corta al cono en los vértices A y A' de la elipse.

Los focos son los puntos de tangencia F y F' de las esferas de centros O_1 y O_2 , tangentes a α y a la superficie cónica, y el centro, el punto medio O de $\overline{AA'}$, no coincidente con el punto de corte de $\overline{AA'}$, y $\overline{VO'}$.

Finalmente, la longitud $\overline{AA'} = 2a$ es igual a la del segmento de generatriz \overline{MN} , limitado por los círculos de tangencia c_1 y c_2 de las esferas de centro O_1 y O_2 . En efecto, \overline{MN} corta a la elipse en el punto C , y se verifica:

$$\overline{CM} = \overline{CF'} \quad \text{y} \quad \overline{CF} = \overline{CN}$$

por ser tangentes a cada esfera, trazadas desde C , luego:

$$\overline{CF} + \overline{CF'} = \overline{CN} + \overline{CM} = \overline{MN} = 2a$$

En resumen, el eje mayor $\overline{AA'}$ es la cuerda de la superficie cónica, normal a $t \equiv [\alpha, \beta]$, trazada por $E \equiv [\alpha, \overline{VO'}]$ y el eje menor, la cuerda paralela a t , trazada por O (punto medio de $\overline{AA'}$).

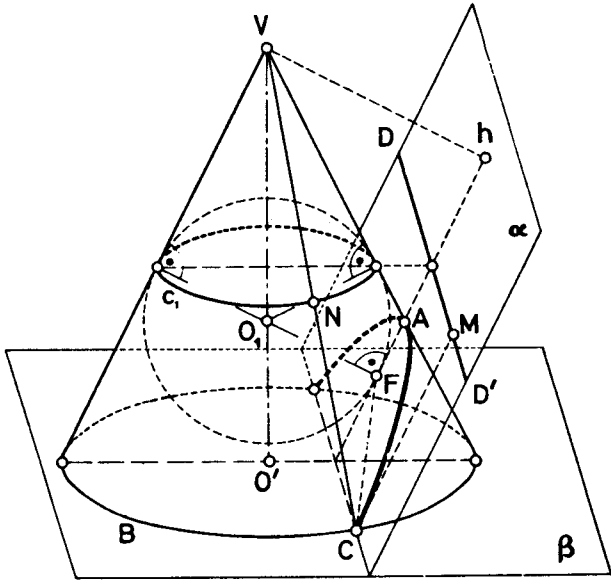


Fig. 15.10. - Sección parabólica.

Análogamente, en la figura 15.10, el eje AF de la parábola-sección es la intersección de α con el plano perpendicular a él, trazado por el eje VO' del cono (proyección ortogonal de VO' sobre α) y corta al cono en el vértice A de la parábola.

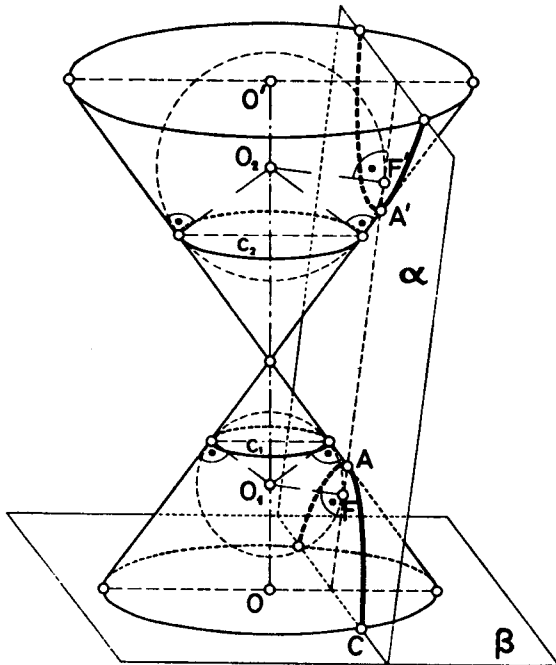


Fig. 15.11. - Sección hiperbólica.

El foco F es el punto de tangencia de α con la esfera de centro O_1 , tangente a la superficie cónica y a α , y la directriz DD' es la intersección de α con el plano

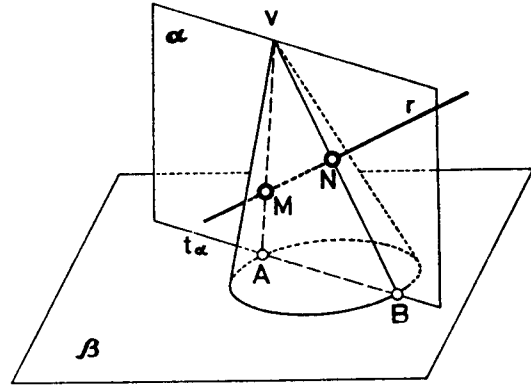


Fig. 15.12. - Intersección de recta y cono.

del círculo de tangencia c , de la esfera de centro O_1 y el cono.

Por último, en la figura 15.11, el eje, vértices y focos se obtienen, como se ha indicado en los casos anteriores.

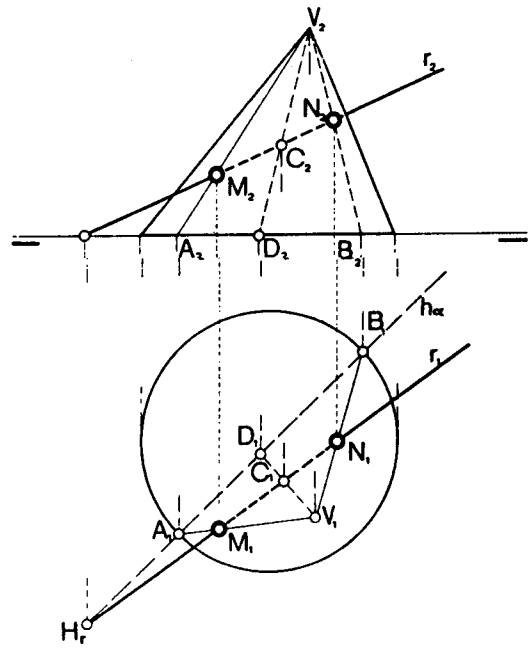


Fig. 15.13. - Trazado en diédrica.

15.7. Intersección de recta y cono

Como se explicó en la pirámide, se traza el plano α (Fig. 15.12) determinado por V y la recta dada r que corta al cono, según las generatrices \overline{VA} y \overline{VB} . Las intersecciones $M \equiv [r, \overline{VA}]$ y $N \equiv [r, \overline{VB}]$ son los puntos de corte de r con el cono. En la figura 15.13, puede verse la construcción, en diédrica.

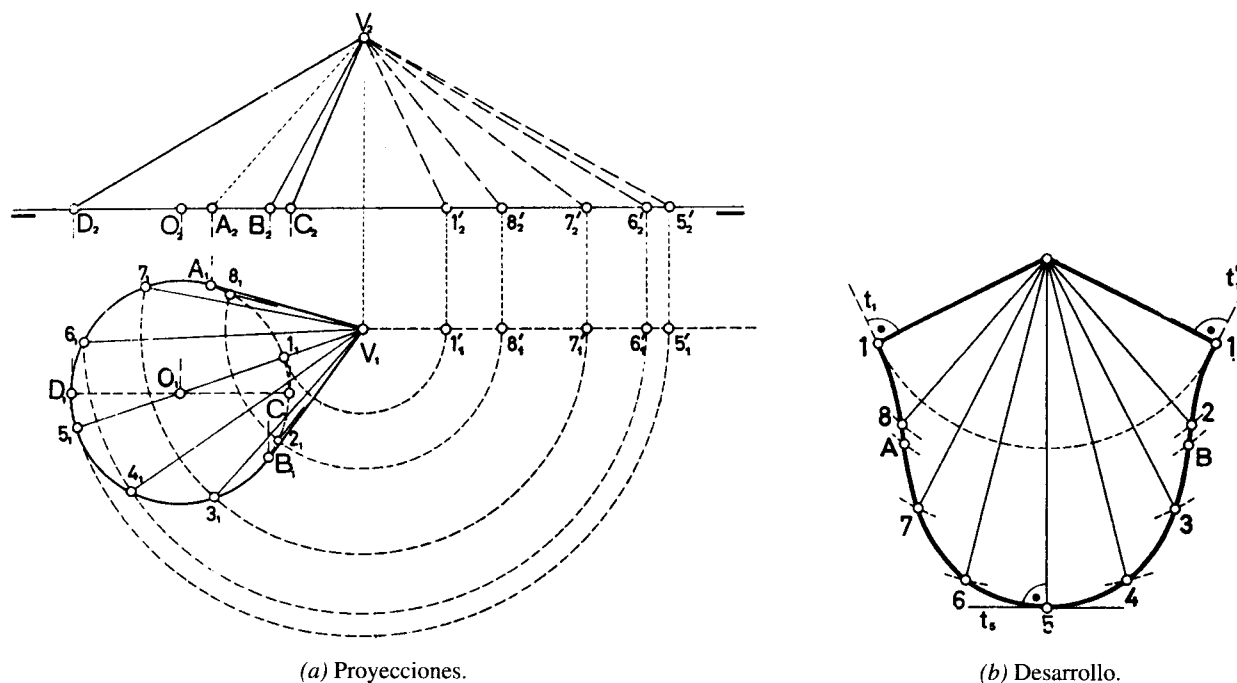


Fig. 15.14.—Desarrollo del cono de revolución

15.8. Desarrollo

a) *Cono oblicuo de base circular* (Fig. 15.14). En general, el desarrollo de un cono oblicuo se obtiene de modo aproximado, inscribiendo en él una pirámide (Fig. a) y desarrollando ésta (núm. 13.6). Para ello, se divide la circunferencia de la base, en un cierto número de partes (ocho en la figura), y se trazan las generatrices que pasan por los puntos de división, que son las de contacto de cono y pirámide inscrita. El desarrollo será tanto más aproximado, cuanto mayor sea el número de divisiones.

La verdadera magnitud de las generatrices se ha obtenido, girándolas alrededor del eje vertical, trazado por V , hasta su posición frontal, lo cual permite construir las caras laterales triangulares de la pirámide, por conocerse los tres lados. Así se han obtenido los puntos 1, 2, 3, ... (Fig. b) que, unidos con trazo continuo, nos dan el desarrollo pedido. La curva 1, 2, 3, ..., 8, 1 se llama *transformada de la circunferencia de la base en el desarrollo*.

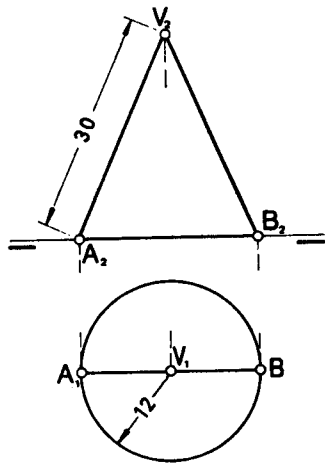
Por ser el cono simétrico respecto al plano vertical que contiene a \overline{VO} , conviene tomar como generatriz de apertura la $\overline{V1}$ o $\overline{V5}$, contenidas en él. Tomando la $\overline{V1}$, el desarrollo es simétrico respecto a la $\overline{V5}$. Por otra parte, si se divide la circunferencia de la base en un número par de partes iguales, a partir de $\overline{V1}$ o $\overline{V5}$, se verifica: $\overline{V2} = \overline{V8}$, $\overline{V3} = \overline{V7}$; ..., etc., lo cual simplifica la construcción.

En el desarrollo, se conservan invariables (núm. 15,2 de n/G.D.S. y A.):

- Las longitudes de las generatrices $\overline{V1}$, $\overline{V2}$, ..., etc. o del cualquier segmento de ellas.
- Las longitudes de cualquier curva de la superficie, pero no sus curvaturas. De aquí, el nombre de *transformada*.
- El ángulo que la tangente a la base, en el punto 5 por ejemplo, forma con la generatriz $\overline{V5}$ que pasa por el punto de contacto ya que los planos tangentes al cono, según las sucesivas generatrices coinciden con el plano del desarrollo.
- Los puntos de inflexión de la transformada de la base (si existen) son los de tangencia A y B de las tangentes a la base, trazadas desde V_1 , siendo \overline{VA} y \overline{VB} las generatrices del contorno aparente horizontal del cono (núm. 17,3 de n/G.D.S. y A.).

Según esto: Las tangentes t_1 y t_5 a la transformada, en los puntos 1 y 5, son normales a la generatriz $\overline{V1}$ y $\overline{V5}$, respectivamente; los puntos de inflexión A y B se hallan, como intersección de la transformada con las generatrices \overline{VA} y \overline{VB} , y los ángulos que la tangente en estos puntos a la transformada forma con \overline{VA} y \overline{VB} se hallan, por abatimiento de éstas, alrededor de las tangentes a la base en A y B .

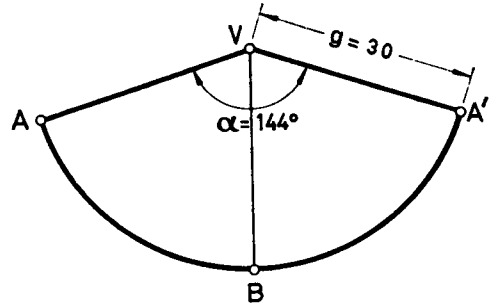
Estas propiedades simplifican la construcción y permiten dibujar el desarrollo con más exactitud, aunque éste nunca será exacto, como en el cono de revolución, por el error que supone tomar la cara plana de la pirámide, en vez de la superficie curva del cono. Esto origina en el desarrollo: un error de ángulo de cada cara, y otro, en la longitud de la transformada de la base. (Ver cap. 11 de n/E. de G.D.).



(a) Proyecciones.

$$\frac{l = 2\pi r}{2\pi g} = \frac{\alpha}{360} \quad \text{de donde:} \quad \alpha = \frac{360 \cdot r}{g}$$

y sustituyendo los valores de la figura:



(b) Desarrollo.

Fig. 15.15.—Desarrollo del cono de revolución.

b) *Cono de revolución* (Fig. 15.15). Por ser las generatrices de igual longitud d (Fig. a), el desarrollo de la superficie cónica es un sector circular (Fig. b), de radio g (generatriz del cono) y arco ABA' de longitud l igual a la de la circunferencia de la base del cono. Por otra parte, de la proporcionalidad entre ángulos y arcos de una circunferencia, se deduce:

$$\alpha = \frac{360 \times 12}{30} = 144^\circ$$

Esto permite dibujar el desarrollo (Fig. b), tomando con un transportador el ángulo $AVA' = 144^\circ$ y describiendo el arco ABA' , de centro V y radio $\overline{VA} = g = 30$ mm., siendo $V_1A_1 - V_2A_2$ la generatriz de apertura.

16. CILINDRO

16.1. Representación

La superficie cilíndrica queda definida por la directriz y, la dirección común de las generatrices y el cilindro, por una de las bases y la dirección y longitud de una generatriz. Si la base es de plano α , se representa de forma análoga a la indicada para el prisma (núm. 14,1).

Lo más sencillo es colocarlo con su base en el plano horizontal, como se ha hecho con el cilindro oblicuo, de bases circulares horizontales, de centros O y O' y eje $\overline{OO'}$ (Fig. 16.1). Las generatrices del contorno aparente horizontal son las tangentes $A_1A'_1$ y $B_1B'_1$ a las circunferencias de centros O_1 y O'_1 y sus puntos de tangencia determinan el contorno aparente horizontal $BDAA'C'B'B$. El contorno aparente vertical es el $C'A'D'DACC'$, pudiéndose así dibujar las partes vistas y ocultas del cilindro.

Las proyecciones de un punto de la superficie, de proyección dada K_1 , se determinan trazando por K_1 el plano vertical, paralelo al eje, de traza T_1N_1 paralela a $\overline{O_1O'_1}$ que corta al cilindro, según las generatrices \overline{NS} y \overline{MT} . Refiriendo a éstas K_1 , se obtienen las proyecciones K_2 y K'_2 de los puntos buscados K_1-K_2 y $K'_1-K'_2$ (intersecciones del cilindro con la vertical de traza K_1).

Si el punto dado pertenece al contorno aparente, como el I_1 , no existe más que un sólo punto I_1-I_2 .

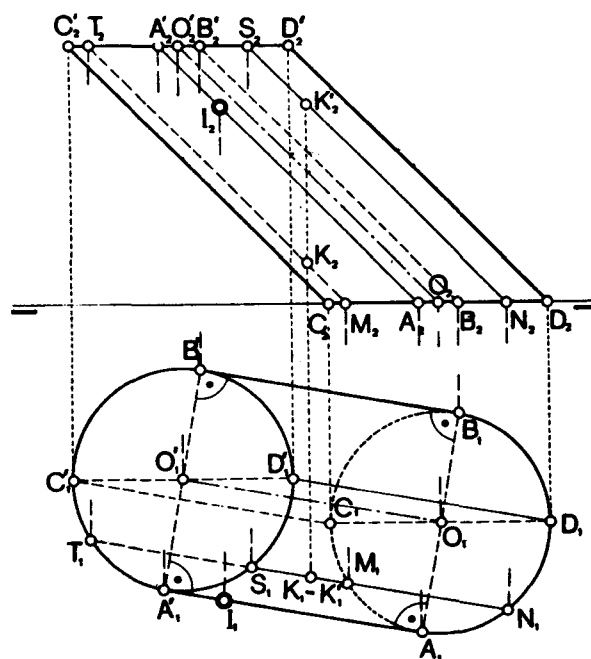


Fig. 16.1.—Proyecciones del cilindro.

Análogamente se procedería si se conoce la proyección vertical K_2 .

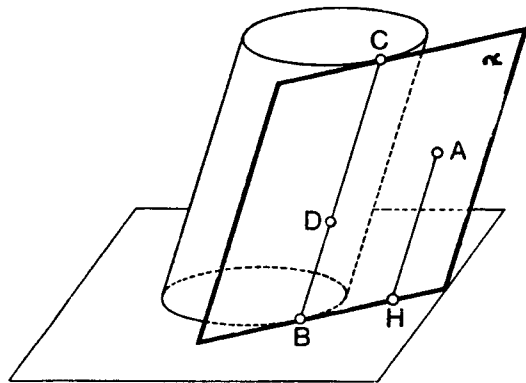


Fig. 16.2. - Plano tangente.

16.2 Plano tangente

Como ya se dijo en el núm. 15,3, el plano tangente al cilindro, en un punto D de su superficie (Fig. 16.2) es el α , determinado por la generatriz \overline{CB} que pasa por D y por la tangente a la base en el pie B de \overline{CB} .

Si el punto dado A es exterior, el plano α queda definido por la paralela AH a las generatrices, de traza H con el plano de la base y por la tangente HB a la base, trazada por H .

Esto es lo que se ha hecho en el cilindro oblicuo de base situada en el horizontal, representado en la figura 16.3. El plano tangente, en el punto D_1-D_2 de la superficie, es el $h_\alpha-v_\alpha$ determinado por la generatriz de traza B_1-B_2 que pasa por D , y la tangente h_α a la base, en B_1-B_2 . La traza v_α es la recta que une las trazas V_r y V_s de las horizontales r y s de α , trazadas por C y D .

El plano tangente trazado por el punto exterior A_1-A_2 es el definido por la paralela AH a las generatrices, de traza H , y por la tangente h_α a la base, trazada por H_1 .

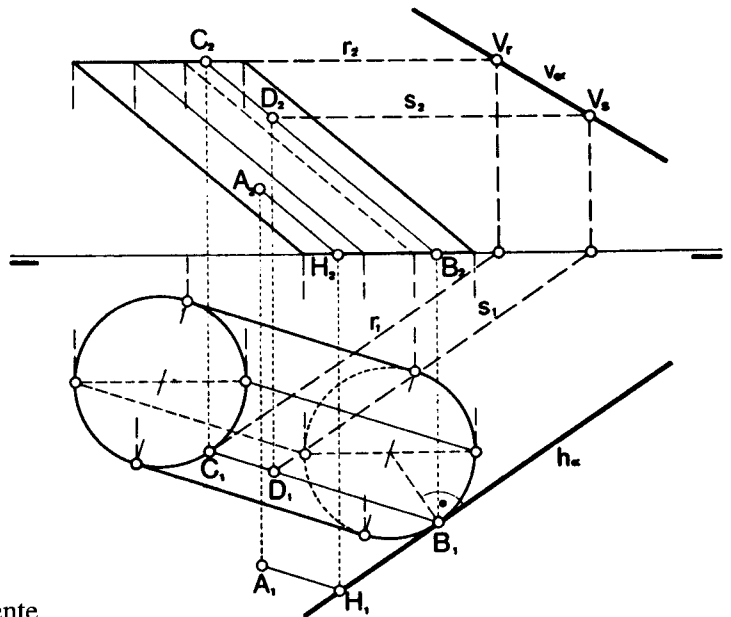


Fig. 16.3. - Trazado en diédrica.

La sección de plano α (Fig. 16.5), producida en un cilindro oblicuo de base circular ω , situada en H , es una elipse ω' que se corresponde con ω , lo mismo que en el prisma (núm. 14.2), en una afinidad de eje h_α y dirección de afinidad, la de las aristas y sus proyecciones ω'_1 y ω_1 se corresponden en otra afinidad de eje h_α y dirección de afinidad e_1 (proyecciones de h_α y e).

16.3 Secciones planas

Todo plano paralelo al eje de un cilindro de directriz circular corta a éste, según dos generatrices, una o ninguna, según sea secante, tangente o exterior a él.

Si el plano corta al eje en un punto O , corta a todas las generatrices paralelas a él y la sección es una elipse de centro O . Si el cilindro es recto de revolución (Fig. 16.4), el eje mayor \overline{AB} de la elipse-sección corta al eje e del cilindro y es perpendicular a la traza t del plano secante α con el β de la base del cilindro. El eje menor es el segmento \overline{CD} , paralelo a t , trazado por el punto medio O de \overline{AB} (intersección de α y e) y limitado por la superficie cilíndrica.

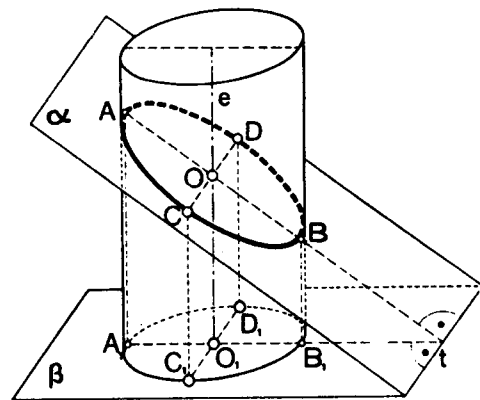


Fig. 16.4. - Sección del cilindro recto de revolución.

El par de puntos homólogos que interesan es el extremo A del diámetro \overline{AB} de ω , normal a h_α , y el punto de corte A' de α con la generatriz a , trazada por A (habiéndonos auxiliado del plano proyectante vertical de a_1-a_2) puesto que siendo las tangentes a ω , en A y B , paralelas a h_α , las tangentes a ω' , en A' y B' , (homólogos de A y B) también lo son luego $\overline{A'B'}$ es

un diámetro de ω' y su centro O' (intersección de α y e), el punto medio de $A'B'$. (El punto B' es la intersección de KA' con b_1).

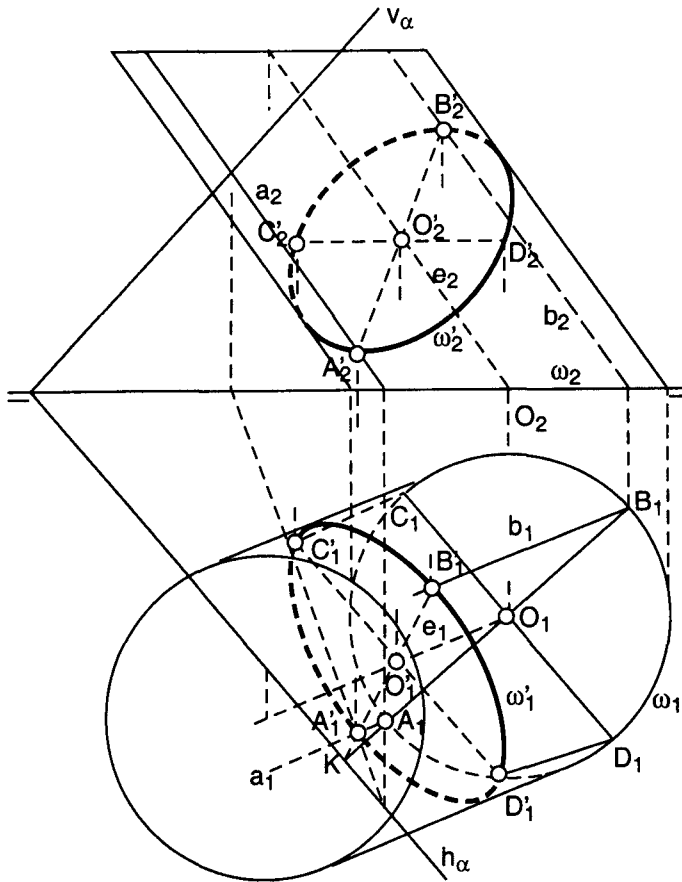


Fig. 16.5.—Sección plana del cilindro oblicuo.

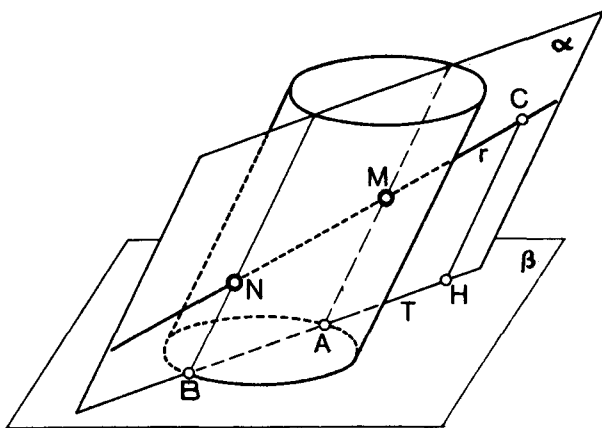


Fig. 16.6.—Intersección de recta y cilindro.

El homólogo del diámetro $\overline{C_1D_1}$ de ω_1 , paralelo a h_α , es el diámetro $\overline{C_2D_2}$ de ω_2 (por ser homólogos los centros O_1 y O_2) y sus extremos C_1 y D_1 son homólogos

de C_2 y D_2 , respectivamente, siendo $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ diámetros conjugados de ω_1 .

Refiriendo estos puntos a sus generatrices respectivas, se obtienen los diámetros conjugados $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$ de ω_2 que permiten dibujar ambas (núm. 10,4).

También puede hallarse directamente la intersección $O' \equiv [\alpha, e]$ y por la proyección O'_1 , trazar los diámetros O'_1K y $O'_1D'_1$ (paralelo a h_α) que cortan a las generatrices trazadas por A, B, C y D , en A', B', C' y D' , respectivamente, siendo \overline{AB} y \overline{CD} , normal y paralela a h_α .

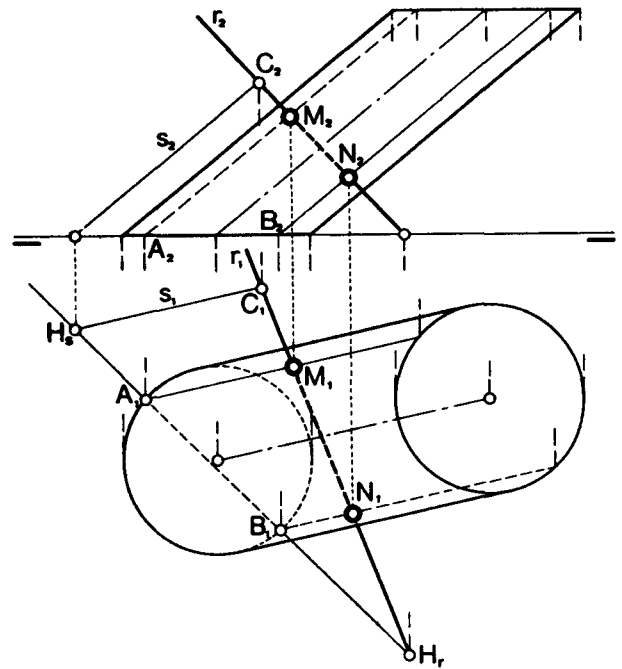
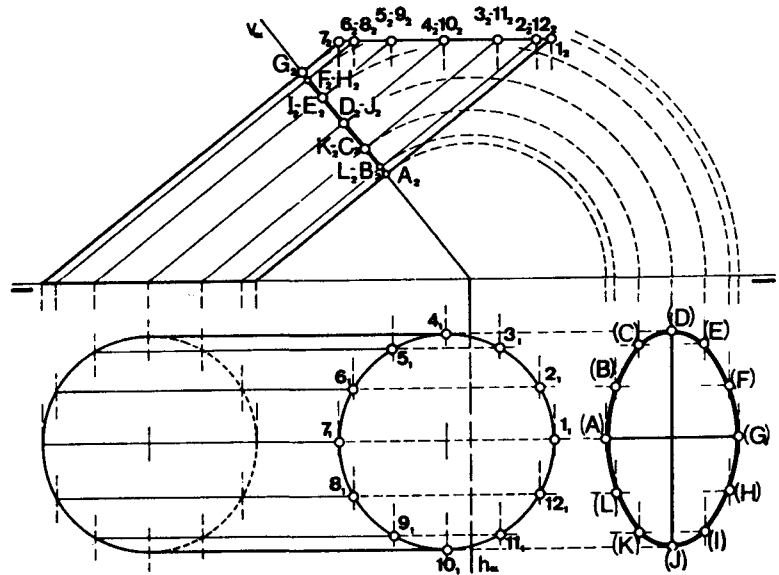


Fig. 16.7.—Trazado en proyecciones.

16.4. Intersección de recta y cilindro

Como ya se dijo en el prisma (núm. 14,3), por un punto C de la recta dada r (Fig. 16.6), se traza la paralela a las generatrices del cilindro que corta al plano de la base de éste, en H . El plano $\alpha \equiv [r, \overline{CH}]$ corta al cilindro, según las generatrices AM y BN , y éstas cortan a r en los puntos buscados M y N .

Esto es lo que se ha hecho en diédrica (Fig. 16.7) para hallar la intersección de la recta r_1-r_2 con un cilindro oblicuo. Trazar por un punto C_1-C_2 de r , la paralela s_1-s_2 a las generatrices, de traza H_s , que determina el plano auxiliar $\alpha \equiv [r, s]$, de traza $h_\alpha \equiv [r, H_s]$ que corta a la base del cilindro, en A_1-A_2 y B_1-B_2 . Las generatrices trazadas por A y B cortan a r en los puntos buscados M_1-M_2 y N_1-N_2 .



(a) Proyecciones y sección normal al eje.

16.5. Desarrollo

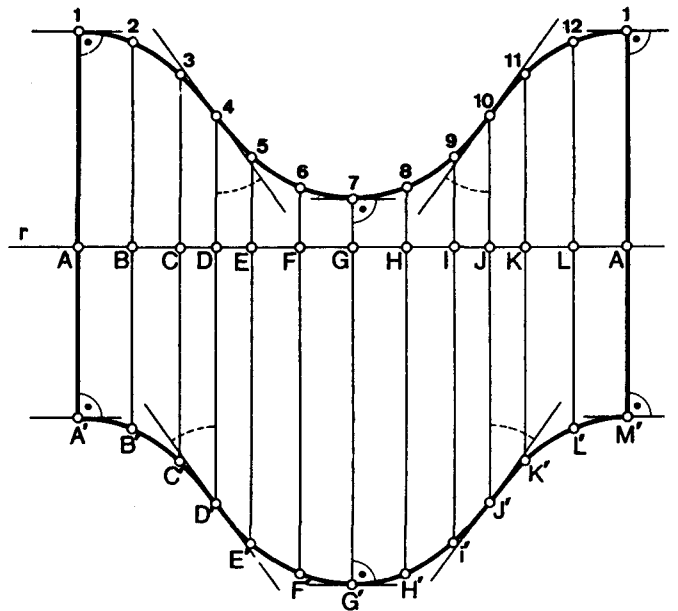
a) *Método general.* Se obtiene, dibujando la transformada rectilínea de la sección recta del cilindro (previamente dividida en partes iguales). Por los puntos de división, se trazan luego perpendiculares a la transformada y se llevan sobre ellas las longitudes de las respectivas generatrices, cuyos extremos, unidos con trazo continuo, determinan la transformada de la base.

b) *Cilindro oblicuo* (Fig. 16.8). Siguiendo el método general, basta inscribir en el cilindro un prisma y desarrollarlo, tomando como desarrollo del cilindro, el del prisma inscrito. Cuanto mayor sea el número de caras, más aproximado será el método.

El desarrollo del cilindro de generatrices frontales de la figura 16.9 se ha obtenido, dividiendo la circunferencia de la base en 12 partes iguales y trazando las generatrices que pasan por los puntos de división.

Se traza luego el plano de canto α , normal al eje del cilindro, que corta a éste según una elipse (sección recta), abatida sobre el horizontal, en $(A)(D)(G)(J)$, como se ve en la figura. Los ejes de la elipse son, en este caso, el $(\bar{A})(\bar{G})$, normal a h_α , de proyección $A_2G_2 \equiv v_\alpha$ y el $(D)(J)$, paralelo a h_α , de proyección D_2J_2 (punto medio de $\bar{A}_2\bar{G}_2$).

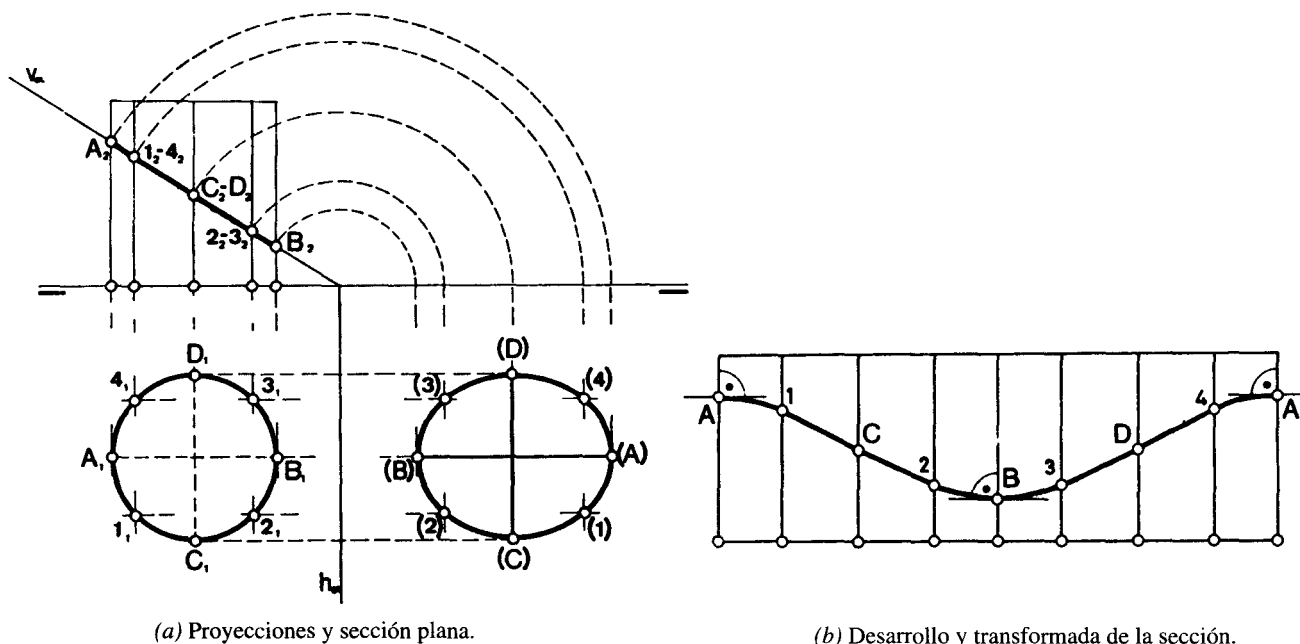
La transformada de la sección recta es una recta arbitraria r (Fig. b), sobre la que se llevan las longitudes AB, BC, CD, \dots, LA de las cuerdas de la elipse abatida. Se trazan luego por A, B, C, \dots, A , perpendiculares a r y sobre ellas, se llevan las longitudes de las



(b) Desarrollo.

Fig. 16.8.—Cilindro oblicuo de base circular.

generatrices, comprendidas entre la base superior y el plano secante, siendo $\bar{A}1 = A_2l_2$; $\bar{B}2 = B_2l_2$; etc. Si a partir de los puntos $1, 2, 3, \dots$, así obtenidos, se llevan luego longitudes $\bar{1}A' = \bar{2}B' = \bar{3}C' = \dots = \bar{1}M'$, iguales a la generatriz del cilindro, se obtienen las transformadas $123\dots 12$ y $A'B'C' \dots M'$ de las circunferencias de las bases del cilindro.



(a) Proyecciones y sección plana.

(b) Desarrollo y transformada de la sección.

Fig. 16.9.—Cilindro recto de base circular.

Para evitar el error que supone tomar las cuerdas $\widehat{A(B)}$, $\widehat{B(C)}$, ..., en vez de los arcos $\widehat{(A)(B)}$, $\widehat{(B)(C)}$, ..., pueden medirse éstos con un curvómetro para obtener un desarrollo más exacto.

También conviene tener en cuenta las simplificaciones indicadas en el desarrollo del cono, exceptuando los puntos de inflexión 4 , 10 , D' y J' que, en este caso, corresponden a las generatrices de tangencia de los planos tangentes al cilindro y perpendiculares al horizontal, es decir, a las generatrices 4 y 10 . (Ver cap. 11 de n/E. de G.D.).

c) *Cilindro recto de revolución* (Fig. 16.9). El desarrollo del cilindro dado (Fig. a) es un rectángulo, de

altura igual a la del cilindro (Fig. b) y base igual al perímetro de la base del cilindro.

Si cortamos el cilindro por un plano de canto α (Fig. a), la sección y el abatimiento se obtienen de forma inmediata. Los puntos de intersección A , 1 , C , 2 , ... de α con las generatrices, se llevan sobre éstas en el desarrollo, a partir de la base, por medio de su cota, obteniéndose la transformada $AIC \dots A$ de la que se conocen las tangentes en A y B , normales a las generatrices, y los puntos de inflexión C y D , que son los puntos de tangencia de las tangentes a la sección, paralelas a las proyecciones ortogonales del eje del cilindro sobre α (núm. 17,3 de n/G.D.S. y A.).

17. SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

17.1. Generalidades y definiciones

Superficie de revolución (Fig. 17.1) es la engendrada por una línea ω , plana o alabeada (generatriz), al girar alrededor de una recta e , llamada eje de giro o eje de la superficie.

a) Todo punto A de ω describe, al girar ésta, una circunferencia a_1 - a_2 , de centro O (situado en e) y plano normal al eje, llamado *paralelo*. Inversamente, todo plano α , normal al eje, corta a la superficie, según uno o varios paralelos que pasan por las trazas de ω y α .

Los paralelos c y d , de radio máximo y mínimo, se llaman *círculos de ecuador* y *garganta*, respectivamente, y la superficie comprendida entre dos paralelos, *zona*.

b) Todo plano γ que pase por el eje se llama *plano meridiano* y su sección φ con la superficie, *meridiano*. El meridiano de plano frontal δ (si existe) determina el contorno aparente vertical σ de la superficie y se llama *meridiano principal*. De lo expuesto se deduce:

1º) Los meridianos son simétricos respecto al eje e iguales entre sí.

2º) La superficie es simétrica respecto al eje y respecto a un plano meridiano.

3º) Por cada punto B de la superficie (excepto sus trazas con el eje) sólo pasa un paralelo y un meridiano.

17.2. Representación (Fig. 17.2)

a) La superficie de revolución se determina por el eje e y una generatriz ω , pudiendo ser ésta cualquier curva de la superficie que corta a todos los paralelos.

Si el eje es vertical, los paralelos se proyectan horizontal y verticalmente, según círculos f_1, g_1, \dots , de centro e_1 , y rectas horizontales f_2, g_2, \dots , y los meridianos,

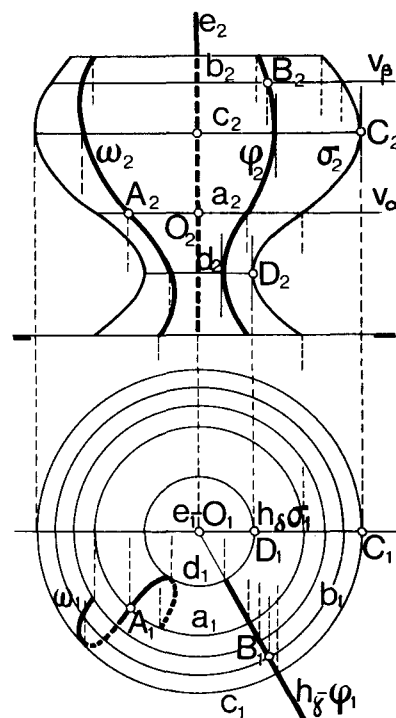


Fig. 17.1.—Meridianos y paralelos.

según rectas $\varphi_1, \sigma_1, \dots$, concurrentes en e_1 , y curvas $\varphi_2, \sigma_2, \dots$, homólogas en una afinidad ortogonal de eje e_2 (núms. 2,4 y 2,5).

b) Para determinar un punto de la superficie de proyección P_2 , dada, se traza por P_2 el paralelo m_2 que corta a ω_2 , en M_2 , y determina el círculo m_1 , de radio

$e_1 M_1$. Refiriendo P_2 a m_1 , se obtienen las proyecciones P_1 y P'_1 de los puntos buscados P y P' .

Si se conoce P_1 , se traza el círculo m_1 de radio $e_1 \overline{P_1}$ que corta a ω_1 , en M_1 y F_1 , cuyas proyecciones M_2 y F_2 determinan las horizontales m_2 y f_2 que contienen a las proyecciones P_2 y Q_2 de P y Q .

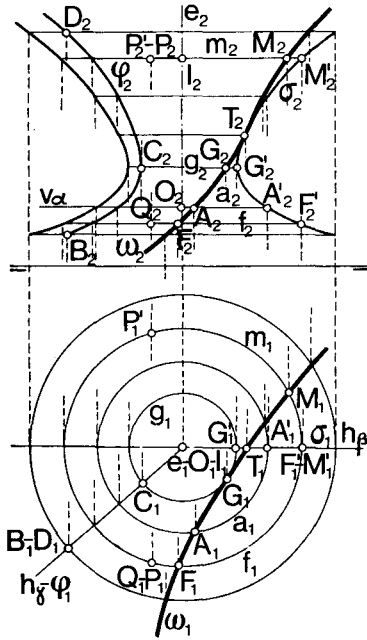


Fig. 17.2.—Representación diédrica.

c) El contorno aparente vertical σ (meridiano principal) se halla, trazando por puntos F, A, M, \dots de ω paralelos que cortan al plano frontal β , en puntos F', A', M', \dots que determinan la proyección $\sigma_2 \equiv F'_2 A'_2 M'_2 \dots$, y lo mismo se haría con cualquier otro ϕ , de plano γ .

El círculo tangente a ω_1 , en G_1 , es el de garganta g_1-g_2 y la intersección T de ω_1 y h_β es la proyección del punto de tangencia T_2 de ω_2 con σ_2 .

17.3. Tangencia. Propiedades

a) *Propiedades.* (Fig. 17.3). Sea s' la tangente al meridiano principal $\sigma_1-\sigma_2$, en un punto A' de éste. (No son necesarias s'_1 ni A'_1). Al girar todo alrededor del eje e , σ engendra la superficie y s' , el cono de generatriz s' y vértice V_1-V_2 , tangente a la superficie, según el paralelo a_1-a_2 que pasa por A . Todo plano tangente a la superficie, en un punto A de a , es tangente al cono y a la inversa, es decir, el cono es la envolvente de los infinitos planos tangentes a la superficie, en todos los puntos del paralelo a_1-a_2 .

Análogamente, la envolvente de los planos tangentes a la superficie, en puntos del círculo del ecuador (o garganta) es un cilindro, coaxial con la superficie y tangente a ella, según dicho círculo y la envolvente de los planos tangentes, en puntos de un meridiano, es el cilindro circunscrito a la superficie, según dicho meridiano (sección recta del cilindro).

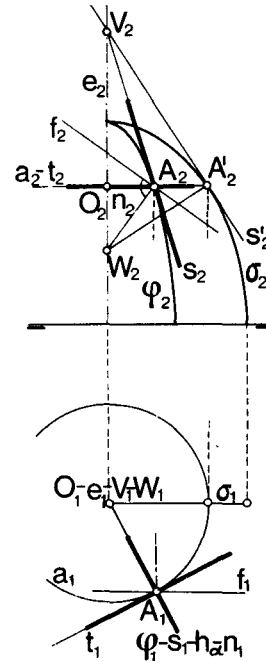


Fig. 17.3.—Trazado del plano tangente.

La normal a s'_2 , en A'_2 , corta al eje, en W_2 . La esfera de centro W y radio $\overline{WA'}$ (esfera inscrita) es tangente a la superficie y al cono de vértice V , según el paralelo a_1-a_2 , que pasa por A y todo plano tangente a la superficie, en un punto A de a_1-a_2 , es también tangente en A a la esfera inscrita, según el paralelo a_1-a_2 .

b) *Plano tangente en un punto A_1-A_2 .* Es el definido por las tangentes t y s al paralelo a_1-a_2 y al meridiano $\phi_1-\phi_2$ que pasan por A , siendo t_1 normal al radio $\overline{VA_1}$ de a_1 y $s_2 \equiv V_2 A_2$, por ser s_2 y s'_2 tangentes homólogas en la afinidad ya conocida (núm. 17,2-a), de eje e_2 y par de puntos homólogos A_2 y A'_2 . También puede hallarse, como plano $[t, f]$, normal al radio WA de la esfera inscrita, según el paralelo a_1-a_2 que pasa por A , siendo t y f la horizontal y frontal de dicho plano.

La tangente t es normal al eje y al radio de a_1-a_2 , luego es normal al plano meridiano que pasa por A , lo mismo que el plano tangente en A , por contener a t . Por tanto:

El plano tangente a la superficie en un punto A de ella es normal al plano meridiano que pasa por A .

c) La envolvente de los planos tangentes a la superficie, desde un punto exterior P , es un cono de vértice P , propio o impropio (núms. 27,8 y 9 de n/G.D.S. y A.).

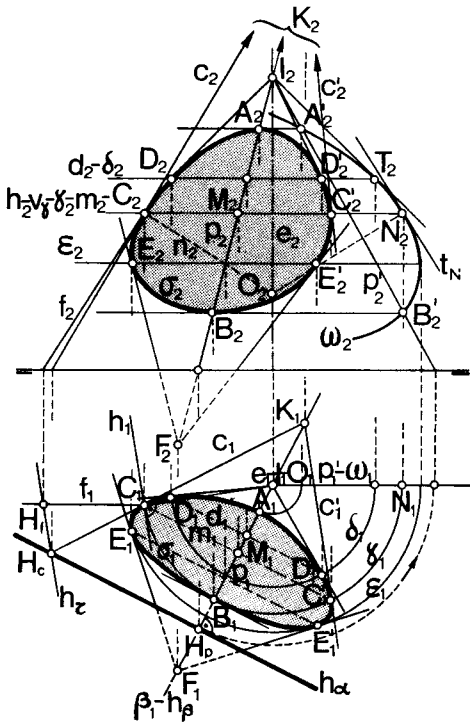


Fig. 17.4.—Sección plana.

17.4. Sección plana

a) Sea la superficie de revolución, de eje e_1-e_2 (Fig. 17.4) y meridiano principal $\omega_1-\omega_2$ y α , el plano secante de traza h_α que corta al eje, en I_1-I_2 . El plano meridiano de traza h_β , normal a h_α , es perpendicular al α y lo corta, según su recta de máxima pendiente $p \equiv IH_p$, que es eje de simetría de la sección σ , buscada. Para hallar ésta, se utilizan los siguientes métodos:

1°. *Por paralelos.* Todo plano secante normal al eje (horizontal) como el γ , corta a la superficie, según el paralelo $\gamma_1-\gamma_2$; a p_1-p_2 , en M , y a α , según la horizontal m_1-m_2 que corta a $\gamma_1-\gamma_2$, en puntos C y C' de σ , siendo C_1 y C'_1 , simétricos respecto a p_1 y C_2 y C'_2 , simétricos respecto a p_2 , en dirección para lela a LT.

2°. *Por meridianos.* El meridiano de traza h_β , por ejemplo, corta al α , según la recta $p \equiv IH_p$. Girando ésta y el meridiano, hasta su posición frontal, p'_2 corta a ω_2 (meridiano girado), en A'_2 y B'_2 . Al deshacer el giro, se obtienen los puntos A y B que son, en este caso, el más alto y bajo de σ (de tangente horizontal) y determinan los *paralelos límites* que pasan por ellos.

Las intersecciones de α , con los meridianos, una vez girados, como la p'_2 , pasan por I_2 , cortan a ω_2 , en dos puntos A'_2 y B'_2 , y tienen por límite la tangente a ω_2 , trazada desde I_2 , cuyo punto de tangencia T_2 determina el paralelo δ y los puntos D_1 y D'_1 de σ ; siendo I_1D_1 e $I_1D'_1$ las trazas de los *meridianos útiles*, tangentes a σ , en D_1 y D'_1 , respectivamente.

b) *Trazado de tangentes.* La tangente a σ , en el punto C del paralelo γ , por ejemplo, que corta a ω , en N , se halla como intersección de α con el plano τ , tangente a la superficie, en C , que es como se sabe, perpendicular a la normal \overline{OC} a la superficie, en C (núm. 17,3-b), siendo O_2 la intersección de e_2 con la normal a t_N , en N_2 . El plano τ queda así definido por la horizontal h_1-h_2 (h_1 normal a $\overline{O_1C_1}$) y la frontal f_1-f_2 (f_2 normal a $\overline{O_2C_2}$), trazadas por C_1-C_2 .

La traza h_τ , paralela a h_1 , pasa por H_1 y corta a h_ω , en la traza H_c de la tangente buscada $c \equiv H_cC$. La tangente en C' es la simétrica $c' \equiv C'K$ de c , respecto a p .

La traza h_τ , también puede hallarse por giro del plano de canto tangente a la superficie, en N , hasta que N coincida con C .

Las tangentes en los puntos E y E' del ecuador, se proyectan según las tangentes al círculo Σ_1 , en E_1 y E'_1 . Se obtienen así, ocho puntos y sus tangentes respectivas que permiten dibujar la sección $\sigma_1-\sigma_2$.

17.5. Intersección con una recta r

Se hallan haciendo pasar por r un plano auxiliar que corta a la superficie, según una línea ω . Los puntos de corte de r y ω son los buscados. (Ver. núms. 20,1 a 20,5 y 20,8 a 20,12 de n/E. de G.D.).

ESFERA

17.6. Representación

Superficie esférica es la engendrada por una circunferencia que gira alrededor de uno de sus diámetros y queda definida por su centro O_1-O_2 y su radio r (Fig. 17.5). Si el eje de giro es vertical, los meridianos son círculos de plano vertical que contienen al eje; el ecuador, el círculo máximo horizontal, y los paralelos, círculos menores de plano horizontal. El contorno aparente horizontal es el ecuador ω y el vertical, el meridiano principal λ .

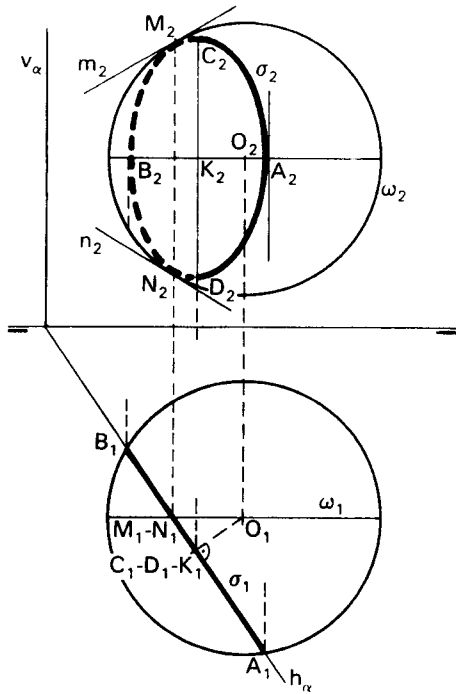


Fig. 17.7. - Sección de plano vertical.

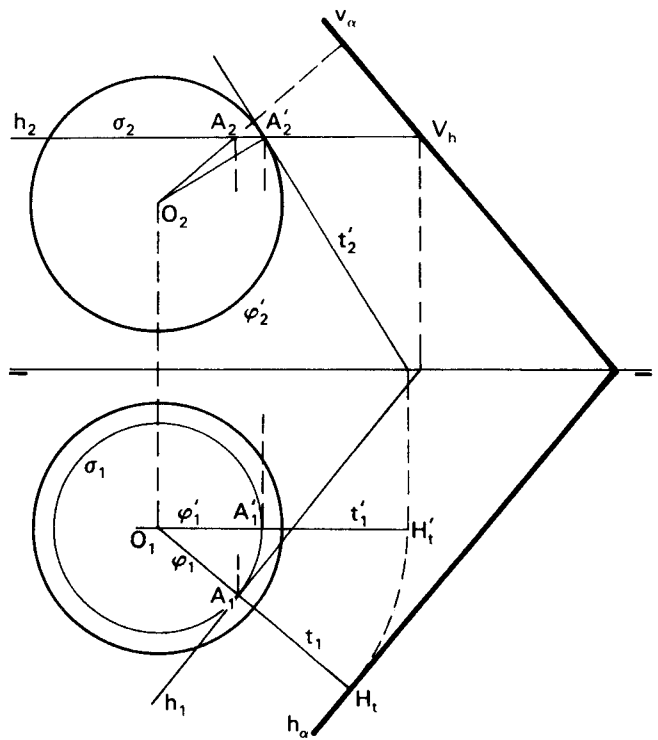


Fig. 17.9. - Plano tangente en A.

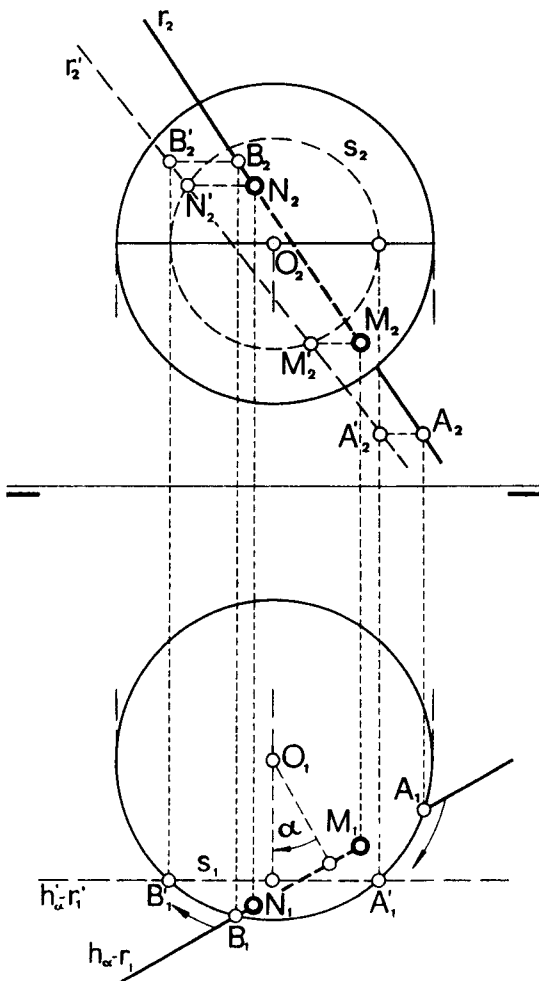


Fig. 17.8. - Intersección de recta y esfera.

b) Si el plano α es vertical (Fig. 17.7), la sección es el círculo menor σ de centro K (intersección de α con el diámetro perpendicular a él), cuyas proyecciones son: $\sigma_1 \equiv \overline{A_1B_1}$ y la elipse σ_2 de centro K_2 y ejes $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2} = \overline{A_1B_1}$.

La intersección $M_1 \equiv N_1$ de σ_1 y ω_1 determina los puntos de tangencia M_2 y N_2 de σ_2 y ω_2 que limitan la parte vista y oculta de σ_2 .

17.8. Intersección de recta y esfera

Se halla (Fig. 17.8), trazando por la recta r_1-r_2 , dada, el plano proyectante α , por ejemplo, que corta a la esfera según el círculo de proyección A_1B_1 . Se gira luego h_α y A_1B_1 alrededor del diámetro vertical de la esfera, hasta su posición frontal $h'_\alpha \equiv A'_1B'_1$, siendo s_2 y $r'_2 \equiv A'_2B'_2$ las nuevas proyecciones del círculo y de la recta que se cortan en M'_2 y N'_2 . Deshaciendo el giro, se obtienen las intersecciones buscadas M_1-M_2 y N_1-N_2 .

17.9. Plano tangente

El plano tangente en un punto A_1-A_2 de la superficie esférica (Fig. 17.9) es el α perpendicular al radio \overline{OA} .

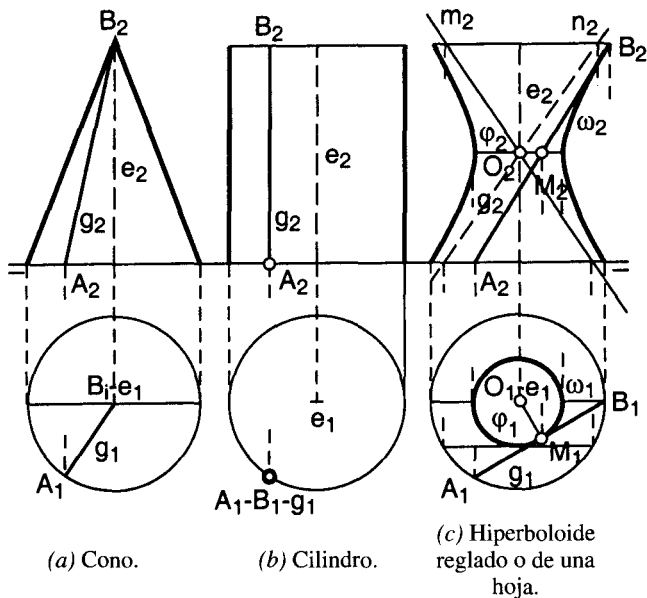


Fig. 17.10.—Superficies de generatriz rectilínea y eje vertical.

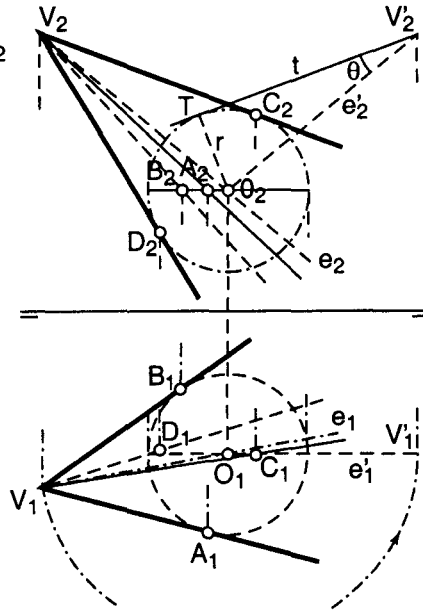


Fig. 17.11.—Cono de revolución de eje inclinado.

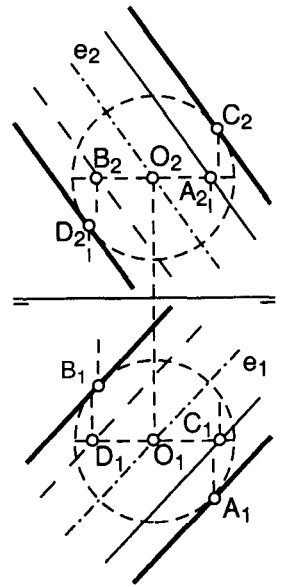


Fig. 17.12.—Cilindro de revolución de eje inclinado.

Para hallarlo, se traza por A la horizontal h_1-h_2 de a (h_1 normal a $\overline{O_1A_1}$), cuya traza V_h determina la traza v_α normal a O_2A_2 y luego, la h_α paralela a h_1 .

También queda definido por las tangentes h y t al paralelo σ y el meridiano φ , que pasan por A . La tangente t y φ (no es necesaria φ_2) se obtiene fácilmente,

por giro de φ hasta su posición frontal φ' , que permite trazarle la tangente t'_2 a φ'_2 , en A'_2 . Al deshacer el giro, se obtiene la traza H_1 que determina la traza h_α paralela a h_1 y luego, la v_α que pasa por V_h . (Ver núms. 18,1 a 18,11 de n/E. de G.D.).

OTRAS SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Las más sencillas, aparte de la esfera, son las engendradas por rectas o cónicas y podemos agruparlas como sigue:

17.10. Superficies engendradas por rectas

Si la recta generatriz $g \equiv AB$ (Fig. 17.10) corta al eje e en un punto propio o impropio, engendra el cono (Fig. a) o el cilindro de revolución (Fig. b) y, si se cruza con e , el hiperboloide reglado de revolución. (Fig. c).

Las sucesivas posiciones de la generatriz (Fig. c) se obtienen fácilmente, por medio de la perpendicular común \overline{OM} a e y g . El contorno aparente horizontal es la circunferencia $\varphi_1-\varphi_2$ y el vertical, la hipérbola $\omega_1-\omega_2$, de asíntotas de proyección m_2 y n_2 .

La representación del cono y cilindro de revolución, de eje vertical, es muy sencilla. Si el cono viene dado

(Fig. 17.11) por el vértice V , el eje e (inclinado respecto a H) y el ángulo θ que las generatrices forman con e , conviene utilizar una esfera inscrita en el cono, de centro arbitrario O , situado en e .

Para ello, se gira el eje e , alrededor de la vertical trazada por O , hasta su posición frontal $e' \equiv V'O$ y se traza la recta V'_2T que forma con e'_2 el ángulo θ . La normal O_2T a ella es el radio r de la esfera que permite trazar ésta. Las tangentes a la esfera, desde V_1 y V_2 , son, respectivamente, las generatrices VA y VB del contorno aparente horizontal y las VC y VD de contorno aparente vertical.

Si se trata de un cilindro de eje inclinado e_1-e_2 y radio r (Fig. 17.12), basta dibujar la esfera de radio r y centro arbitrario O , situado en e . Las tangentes a ella, paralelas a e_1 y e_2 , son las generatrices de contorno aparente horizontal y vertical, respectivamente. (Ver núms. 18.12 a 18.22 de n/E. de G.D.).

17.11. Superficies engendradas por cónicas

a) La cónica ω gira alrededor de su eje (Fig. 17.13). La circunferencia, como ya se dijo, engendra la esfera; la elipse, el elipsoide alargado (Fig. a) o el achatado (Fig. b), según que gire alrededor de su eje mayor o menor; la parábola, el paraboloides elíptico (Fig. c) y la hipérbola, el hiperboloides elíptico (Fig. d) o el reglado (Fig. 17.10-c), según que gire alrededor del eje real o del imaginario.

La mayor parte de las cuádricas utilizadas en Arquitectura e Ingeniería (excepto las paraboloides reglados) son superficies de revolución.

b) La cónica ω gira alrededor de una recta (eje) de su plano. *Superficie tórica*. Si el eje es paralelo a uno de los ejes de la cónica, se engendra el toro *circular*, *elíptico*, *parabólico* o *hiperbólico*, según el género de la cónica y si no es paralelo, el *toroide* o *falso toro*. El *toro circular* o simplemente *toro* es la superficie engendada por una circunferencia ω (Fig. 17.14) que

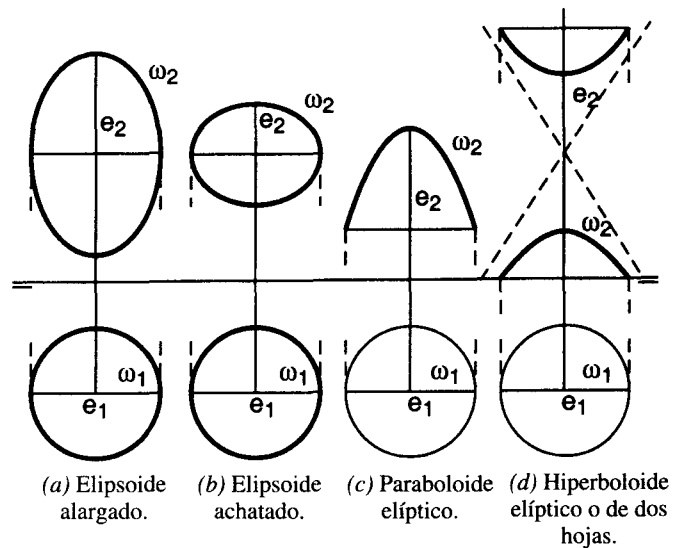


Fig. 17.13.—Giro de una cónica alrededor de uno de sus ejes.

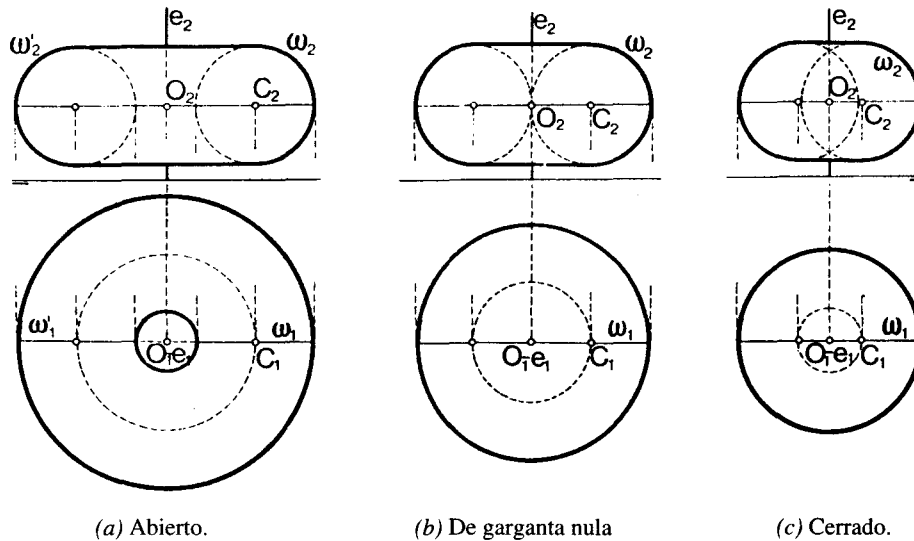


Fig. 17.14.—Toro circular.

gira alrededor de un eje coplanario con ella y que no pasa por su centro C_1-C_2 . Si el eje es exterior, tangente o secante a ω , el toro se llama *abierto* (Fig. a), de *garganta nula* (Fig. b) o *cerrado* (Fig. c), respectivamente, y el círculo descrito por el centro C de ω , *círculo medio*.

El toro se engendra también como envolvente de una esfera, de círculo máximo ω , cuyo centro C describe el círculo medio. Analíticamente se demuestra que el toro es una superficie de cuarto orden.

Las secciones planas del toro son, en general, curvas de cuarto orden. Las únicas secciones circulares

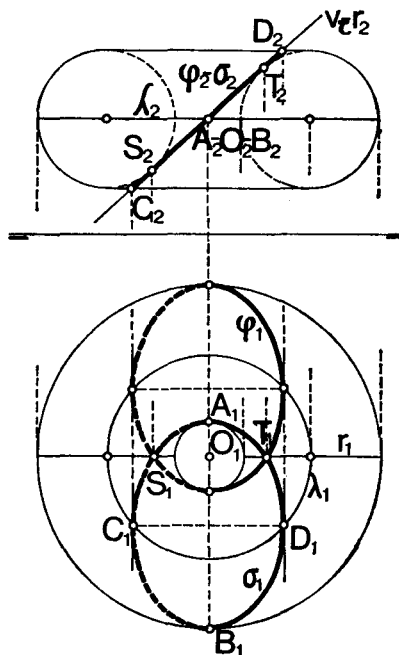


Fig. 17.15.—Secciones circulares de plano bitangente.

son los paralelos, los meridianos y las producidas por planos bitangentes (tangentes al toro en dos puntos distintos S y T) que cortan al toro (Fig. 17.15) según dos círculos φ y σ (iguales al círculo medio) llamados *círculos de Villarceau*. (Ver núms. 20,6 a 20,10 de *n/E. de G.D.*).

c) *La cónica gira alrededor de un eje exterior a su plano*. Analíticamente se demuestra que toda curva plana ω de orden n engendra, en general, una superficie de orden $2n$ y si el eje e pertenece al plano de simetría de ω , una de orden n luego las engendradas por cónicas son de cuarto o de segundo orden. (Ver. núm. 27,11 de *n/G.D.S. y A.*).

18. INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES

18.1. Método general

Consiste en cortar las superficies dadas C y S (Fig. 18.1) por otra auxiliar α (plana en la figura) y hallar sus intersecciones respectivas a y b con las dadas. Los puntos de corte M y N de a y b son comunes a C y S y pertenecen, por tanto, a su intersección i . Repitiendo esta construcción con otras superficies auxiliares o *cortantes*, se obtienen nuevos puntos que, unidos ordenadamente, determinan la intersección buscada.

Conviene utilizar superficies auxiliares que corten a las dadas, según líneas sencillas y fáciles de dibujar (rectas, círculos, etc.). Las más utilizadas son planas y a veces, esféricas, cilíndricas, etc.

18.2. Clasificación

En la figura 18.2, el prisma P es cortado por cuatro cilindros de bases circulares, paralelas a la cara frontal del prisma, de los que solo se han dibujado las zonas extremas próximas a las bases, para apreciar mejor los orificios producidos en el prisma y las curvas de entrada y salida. Las intersecciones se han clasificado, siguiendo el mismo orden de la figura, en los cuatro casos siguientes:

a) *Mordedura* (Fig. a). Cada superficie corta parcialmente a la otra. La intersección es una línea continua (curva, quebrada o mixta) y casi siempre alabeada.

Las generatrices del cilindro correspondientes al arco ADB son exteriores al prisma. Las restantes lo cortan, según el arco circular AGB y el elíptico ANB , de centros O_E y O_S (secciones del cilindro por las caras vistas del prisma).

b) *Penetración* (Fig. b). Una de las superficies (cilindro) penetra en la otra (prisma), atravesándola

por completo. La intersección se compone de dos curvas distintas e independientes, de *entrada* y *salida*, pudiéndose aplicar estos nombres, indistintamente, al círculo E , de centro O_E , y a la elipse S , de centro O_S .

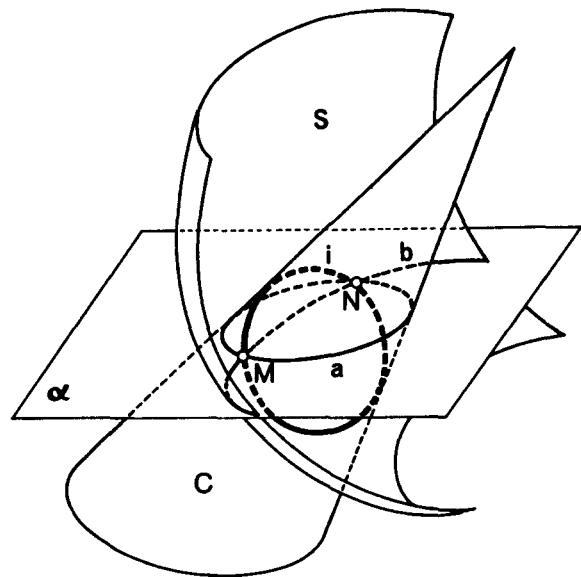


Fig. 18.1.—Método general.

c) *Penetración tangencial* (Fig. c). Es una penetración caracterizada porque las curvas E y S de entrada y salida son tangentes de un punto T o tienen común dicho punto. El plano tangente, en T , a ambas superficies (si existe) contiene a las tangentes a ambas curvas, en T . De ahí, el nombre de *tangencial*.

Algunos autores consideran este caso como intermedio entre penetración y mordedura, pero realmente es una penetración del cilindro en el prisma, puesto que todas sus generatrices cortan al prisma. De aquí,

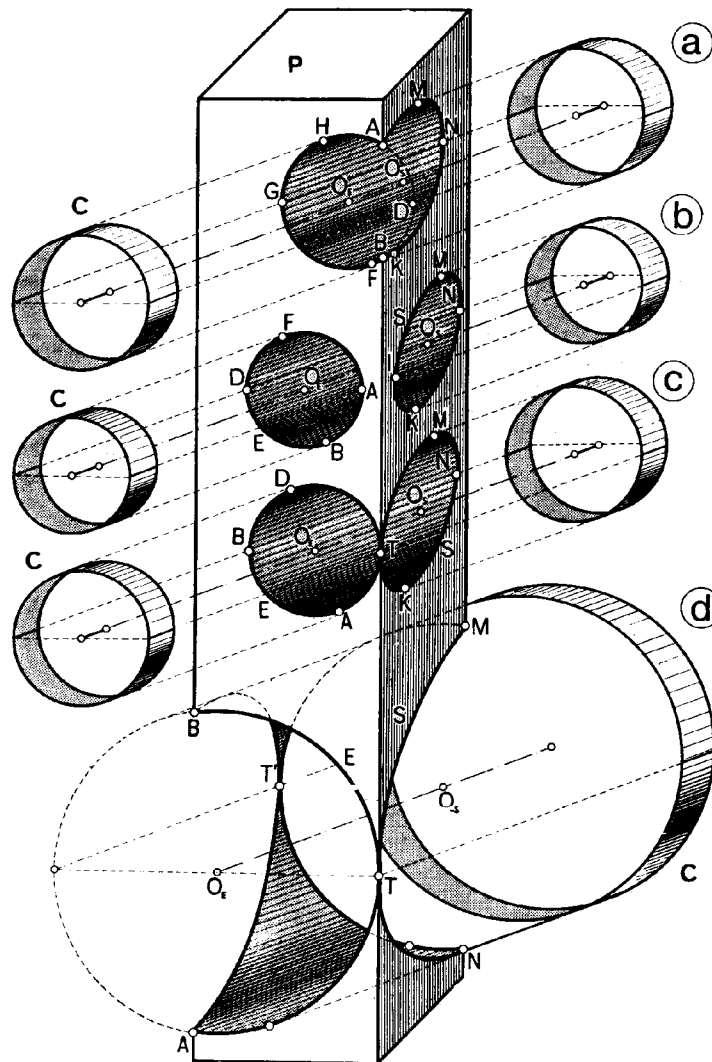


Fig. 18.2.—Clases de intersección.

el nombre de *penetración límite* que consideramos más apropiado.

d) *Penetración mutua o máxima*. (Fig. d). Como ya dice el nombre, la penetración es recíproca y, al mismo tiempo, máxima ya que si el cilindro, por ejemplo, fuera de mayor diámetro no penetraría en el prisma, sino a la inversa. Las curvas de entrada y salida

tienen dos puntos comunes (dobles) o son tangentes en ellos, luego es una *penetración tangencial doble*.

Las curvas de entrada y salida del cilindro en el prisma son las $ATBT'A$ y $NTMT'N$ y las del prisma en el cilindro, las $TBT'MT$ y $TAT'NT$. Finalmente, las caras frontales (anterior y posterior) del prisma cortan al cilindro, según círculos de centros O_E y O_S .

SUPERFICIES RADIADAS

18.3. Planos auxiliares y límites

a) Al hablar de estas superficies nos referiremos a las cónicas (cono y pirámide) y cilíndricas (cilindro y prisma).

Como superficies auxiliares o cortantes, se utilizan planos que pasan por el vértice propio o impropio de las superficies y cortan a éstas, según dos generatrices.

Así, para hallar la intersección de los cilindros S_1 y S_2 , de bases coplanarias, de plano α (Fig. 18.3), se

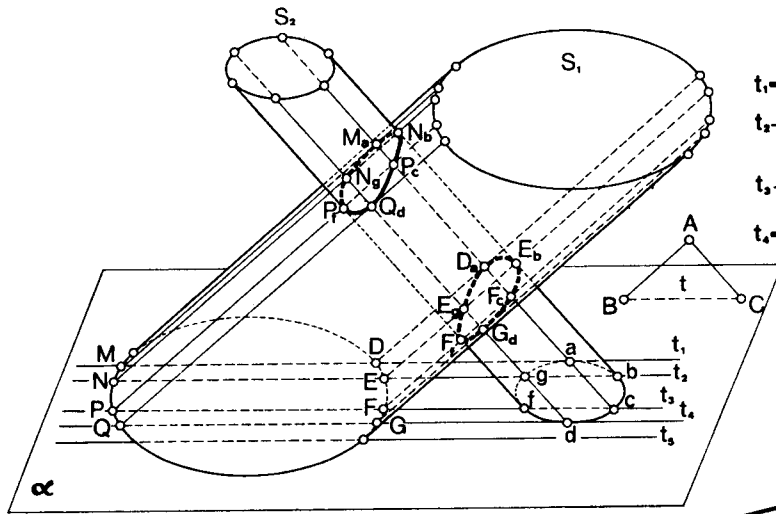


Fig. 18.3.—Intersección de cilindros.

traza por un punto arbitrario A , paralelas AB y AC a las generatrices de S_1 y S_2 , que cortan a α , en B y C . Los planos auxiliares son paralelos al $[ABC]$, de trazas t_1, t_2, \dots, t_5 , paralelas a $t \equiv BC$.

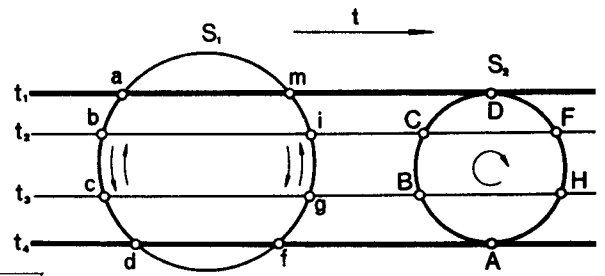
El plano auxiliar de traza t_2 , por ejemplo, corta a los círculos de las bases en los puntos E, N y g, b y a los cilindros, según las generatrices determinadas por dichos puntos que se cortan en puntos E_g, N_g y E_b, N_b de la intersección buscada. Repitiendo la construcción con las trazas $t_1 \dots t_5$, se obtienen nuevos puntos que, unidos ordenadamente, como luego veremos, permiten dibujar la curva o curvas de intersección.

En el caso de pirámides o conos (Fig. 18.13), los planos auxiliares pasan por la recta determinada por los dos vértices y con pirámide o cono y prisma o cilindro (Fig. 18.11), pasan por la paralela a las generatrices del cilindro, trazada por el vértice del cono. Las trazas de los planos auxiliares concurren, por tanto, en los dos casos, con la traza T de la recta citada.

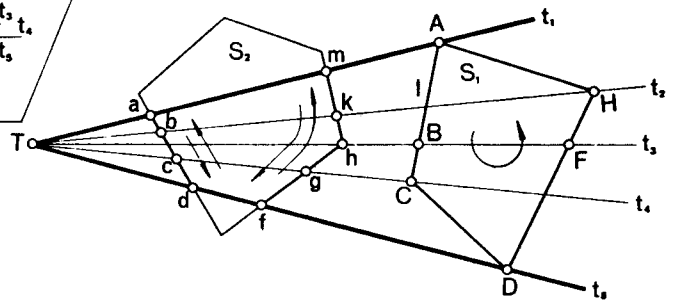
b) *Planos límites.* En la figura 18.3, los planos auxiliares, de trazas situadas entre las tangentes t_1 y t_4 a la base de S_2 (planos útiles), proporcionan cuatro puntos de intersección cada uno; los de trazas t_1 y t_4 (planos límites) sólo dos, y los de trazas situadas fuera de éstos, como la t_5 , no cortan a S_1 y no dan, por tanto, ningún punto. En la figura 18.11, las t_1 y t_5 son las trazas de los planos límites y, en la 18.13, las t_1 y t_6 .

Planos límites son los planos auxiliares tangentes a las dos superficies o los tangentes a una que cortan a la otra. Estos planos limitan los auxiliares útiles. De ahí, el nombre de *planos límites*.

Los planos límites permiten conocer previamente la clase de intersección y si ésta se compone de una o



(a) Superficies cilíndricas.



(b) Superficies piramidales o piramidal y prismática.

Fig. 18.4.—Casos de penetración.

dos curvas con uno o dos puntos comunes, como a continuación se indica.

En los casos que siguen, se supone que las bases o directrices S_1 y S_2 de las superficies son coplanarias, de plano α . Los planos auxiliares se representan por sus trazas t_1, t_2, \dots , con α , siendo indiferente para los razonamiento que éstas sean paralelas o concurrentes en un punto T y que las directrices sean poligonales o alabeadas. A la vista de estos datos, fácilmente se deduce la clase de intersección y la forma de unir los puntos de ésta, como vamos a ver.

18.4. Penetración (Fig. 18.4)

En la figura a), todas las generatrices de S_2 cortan a la superficie S_1 definida por el arco \widehat{mf} , según la curva de entrada y a la definida por \widehat{ad} , según la curva de salida.

Los puntos de intersección de t_1, t_2, \dots , con S_1 (pies de las generatrices que pasan por ellos), los designaremos con minúsculas a, b, \dots, m ; los de intersección con S_2 , con mayúsculas A, B, \dots , etc. y las intersecciones de la generatriz A de S_2 con las d y f de S_1 , con las notaciones A_d y A_f , respectivamente. También suelen designarse unos con letras y otros con números.

Un método práctico para unir los puntos obtenidos es recorrer todos los puntos de S_2 (superficie penetrante), en el sentido de la flecha, por ejemplo, al mismo

tiempo que se recorren los del arco ad , de a hasta d y de d hasta a , repitiéndose lo mismo con el arco \widehat{fm} . Así, se obtiene la curva $A_d B_c C_b D_a F_b H_c A_d$ de entrada y la $A_f B_g C_d m F_h H_g A_f$ de salida.

Con trazas concurrentes y directrices poligonales (Fig. b), sólo se utilizan las trazas que pasan por vértices de las bases, situados dentro del ángulo \widehat{ATD} , formado por los planos límites t_1 y t_3 ya que las aristas de una superficie cortan a las caras de la otra, en los vé-

trices de la quebrada de intersección.

Por otra parte, la traza t_2 , por ejemplo (determinada por el vértice H de S_1), corta al lado AC , en I , pero esta generatriz corta a las b y K de S_2 en puntos I_b e I_k que no son vértices de la quebrada de intersección, sino puntos de los lados $A_a C_c$ y $A_m B_h$ de ésta.

Así se han obtenido las quebradas de entrada y salida $A_a C_c D_d H_b A_a$ y $A_m B_h C_g D_f H_k A_m$, de cuatro y seis lados respectivamente.

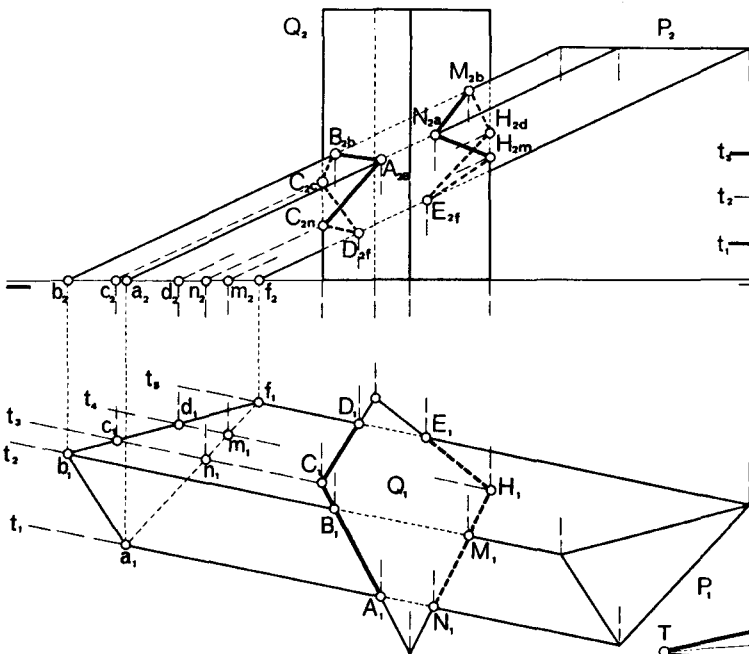
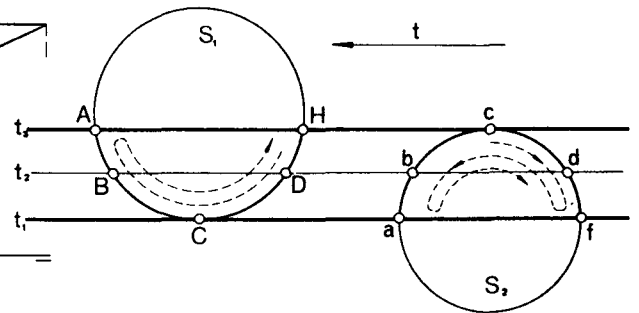
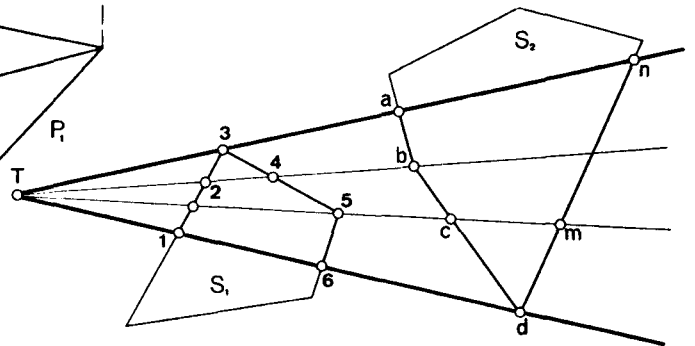


Fig. 18.5.—Intersección de prismas. Penetración.



(a) Superficies cilíndricas.



(b) Superficies piramidales o pimidial y prismática.

Fig. 18.6.—Casos de mordedura.

Esto es lo que se ha hecho en diédrica (Fig. 18.5), para hallar la intersección de los prismas P y Q , no siendo necesaria explicación alguna.

18.5. Mordedura (Fig. 18.6)

En este caso, cada plano límite es tangente a una de las superficies y corta a la otra. Las generatrices de S_1 correspondientes al arco \widehat{ACH} (figa), cortan a la parte de superficie de S_2 , definida por el arco \widehat{ac} , según una

curva de extremos A_c y H_c y a la parte limitada por \widehat{cf} , según otra curva de los mismos extremos A_c y H_c , luego ambas curvas forman una curva única, cerrada y alabeada.

Los puntos de intersección se han unido, recorriendo el arco \widehat{HCA} de S_1 , a partir de H , al mismo tiempo que se recorre el arco \widehat{acf} , a partir del punto C , en el sentido de las flechas, obteniéndose la curva de intersección $H_c D_a C_f B_d A_c B_b C_d H_c$.

La misma regla se aplicaría con directrices poligonales (Fig. b). Siguiendo éste método, en las figuras

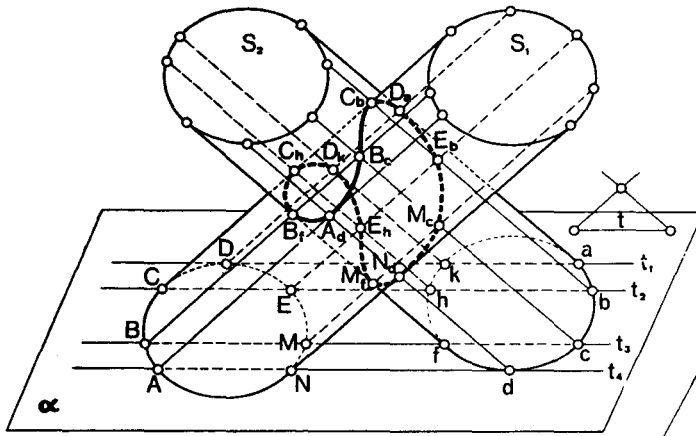


Fig. 18.7.—Mordedura de cilindros.

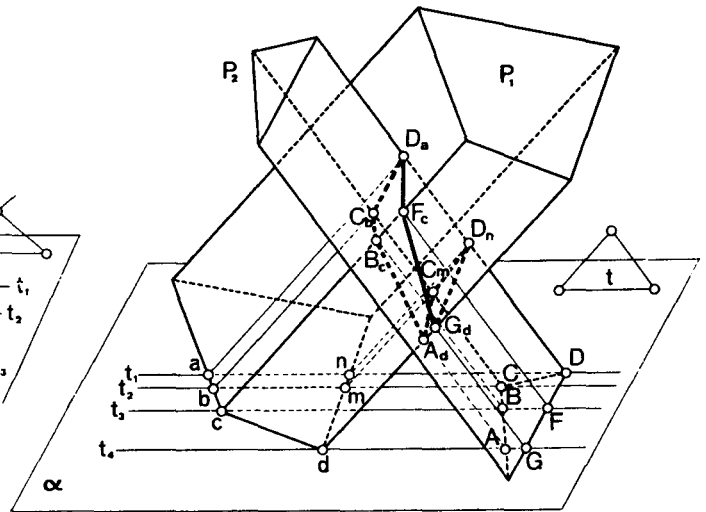


Fig. 18.8.—Mordedura de prismas.

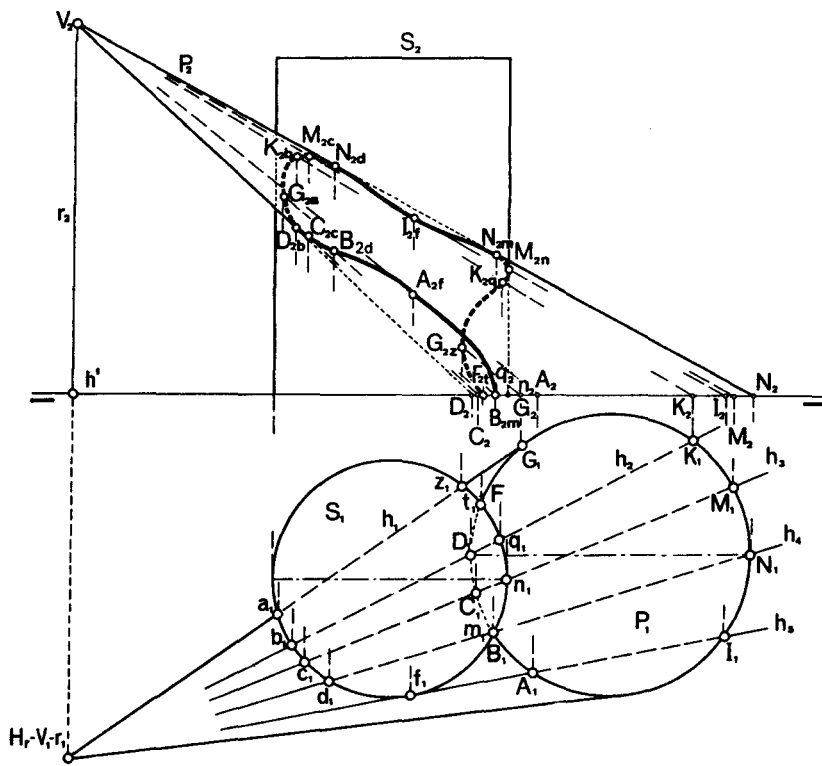


Fig. 18.9.—Mordedura de cono y cilindro.

18.7 y 8, se han dibujado dos casos de mordedura de cilindros y prismas en el espacio y en la figura 18.9, la intersección de cono y cilindro, en diédrica.

Si las bases no son coplanarias, como sucede con las pirámides P y Q , de vértice V y W y bases situadas en el vertical y horizontal (Fig. 18.10), se traza la recta $r \equiv VW$ de trazas H_r y V_r , por las que han de pasar las trazas h_1 , h_2 y v_1 , v_2 de los planos auxiliares.

El plano límite de trazas h_2-v_2 pasa por el vértice A de P ; corta a la base de Q , en b y c y determina los puntos A_c y A_b . El otro plano límite h_1-v_1 pasa por el vértice a de Q ; corta a la base de P , en B y C , y determina los puntos B_a y C_a . Como no existe ningún otro vértice entre las trazas, no se necesitan otros planos auxiliares. Uniendo ordenadamente estos puntos, se obtiene la quebrada de intersección $A_b B_a A_c C_a A_b$.

18.6. Penetración tangencial o límite

(Fig. 18.11)

Un plano límite t_i (Fig. a) es tangente a una superficie y el otro es tangente a los dos y determina el punto común F_f de las curvas de entrada y salida.

Esto se ve claramente en la figura b. Las generatrices de tangencia F y f del plano tangente común t_s se

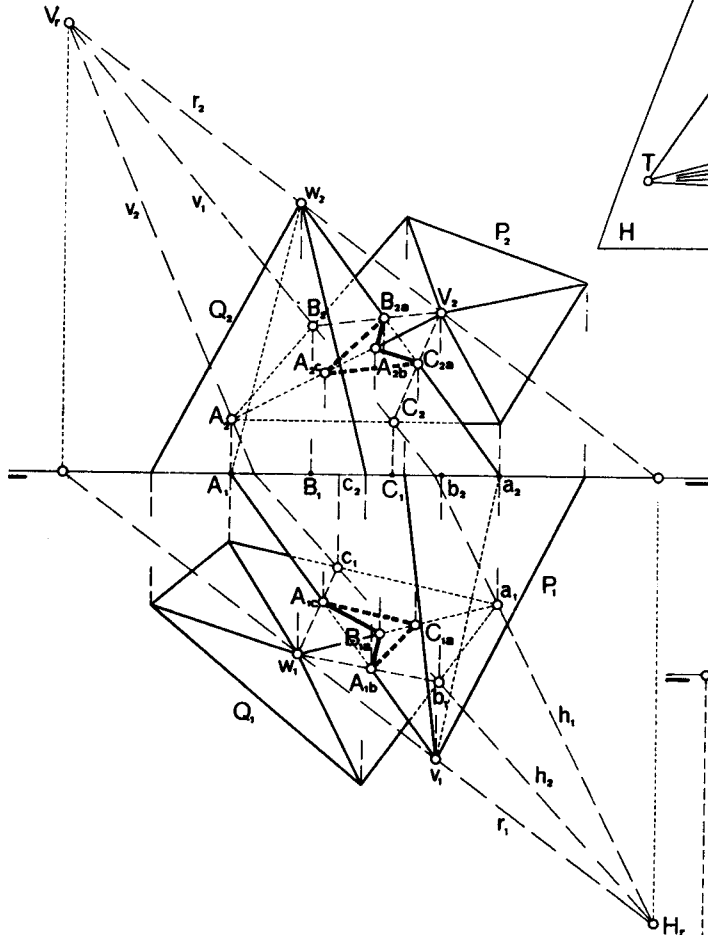


Fig. 18.10.—Mordedura de pirámides de bases no coplanarias.

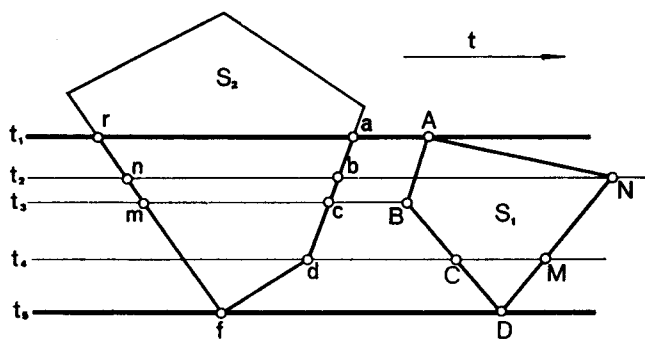


Fig. 18.11a.—Penetración tangencial de prismas

cortan en el punto común F_f de las curvas de entrada y salida: $F_f M_d N_c P_b Q_a P_n M_m F_f$ y $F_f D_c B_b A_b B_c N_d M_f$

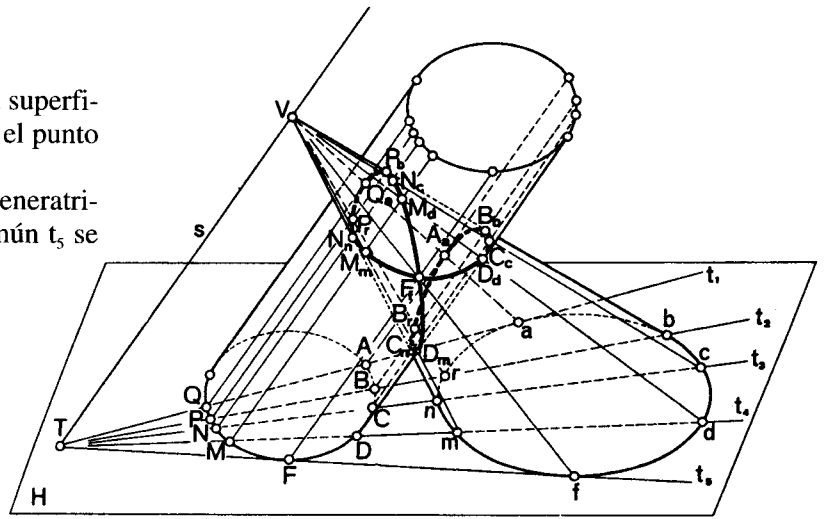


Fig. 18.11b.—Penetración tangencial de cono y cilindro

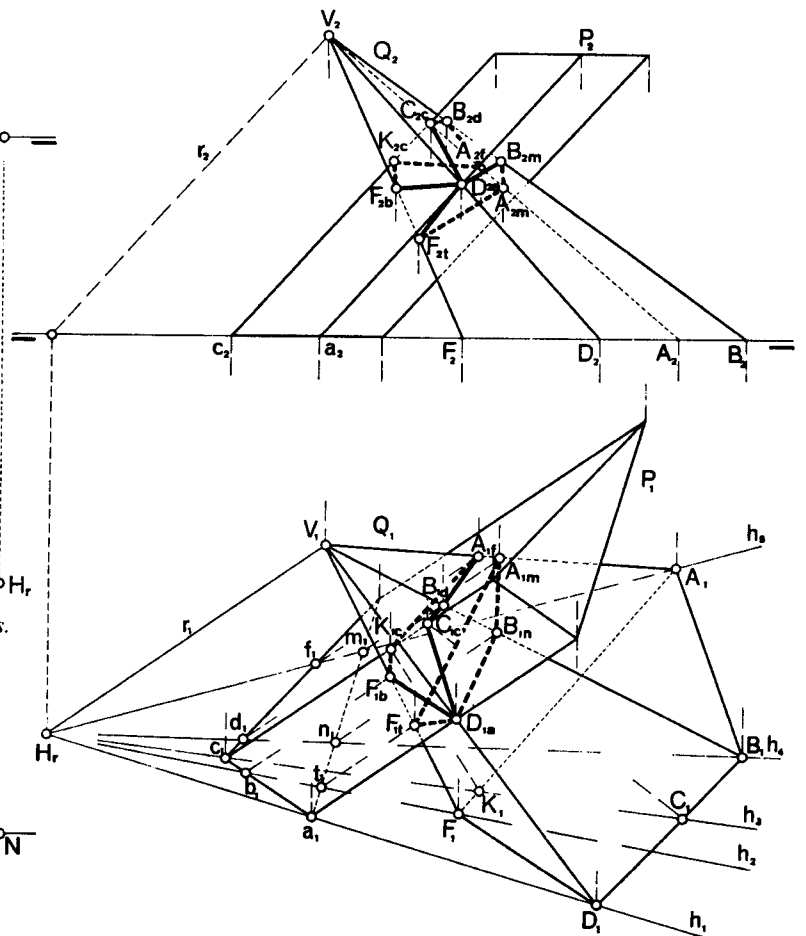


Fig. 18.12.—Penetración tangencial de pirámide y prisma.

Las tangentes a estas curvas están contenidas en el plano t_5 . De forma análoga se ha obtenido la quebrada de intersección, en diédrica, de la pirámide y prisma representados en la figura 18.12.

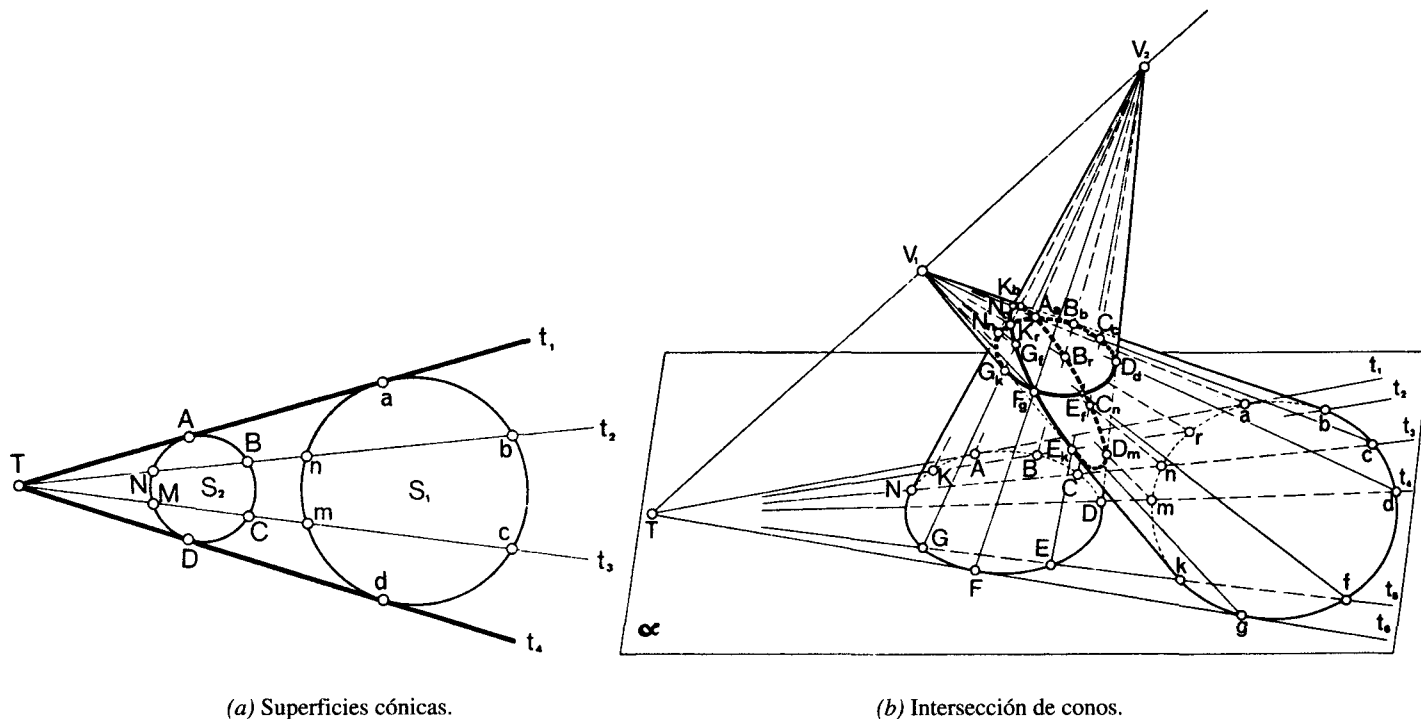


Fig. 18.13.—Casos de penetración máxima.

18.7. Penetración mutua o máxima (Fig. 18.13)

Los planos límites son tangentes comunes a las dos superficies y determinan los puntos comunes de las curvas de entrada y salida, siendo éstos los \$A_a\$ y \$D_d\$ (Fig. a) y los \$A_a\$ y \$F_g\$, en la figura b.

Las curvas de entrada y salida son distintas para

cada superficie (núm. 18,2-d). Así, las producidas por el cono de vértice \$V_1\$, en el de vértice \$V_2\$ (Fig. b), son: las \$F_gE_rD_dC_cB_bA_aB_rC_nD_mE_kF_g\$ y \$F_gG_kN_nK_aK_bN_cG_rF_g\$ y las producidas por el de \$V_2\$ son las \$F_gE_kD_mC_nB_rA_aK_rN_nG_kF_g\$ y \$F_gE_rD_dC_cB_bA_aK_bN_cG_rF_g\$.

En general, en el caso de conos y cilindros, ambas curvas forman en conjunto dos elipses.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Para facilitar las construcciones, uno de los ejes se ha colocado vertical o de punta y el otro, paralelo a \$H\$ o \$V\$, pudiendo conseguirse ésto por un simple giro o cambio de plano.

18.8. Ejes coincidentes (Fig. 18.14)

Los meridianos principales \$a\$ y \$b\$ de las superficies representadas, se cortan en puntos \$P, Q\$ y \$R\$ que deter-

minan los paralelos de intersección buscados \$p_1-p_2, q_1-q_2\$ y \$r_1-r_2\$.

18.9. Ejes paralelos (Fig. 18.15)

Sea el cono de revolución de eje vertical, vértice \$V\$ y generatriz \$g\$, y la esfera de centro \$O\$ y diámetro \$f\$ (considerado como eje). Como superficies auxiliares, se toman planos normales a los ejes, de traza \$v\$, por

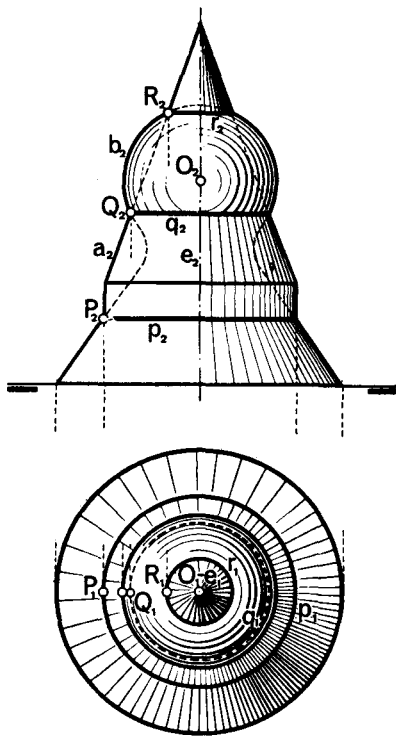


Fig. 18.14. - Intersección de superficies de ejes coincidentes.

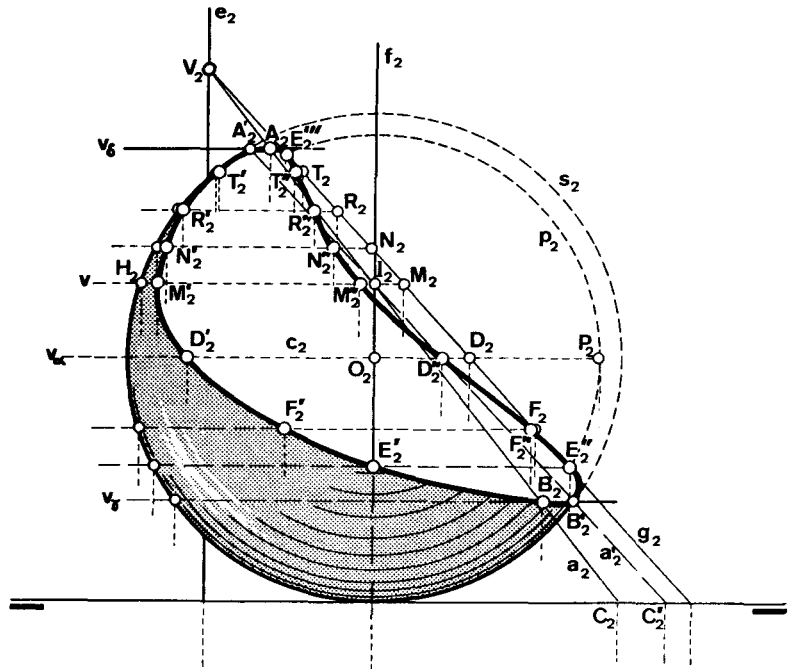


Fig. 18.15. - Cono y esfera de ejes paralelos.

ejemplo, que corta al cono y a la esfera, según paralelos que pasan por M_1-M_2 y H_1-H_2 y se cortan en los puntos M' y M'' de la intersección buscada.

El plano α del contorno aparente horizontal c de la esfera, determina los puntos D' y D'' de c .

El plano β de los ejes es plano de simetría común de ambas superficies y de su intersección, y contiene a los puntos más alto y bajo de ésta. Para hallarlos, basta girar la generatriz de corte $a \equiv VC$ del cono, alrededor de f_1-f_2 , hasta su posición frontal $a' \equiv IC'$ que corta a s_1-s_2 (círculo sección girado), en A' y B' . Deshaciendo el giro, se obtienen los puntos A_1-A_2 y

B_1-B_2 que limitan los planos auxiliares útiles, de trazas v_δ y v_γ tangentes a la curva en A_2 y B_2 .

Los puntos del contorno aparente vertical del cono se hallan, por medio del plano vertical de traza $h_\epsilon \equiv g_1$ que corta a la esfera, según el círculo frontal p_1-p_2 . Los puntos de corte de g y p son los E'' y E''' buscados.

Trazando planos horizontales, comprendidos entre v_δ y v_γ se obtienen nuevos puntos que permiten dibujar la intersección buscada. Para mayor claridad, sólo se ha representado la porción de esfera interior al cono y la porción correspondiente de éste.

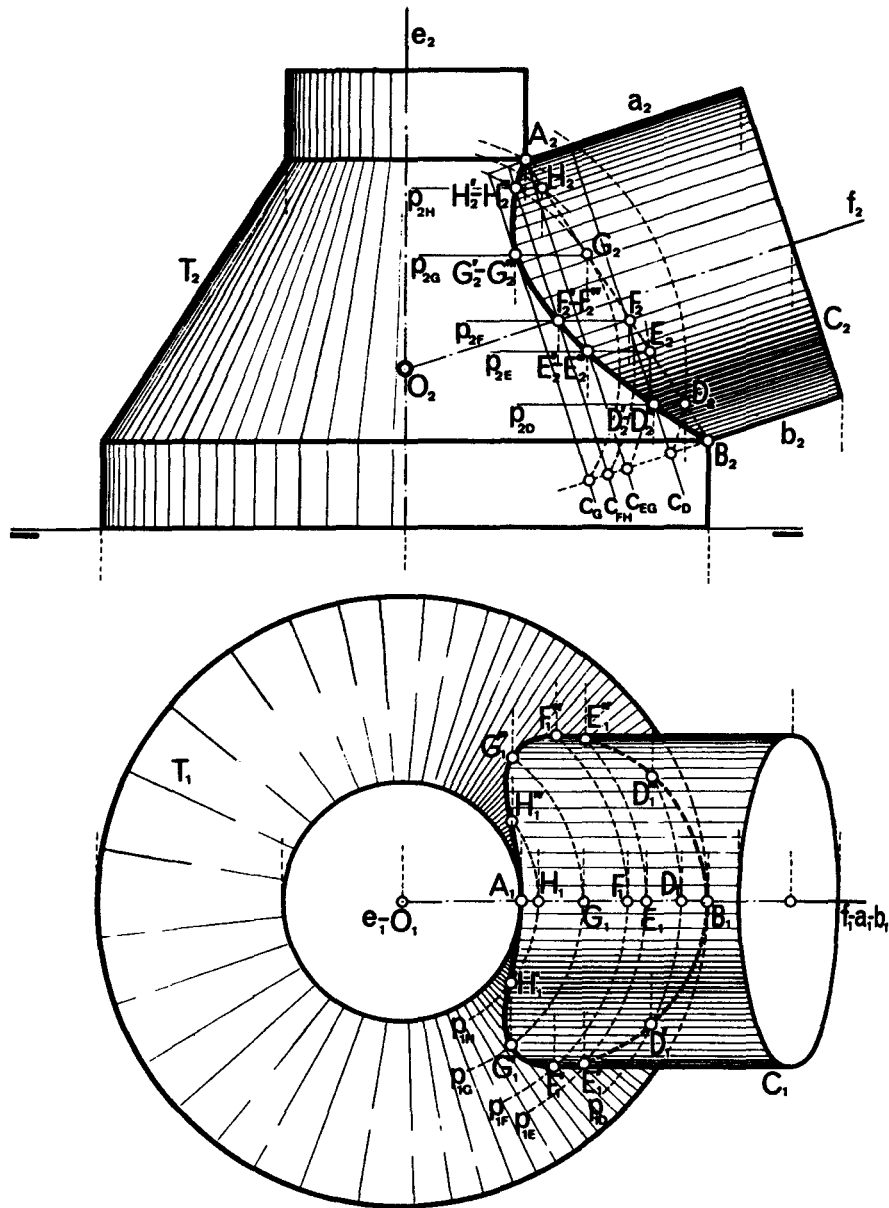


Fig. 18.16.—Cono y cilindro de ejes concurrentes.

18.10. Ejes concurrentes (Fig. 18.16)

Sea la tubería cilíndrica C_1-C_2 , de generatriz a_1-a_2 y eje frontal f_1-f_2 que corta, en O_1-O_2 , al eje e_1-e_2 de la pieza troncocónica T , de generatriz \overline{AB} .

Con ejes en esta posición, lo más práctico es utilizar, como superficies auxiliares, esferas cortantes de centros O . Así, la de contorno aparente tangente a la generatriz AB de T , en G_2 (esfera límite), corta a T , según el paralelo $p_{1G}-p_{2G}$ y a C , según un círculo de proyección c_G . Los puntos de corte $G'_2-G''_2$ de c_G y p_{2G} determinan dos puntos $G'_1-G'_2$ y $G''_1-G''_2$ de la intersección buscada.

Las intersecciones A y B de los contornos aparentes verticales son los puntos más altos y bajo de la intersección, de tangente de punta.

El plano frontal de los ejes es plano de simetría común a ambas superficies y de simetría de la intersección luego la proyección horizontal de ésta es simétrica, respecto a f_1 , y la vertical es una línea de puntos dobles con dos puntos de retroceso A_2 y B_2 .

Trazando nuevas esferas auxiliares, se obtienen nuevos puntos que permiten dibujar la intersección buscada.

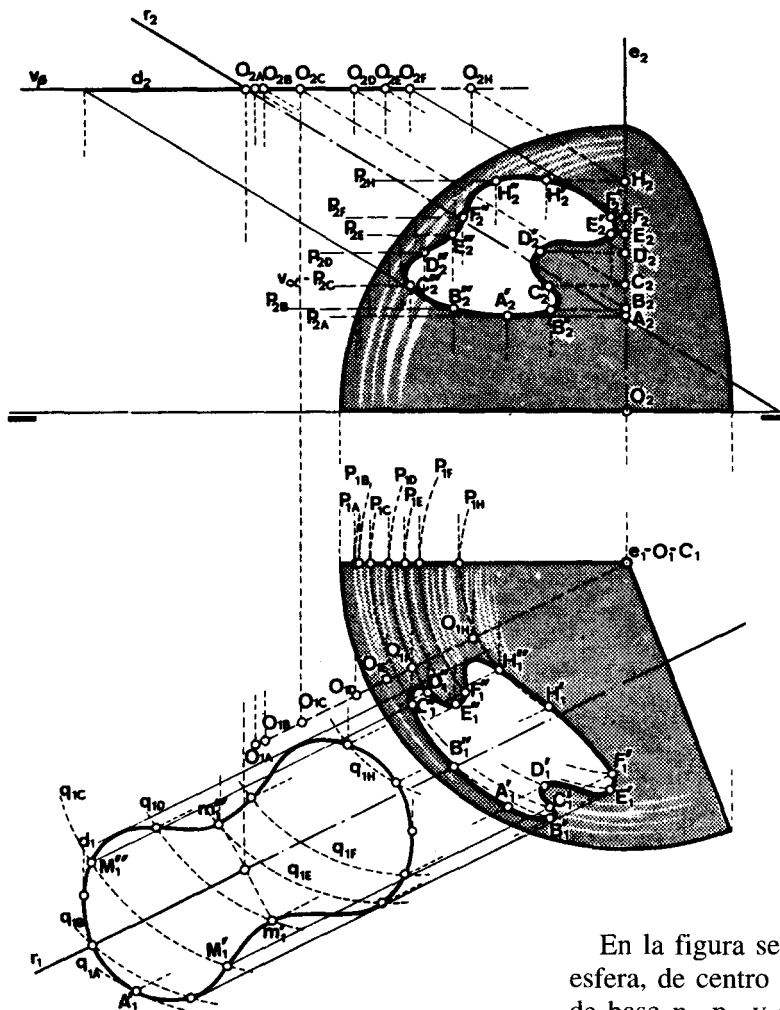


Fig. 18.17.—Intersección de cilindro y esfera.

18.11. Ejes no coplanarios (Fig. 18.17)

Si una superficie de revolución de eje e (una esfera de centro O) es cortada por un prisma o cilindro (de revolución o no) de eje r y directriz d (en nuestro caso, en forma de ocho) situada en un plano β , normal a e , resulta práctico utilizar como superficies cortantes, cilindros de eje paralelo a r .

En la figura se ha trazado un paralelo $p_{1c}-p_{2c}$ de la esfera, de centro C y plano α , y un cilindro auxiliar, de base $p_{1c}-p_{2c}$ y eje paralelo a r , trazado por C , que corta al plano β , en $O_{1c}-O_{2c}$. La base superior del cilindro es el círculo q_c , de centro O_c y radio igual al del paralelo p_c que corta a la directriz d_1-d_2 , en M'_1 y M''_1 . Las generatrices $M'C$ y $M''C$ (paralelas a r_1) cortan a p_{1c} en las proyecciones C'_1 y C''_1 de los puntos C y C' buscados.

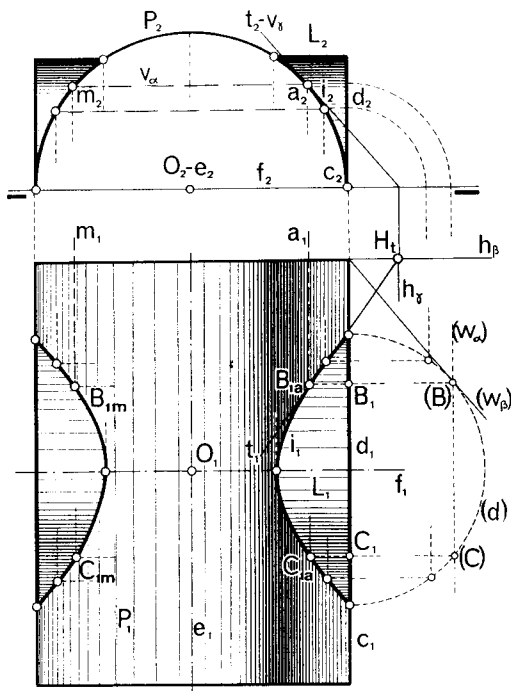
Repetiendo la construcción con otros paralelos p_A, p_B, \dots, p_H se obtienen nuevos puntos que permiten dibujar la curva de entrada $A', B', C', \dots, C'', B'', A''$ del cilindro en la esfera.

CUÁDRICAS DE REVOLUCIÓN

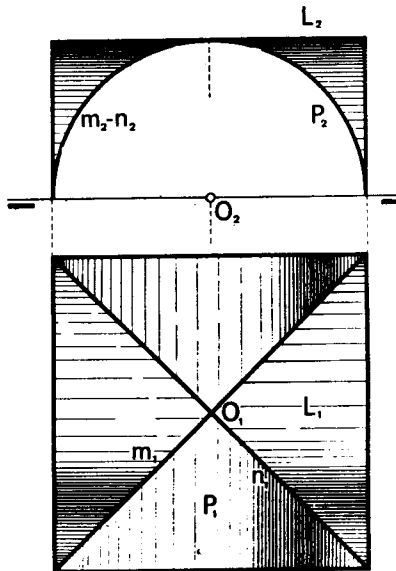
18.12. Propiedades generales

Son aplicables a todas las cuádricas y, por tanto, a las de revolución.

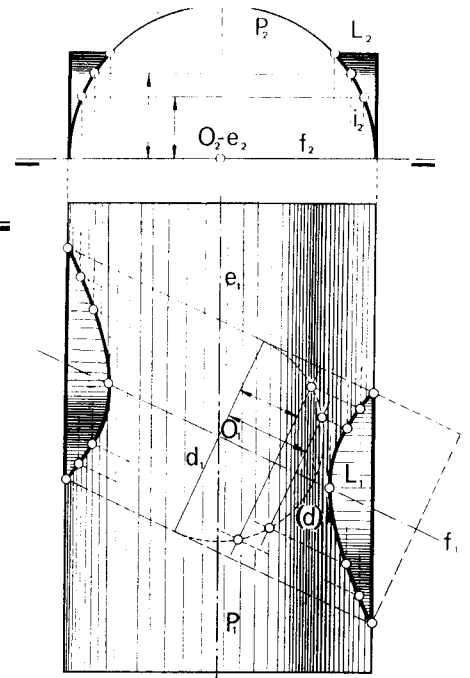
Las propiedades más importantes de la intersección de cuádricas de revolución (ver núms. 25,11 a 14 de n/G.D.S. y A.), son:



(a) Luneto cilíndrico recto.



(b) Cúpula de lunetos.



(a) Lúneto cilíndrico oblicuo.

Fig. 18.18.—Lunetos.

Fig. 18.19.

1.^a *Cuádricas con un plano de simetría común.* La intersección de 4^o orden se proyecta sobre este plano, según una curva de 2^o orden (Fig. 18.16) que, en este caso, es un arco de hipérbola.

2.^a *Cuádricas bitangentes.* Se cortan, según dos cónicas (Fig. 18.13-b) que pasan por los puntos de tangencia F y A (puntos dobles) de las superficies.

18.13. Ejes concurrentes y circunscritos a una esfera

Se cortan según dos cónicas (núm. 18,12-2^o) que se proyectan sobre el plano de los ejes, (núm. 18,12-1^o), según dos rectas (Figs. 18.18-b y 18.22).

A continuación exponemos algunos casos de intersecciones de superficies de revolución, de frecuente uso en Arquitectura e Ingeniería para cubrir un espacio (bóvedas o cúpulas), para dar luz a éstos (lunetos) o para derivaciones o codos de tuberías, etc.

18.14. Ejes concurrentes

La intersección se proyecta ortogonalmente sobre el plano de los ejes, según una hipérbola (Figs. 18.18-a, 18.19-a y 18.20).

18.15. Ejes paralelos

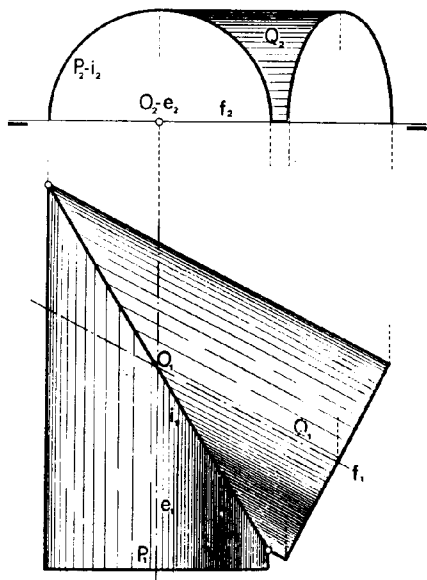
La intersección se proyecta sobre el plano de los ejes (Fig. 18.21), según un arco de parábola de eje normal al de las cuádricas. (Ver núms. 19.1 a 19.16 de n/E. de G.D.).

APLICACIONES

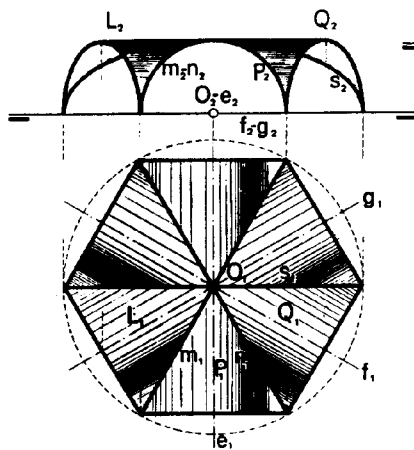
18.16. Luneto cilíndrico recto

Se llama *luneto* la bóveda pequeña, abierta en otra mayor o *principal* para dar luz a ésta.

a) *Luneto cilíndrico recto* (Fig. 18.18-a). Formado por una bóveda cilíndrica L_1-L_2 , de eje f_1-f_2 normal al



(b) Bóveda acodillada.



(c) Cúpula de lunetos.

Fig. 18.19.

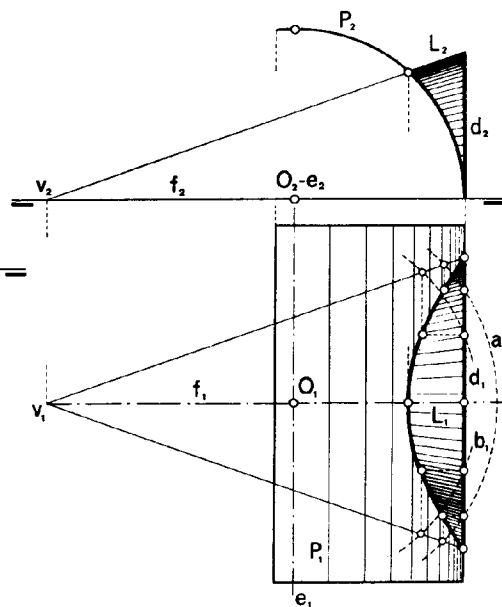


Fig. 18.20.—Luneto cónico.

eje e_1-e_2 de la bóveda cilíndrica principal P_1-P_2 (bóveda de cañón). Como casos particulares de éste, citaremos:

b) *Cúpula de lunetos* (Fig. 18.18-b). Formado por dos bóvedas cilíndricas (de cañón) P y L , del mismo diámetro y ejes normales, de igual longitud que el diámetro.

18.17. Luneto cilíndrico oblicuo (Fig. 18.19-a)

Formado por el cañón de eje f_1-f_2 y directriz circular, abatida en (d) , al cortar oblicuamente a la bóveda principal P_1-P_2 . Como casos particulares de éste, citaremos:

a) *Bóveda acodillada* (Fig. 18.19-b). Formada por dos bóvedas de cañón, de igual diámetro, cuyos ejes se cortan oblicuamente.

b) *Cúpula de lunetos* (Fig. 18.19-c). Formada por lunetos de igual diámetro y ejes igualmente espaciados y concurrentes en un punto.

18.18. Otros lunetos

a) *Luneto cónico* (Fig. 18.20). Es el L_1-L_2 , determinado por la superficie cónica de vértice V , eje f y directriz circular d_1-d_2 , en el cañón P_1-P_2 , de eje e normal a f (luneto recto).

b) *Luneto esférico* (Fig. 18.21). Es el L_1-L_2 , deter-

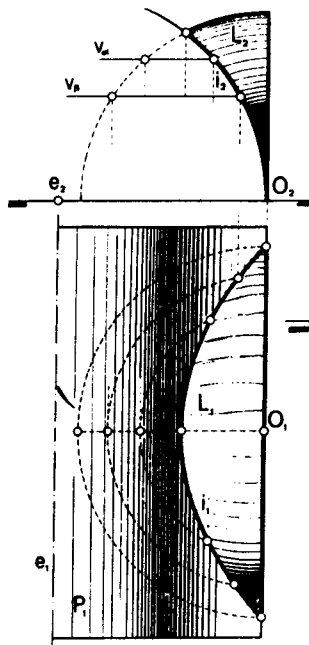


Fig. 18.21.—Luneto esférico.

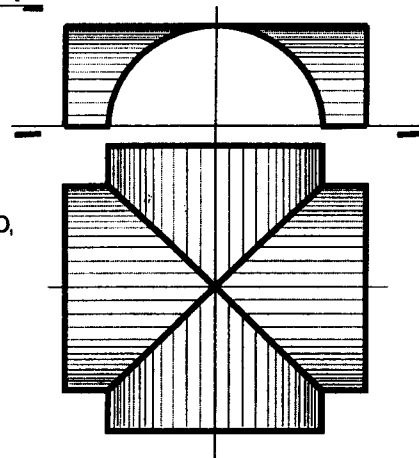


Fig. 18.22.—Bóveda por arista.

minado por la esfera de centro O_1-O_2 en el cañón P , de eje e .

18.19. Bóvedas

a) *Bóveda por arista* (Fig. 18.22). Es la misma que la de la figura 18.18-b, pero aplicada a dos bóvedas de cañón que se cortan ortogonalmente.

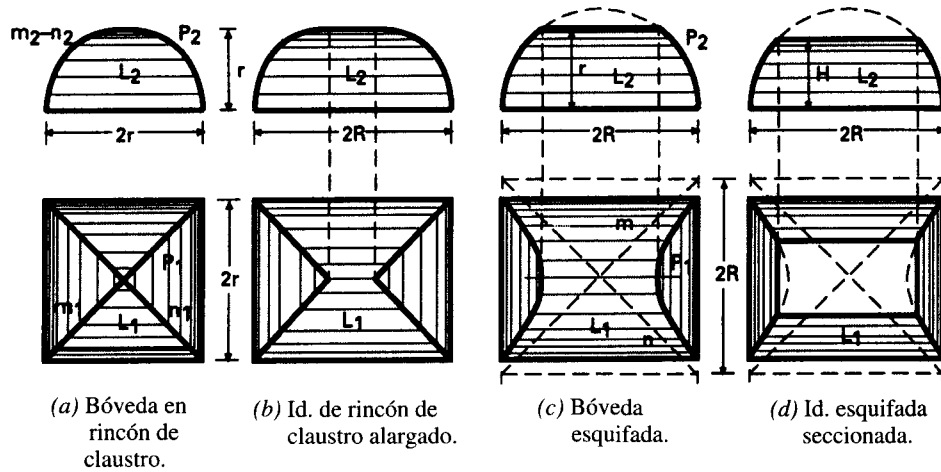


Fig. 18.23.—Otras bóvedas

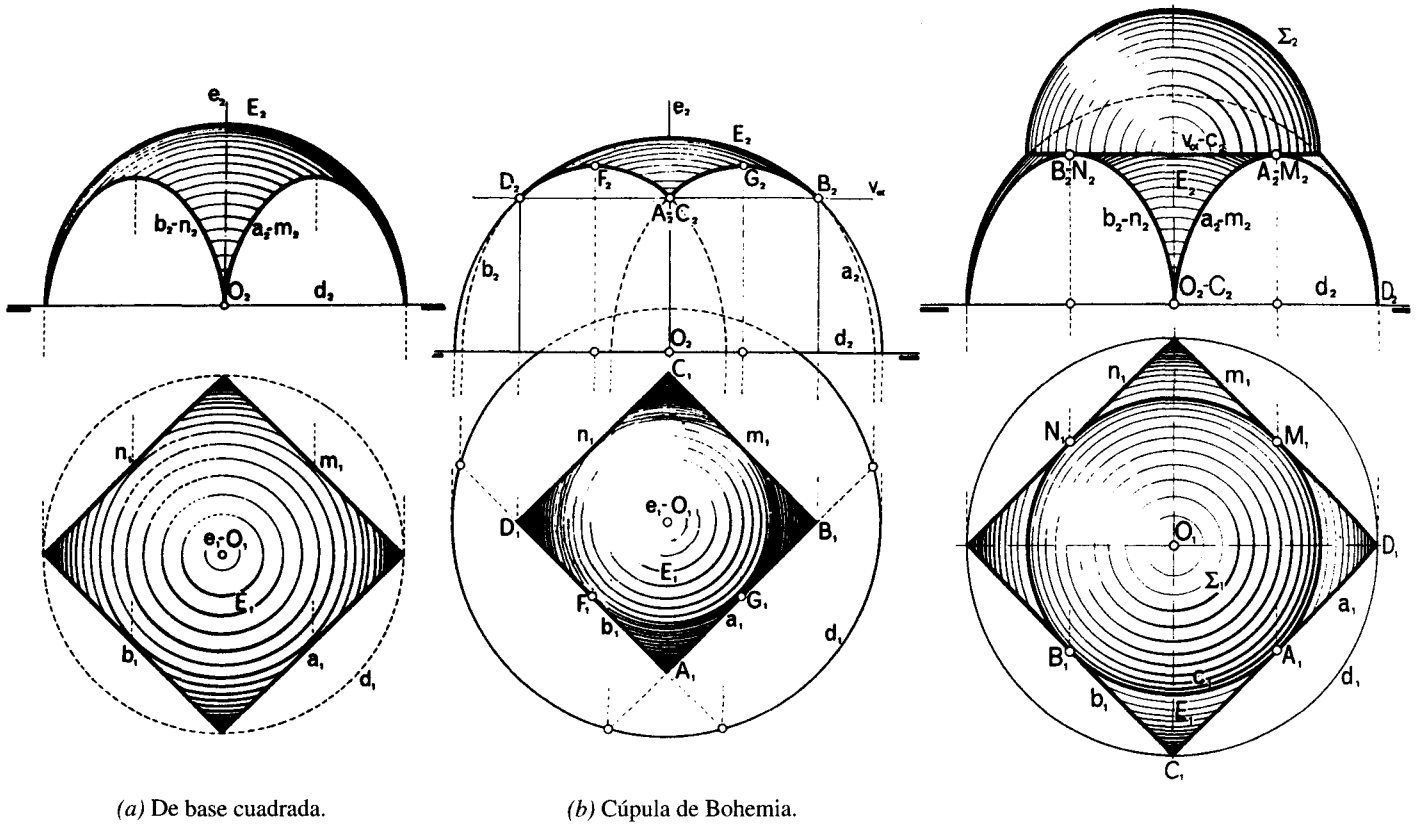


Fig. 18.24.—Bóveda vaída.

Fig. 18.25.—Cúpula bizantina.

b) *Bóveda de rincón de claustro* (Fig. 18.23). Es de planta cuadrada (Fig. a) y está formada por dos cilindros de igual diámetro y ejes normales entre sí. Para cubrir plantas rectangulares, se utilizan las que siguen, derivadas de ésta.

c) *Bóveda de rincón de claustro alargado* (Fig. b). Se obtiene, sustituyendo al cilindro L_1 - L_2 de la figura

(a) por otro de igual diámetro y longitud $2R$.

d) *Bóveda esquifada* (Fig. c). Formada por los cilindros L y P , de diámetros $2r$ y $2R$ y ejes de longitudes $2R$ y $2r$, respectivamente.

e) *Bóveda esquifada seccionada* (Fig. d). Se obtiene, seccionando la anterior por un plano horizontal de cota $H < r$.

f) *Bóveda voida* (Fig. 18.24-a). Formada por la intersección de la semiesfera E_1-E_2 , de centro O_1-O_2 y base d_1-d_2 con un prisma recto de eje vertical e_1-e_2 y base cuadrada, inscrita en d_1-d_2 . A este tipo de bóveda pertenecen:

- La *bóveda voida rectangular*, si la base del prisma es rectangular.
- La *cúpula de Bohemia* (Fig. 18.24-b), producida por un prisma de eje e_1-e_2 y base cuadrada interior a d_1-d_2 . También se llama de *cuatro puntas*, por apoyarse en las intersecciones $A, B, C,$ y D de las aristas verticales del prisma con la esfera, situadas en el plano horizontal α .

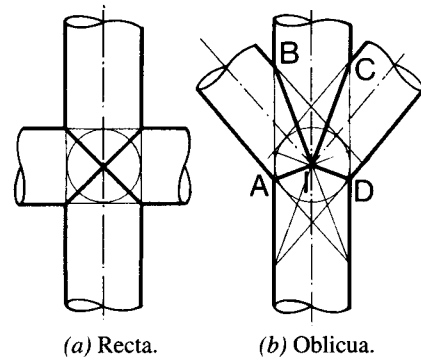


Fig. 18.26.—Derivaciones del mismo diámetro.

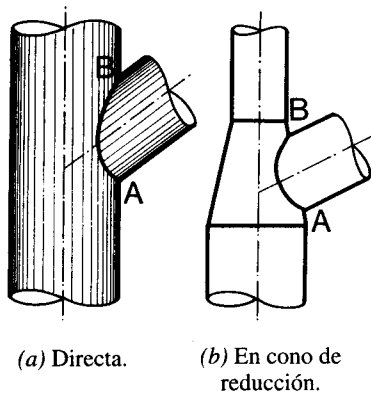


Fig. 18.27.—Derivación de distinto diámetro.

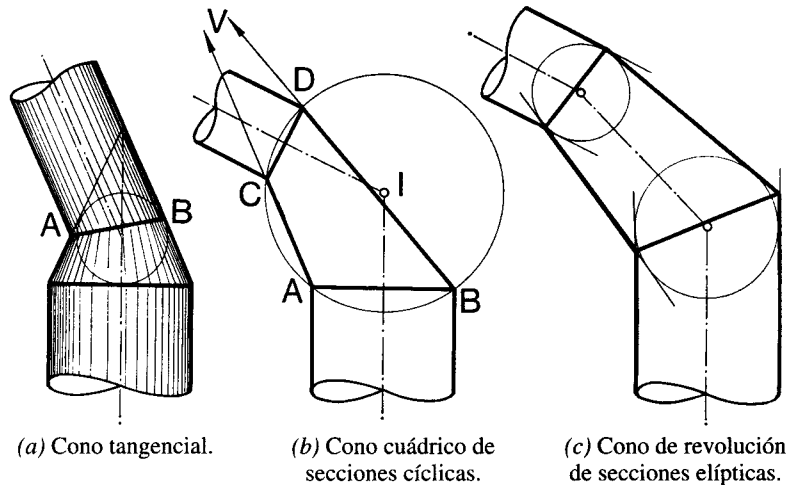


Fig. 18.28.—Piezas de transición.

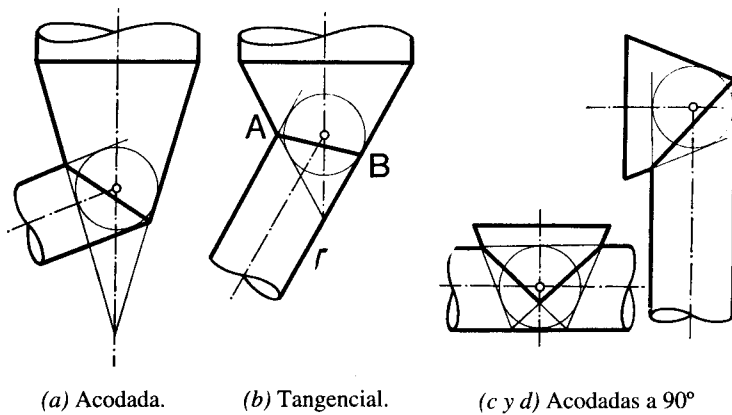


Fig. 18.29.—Tolvas simples.

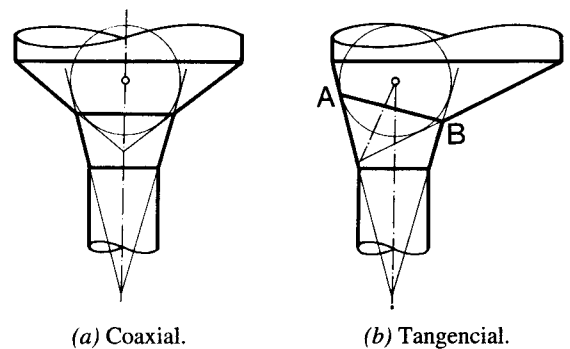


Fig. 18.30.—Tolvas de doble cono.

g) *Cúpula bizantina* (Fig. 18.25). Es la formada por la bóveda voida de la figura 18.24, rematada por una semiesfera $\Sigma_1-\Sigma_2$. Las proyecciones c_1 y d_1 de las bases de las semiesferas Σ y E son inscritas y circunscritas a la base cuadrada del prisma.

El plano α de c_1-c_2 corta a la semiesfera E en cuatro partes iguales $ABCA, AMDA, \dots$, etc., llamadas *pechinas*. De aquí el nombre de *cúpula sobre pechinas* con que también se la conoce.

18.20. Tuberías

En las figuras 18.26 a 18.30 se han dibujado las proyecciones ortogonales, sobre el plano de los ejes, de diversos ejemplos de derivaciones, piezas de transición y tolvas, de tuberías cilíndricas de revolución y elípticas.

C. SOMBRAS

19. GENERALIDADES

19.1. Definiciones y convenios

a) Como ya se sabe, la luz emitida por un foco luminoso, en un medio homogéneo, se propaga en línea recta y los rayos (rectas) que parten del foco, en todas direcciones, son los *rayos luminosos*.

Si el foco luminoso se encuentra a distancia finita del objeto, la iluminación se llama *cónica*. En este caso, puramente teórico, el foco se supone finito, artificial y puntual. Si se traslada al infinito, el foco ya no es un punto, como sucede en la iluminación natural (sol, luna, etc.); los rayos luminosos son prácticamente paralelos entre sí y la iluminación se llama *cilíndrica*.

Si un cuerpo está iluminado por un foco puntual F (Fig. 19.1), todo rayo FA que incida sobre el cuerpo queda detenido en A , pero su prolongación teórica (rayo de sombra) cortará al cuerpo, en A' y al plano de proyección π , en A_s .

Los rayos del haz F tangentes al cuerpo, como el FM , son generatrices del *cono luminoso* del cuerpo, y sus puntos de tangencia M, N, P, \dots , etc. (directriz del cono) determinan la línea de separación (*separatriz*) entre la *zona iluminada* y la de *sombra* (*sombra propia* del cuerpo). Finalmente, la intersección M_s, N_s, P_s, Q_s, M_s de la superficie cónica con π (o con otra superficie) es la *sombra arrojada* por el cuerpo sobre dicha superficie. En los cuerpos no convexos o en las superficies compuestas, la sombra que una parte del cuerpo

arroja sobre sí mismo, se llama *sombra autoarrojada*.

Lo dicho para la iluminación cónica podemos aplicarlo a la cilíndrica, sin más que cambiar el cono o la superficie cónica, por el cilindro o superficie cilíndrica.

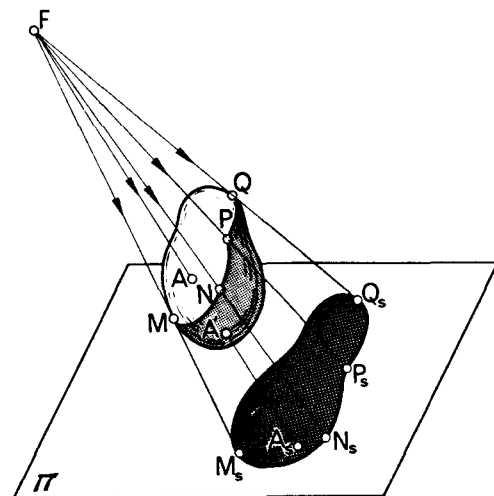


Fig. 19.1.—Sombras de un cuerpo.

Los problemas de iluminación o determinación de sombras propias y arrojadas se reducen, en geometría, a problemas de tangencia (determinación de la directriz del cono de luz) y de intersecciones o secciones (sombra arrojada).

b) En el dibujo técnico y artístico, se utiliza la *iluminación cilíndrica*. Si la dirección l de los rayos luminosos es paralela a la diagonal \overline{AV} (Fig. 19.2) de un cubo, de caras situadas en H y V , y arista coincidente con LT , las direcciones de las proyecciones $l_1 \equiv A_1V_1$ y $l_2 \equiv A_2V_2$ forman con LT ángulos de 45° . De ahí, el nombre de *iluminación a 45°* con que también se la conoce.

En lo sucesivo, mientras no se advierta lo contrario, utilizaremos la iluminación a 45° .

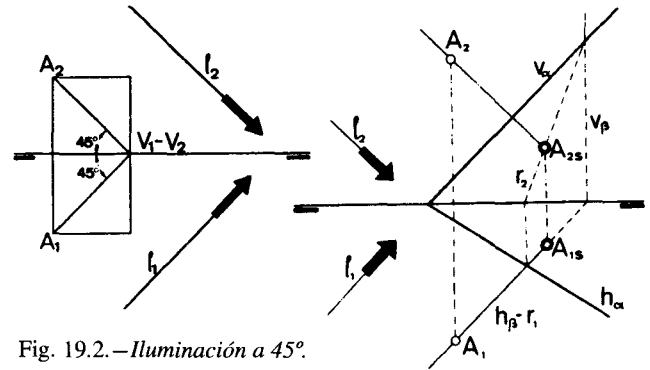


Fig. 19.2.—Iluminación a 45° .

Fig. 19.3.—Sombra del punto A sobre α .

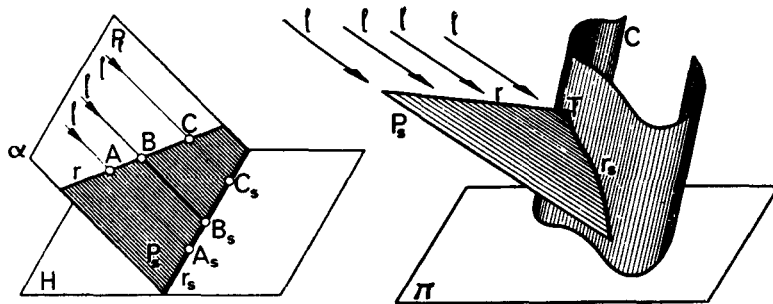


Fig. 19.4.—Sombra de una recta sobre un plano.

Fig. 19.5.—Sombra de una recta sobre una superficie curva.

19.2. Sombra del punto

La sombra arrojada por un punto A , sobre una superficie, es la traza del rayo luminoso que pasa por A , con la superficie.

El rayo luminoso que pasa por A es la paralela a la dirección $l \equiv l_1-l_2$ de la luz, trazada por A_1-A_2 (Fig. 19.3) y su traza $A_{1s}-A_{2s}$ con el plano α es la sombra arrojada de A sobre α .

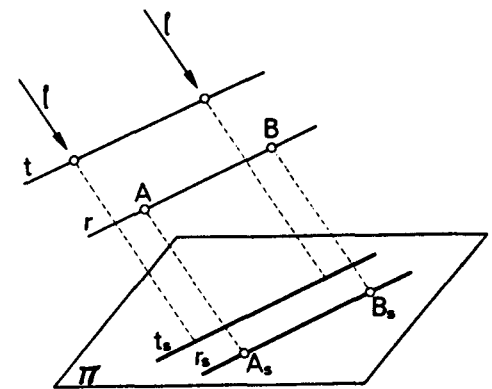


Fig. 19.6.—Sombra de rectas paralelas.

4.^a Si dos rectas r y t son paralelas entre sí, las sombras arrojadas sobre un plano son paralelas entre sí.

19.3. Sombra de la recta

El *plano de sombra* de una recta r (Fig. 19.4) es el proyectante $\alpha \equiv [r, l]$ de r , en la dirección de luz l , y la *sombra arrojada* sobre el plano H es la traza r_s de α con H o la proyección de r , sobre H , en dirección l .

La proyección oblicua puede aplicarse a las sombras, cambiando la palabra “proyección” por “sombra arrojada”. De aquí, las propiedades que siguen:

1.^a La sombra de una recta r (Fig. 19.5) sobre una superficie C es la traza r_s del plano de sombra P_s de r , con C .

2.^a Si r corta a la superficie C , en T , (traza de r) la sombra pasa por T .

3.^a Si un segmento \overline{AB} (Fig. 19.6) es paralelo a un plano π , la sombra arrojada A_sB_s es igual y paralela a \overline{AB} .

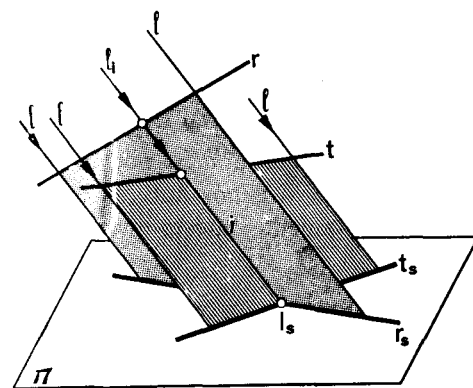


Fig. 19.7.—Sombra de rectas que se cruzan.

5.^a La sombra arrojada por una recta r (Fig. 19.7) sobre otra t que se cruza con ella es la producida por la intersección l_i de los planos de sombra de r y t o por la intersección I_s de sus sombras r_s y t_s , sobre cualquier superficie.

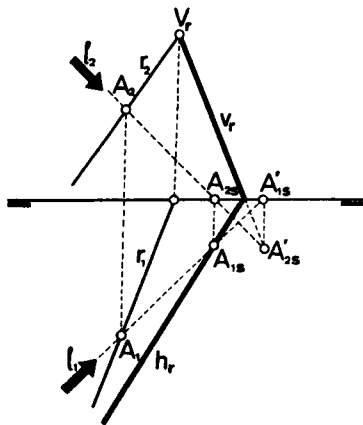


Fig. 19.8.—Sombra de una recta sobre H y V.

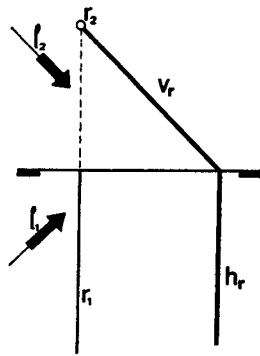


Fig. 19-9.—Sombra de una recta de punta.

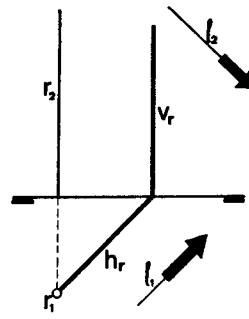


Fig. 19.10.—Sombra de una recta vertical

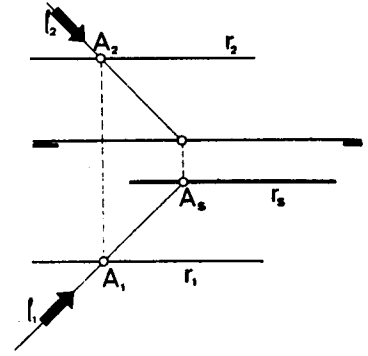


Fig. 19.11.—Sombra de una recta paralela a LT.

En las figuras 19.8 a 19.11 se han dibujado las sombras de una recta r , en diversas posiciones, sobre H y V.

En la figura 19.12, la sombra de r sobre el plano α se ha hallado por medio de la sombra A_s de un punto A de r que determina el plano de sombra h_{r-v} de r . La intersección MN de h_{r-v} y α es la sombra arrojada sobre α y H_1M y NV_1 , las arrojadas sobre H y V, respectivamente.

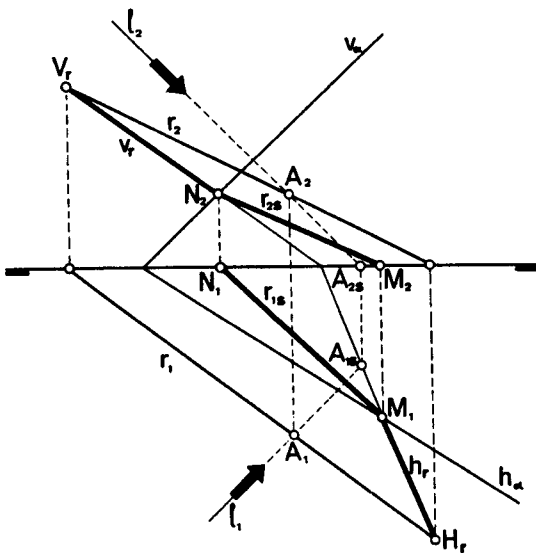


Fig. 19.12.—Sombra de r sobre α .

19.4. Sombra de líneas

La superficie de sombra de una línea a , plana o alabeada (Fig. 19.13), es la proyección de a (cilindro proyectante S), en la dirección de luz l y la sombra arrojada sobre otra superficie π (plana o no) es la intersección a_s de S y π .

Si la línea presenta elementos característicos (vértices en los polígonos; centro, ejes o tangentes en las cónicas, etc.) basta hallar las sombras arrojadas por éstos. En otros casos, pueden hallarse las sombras de puntos aislados y unirlos ordenadamente.

Como ejemplo de lo dicho, para hallar la sombra del círculo de centro O , radio \overline{OC} y plano frontal (Fig. 19.14), se hallan previamente las sombras O_s y O'_s de O , sobre H y V.

El cilindro de sombra del círculo dado corta al plano V, según el círculo de centro O'_s y radio $\overline{O'_sC_s} = \overline{O_2C_2}$ (por ser sus planos paralelos) y al plano H, según la elipse cuyos diámetros conjugados $\overline{A_sF_s}$ y $\overline{C'_sI_s}$ son las sombras de \overline{AF} y \overline{CF} , respectivamente, lo cual permite dibujarla. Ambas sombras han de cortarse en puntos M_s y N_s , situados en LT.

Un ejemplo de curva irregular lo tenemos en la superficie plana horizontal, en forma de paleta de pintor, con un agujero excéntrico, representada en la figura 19.15. La sombra se ha hallado por puntos aislados y tangentes, habiéndose elegido los siguientes:

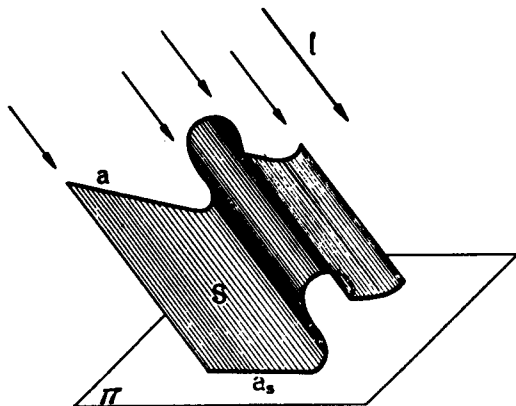


Fig. 19.13.—Sombra de una línea arbitraria.

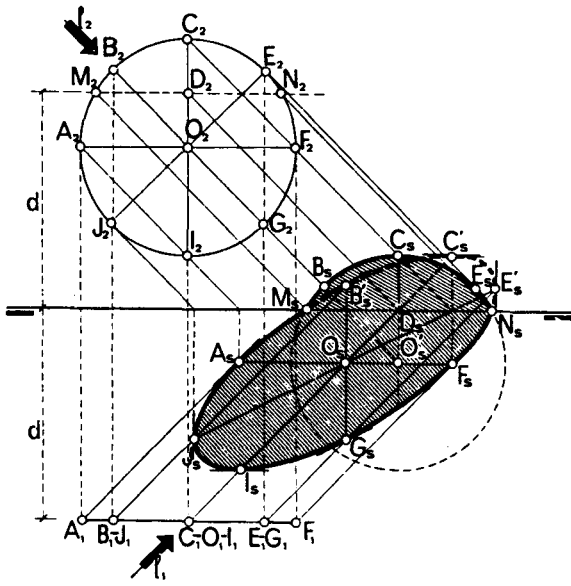


Fig. 19.14. - Sombra del círculo.

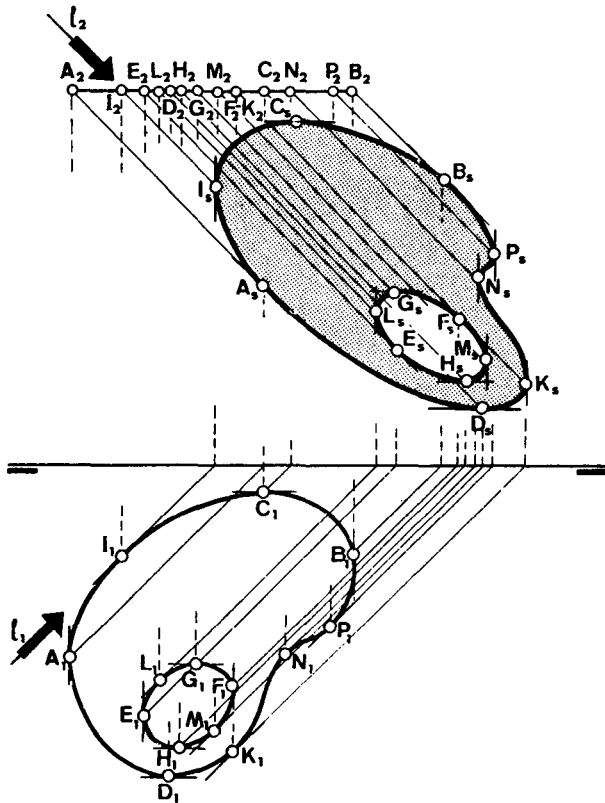


Fig. 19.15. - Sombras de curvas irregulares.

a) Los A y B situados más a la izquierda y más a la derecha, en la paleta, y los E y F, en el orificio. Las tangentes en ellos son rectas de punta y sus sombras, tangentes de dirección l_2 .

b) Los D, C y H, G de mayor y menor alojamiento, en la paleta y orificio, de tangentes en D_s , C_s y H_s , G_s , paralelas a LT .

c) Los I, K, N, P y L, M, de tangentes paralelas a l_1 , en la paleta y orificio, cuyas sombras son verticales.

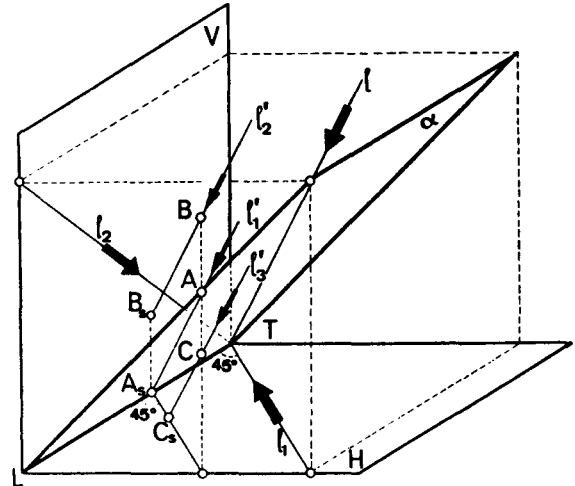


Fig. 19.16. - Plano limitador.

Las sombras de estos puntos y sus tangentes respectivas permiten dibujar fácilmente las sombras de la paleta y orificio.

19.5. Plano limitador

En la figura 19.16, se ha dibujado (de puntos) el cubo de referencia, descrito en el núm. 19,1-b, para definir la dirección l de los rayos de luz. Se ve fácilmente que los rayos, como el l , que cortan a LT , pertenecen al plano luminoso α , determinado por LT .

El plano α separa o limita los puntos del primer cuadrante situados entre V y α , como el B , que arrojan su sombra BS , en V , de los situados entre α y H , como el C , que la arrojan sobre H , en C_s . De aquí, el nombre del *plano limitador* o simplemente *limitador*, como le llamaremos en adelante.

En la iluminación a 45° , el plano limitador α es el primer bisector y en las demás, sean cónicas o cilíndricas, el definido por LT y el foco luminoso.

El plano limitador corta a cualquier figura, según una línea (limitatriz), cuyos puntos son los únicos de la figura que arrojan sombra sobre LT y divide a la figura en dos partes. La superior arroja sombra sobre V y la inferior sobre H .

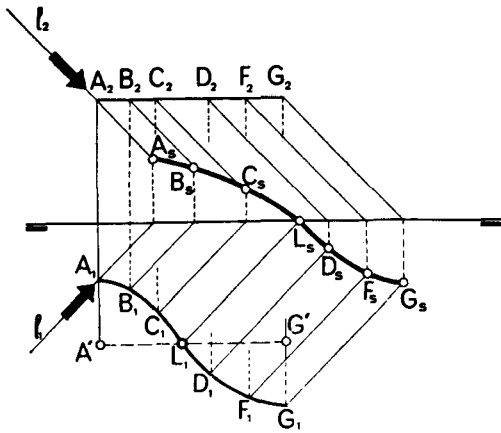


Fig. 19.17.—Sombra de una línea horizontal.

En la figura 19.17, la limitatriz (intersección del primer bisector con el plano horizontal de la curva) se ha hallado, trazando la simétrica $A'G'$ de la proyección vertical A_2G_2 de la curva, que corta a A_1G_1 en el punto limitador L , de sombra L_s , situada en LT .

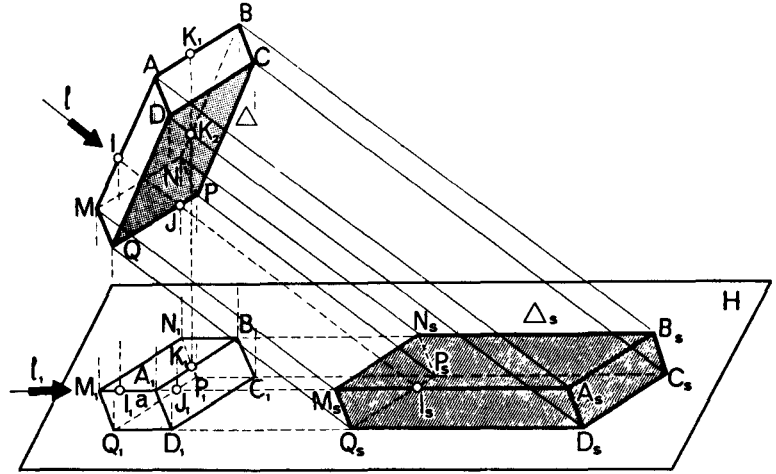


Fig. 19.19.—Sombra de un paralelepípedo.

zonal A_1F_1 , respecto a LT .

19.6. Sombras de poliedros

En los poliedros, la separatriz de sombra es un polígono cerrado, generalmente alabeado, cuyos lados son las aristas del poliedro comunes a una cara iluminada y a otra en sombra. El método para determinarla consiste (Fig. 19.19), en hallar las sombras de los vértices. El polígono perimetral $B_s C_s D_s Q_s M_s N_s B_s$ es la sombra arrojada por el polígono separador $BCDQMNB$, el cual divide al poliedro en dos zonas: la formada por el triedro de vértice P y sombra P_s y la del triedro de vértice A y sombra A_s .

Para determinar cual es el triedro iluminado, se traza el rayo luminoso que pasa por I_s (intersección de la arista $\overline{A_s M_s}$ del triedro A , con la \overline{PQ} del triedro P) y corta a AM y PQ , en I y J . Como I es el más próximo a la luz, el triángulo A será el iluminado luego sus aristas se dibujarán con trazo continuo y las del P , de trazos.

Como se ve, este método que llamaremos *del perímetro de sombra* es el utilizado para hallar los contornos aparentes y partes vistas y ocultas desde el foco de luz.

Así se ha hecho con el tetraedro $ABCD$ (Fig. 19-20). El polígono perimetral de sombra $A_s B_s C_s$ determina el polígono separador ABC .

La zona iluminada puede ser la cara ABC o el triedro de vértice D . Para determinar cuál es de las dos, se traza el rayo luminoso que pasa por D_s y corta a la cara ABC , en M_1 , (hallado por medio de la sombra auxiliar $A_s I_s$). La cara ABC es la iluminada, por estar M más próximo al foco luminoso que D y las otras tres, en sombra.

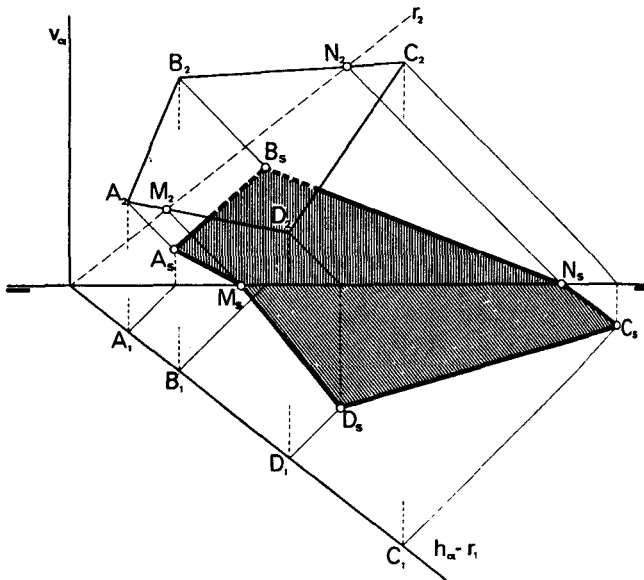


Fig. 19.18.—Sombra de un cuadrilátero.

La limitatriz de una figura plana de plano α (Fig. 19.18) para por la traza de LT y α . La limitatriz es la recta de proyecciones $r_1 \equiv h_\alpha$ y r_2 , simétricas respecto a LT , y corta al cuadrilátero en los puntos limitadores M y N , de sombras N_s y N_s , situadas en LT .

En la figura 19.14, la "limitatriz" se ha hallado, como intersección de la proyección vertical del círculo dado, con la simétrica $M_2 N_2$ de su proyección hori

19.7. Sombra del cono (Fig. 19.21)

Sea el cono oblicuo de vértice V (Fig. 19.21) y base elíptica, de centro O , plano de canto α y planta circular. El rayo luminoso trazado por V , corta a α , en I_1-I_2 y determina las tangentes \overline{IT} e \overline{IK} a la base, en T y K , y los planos de sombra $[VIT]$ y $[VIK]$ tangentes al cono, de trazas $\overline{V_sT_s}$ y $\overline{V_sK_s}$, tangentes a la sombra elíptica de la base, en T_s y K_s . De aquí, la construcción:

Dibujar la elipse de sombra de la base, de centro O_s y diámetros conjugados $\overline{A_sB_s}$ y $\overline{C_sD_s}$ (sombra de O y de dos diámetros perpendiculares de la base) y desde la sombra V_s de V , trazar las tangentes $\overline{V_sT_s}$ y $\overline{V_sK_s}$ a la elipse. El perímetro de sombra $V_sT_sB_sK_sV_s$ determina la separatriz (formada por las generatrices de tangencia VT y VK y el arco circular TBK) y las partes iluminadas y en sombra en ambas proyecciones.

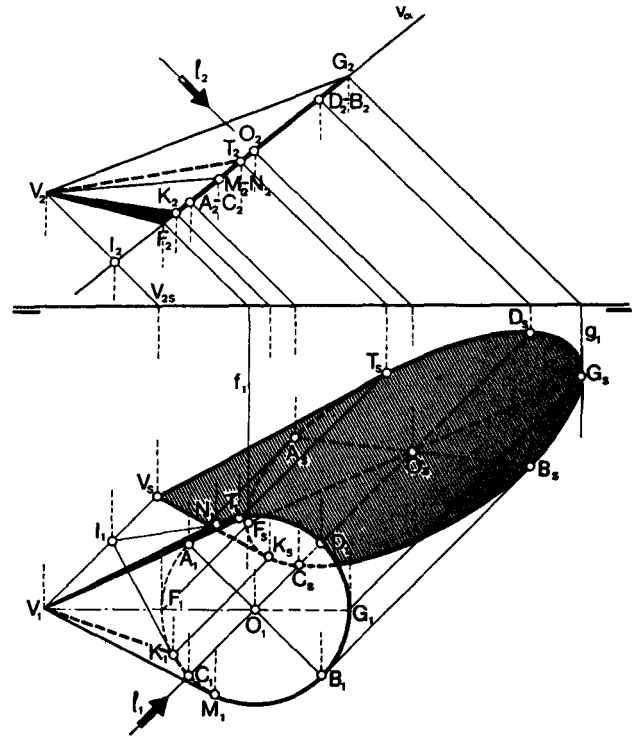


Fig. 19.21.—Sombra de un cono oblicuo.

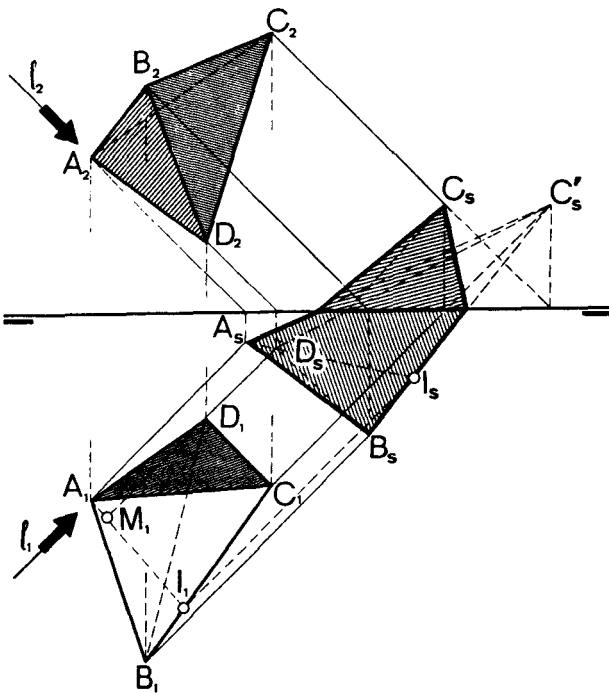


Fig. 19.20.—Sombra de un tetraedro.

19.8. Sombra del cilindro (Fig. 19.22)

Sea el cilindro de eje horizontal OE y bases circulares de centros O y E y plano frontal. La elipse de sombra de la base, de centro O , por ejemplo, es la de centro O_s y diámetros conjugados $\overline{A_sB_s}$ y $\overline{C_sD_s}$ (sombras de O y de los diámetros vertical y horizontal \overline{AB} y \overline{CD} de la base). Las tangentes comunes $\overline{T_sI_s}$ y $\overline{K_sJ_s}$ a ambas elipses determinan el perímetro de sombra (formado por las generatrices \overline{TI} y \overline{KJ} y los arcos circulares \overline{IGJ} y \overline{KDT}) y la sombra propia del cilindro.

Otro método consiste en trazar por O , el eje y el rayo luminoso OO_s que corta al plano de la otra base,

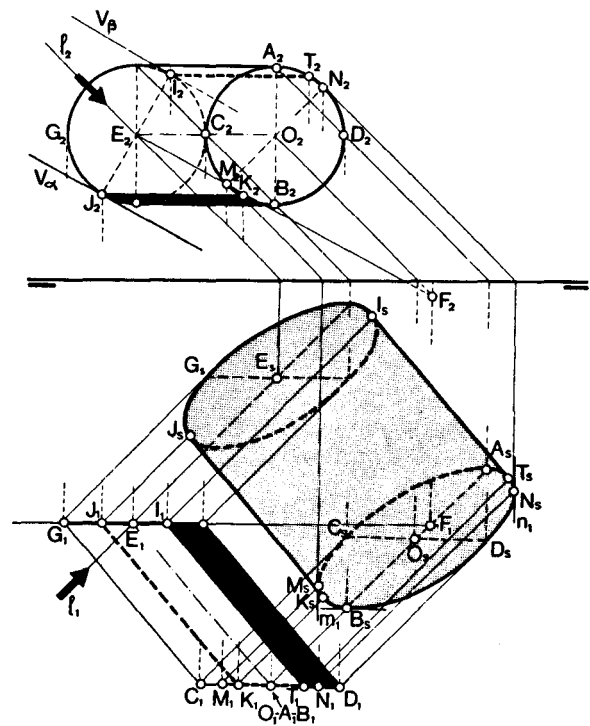


Fig. 19.22.—Sombra e un cilindro oblicuo.

en E y F . Los planos tangentes al cilindro, paralelos a l , tienen sus trazas verticales paralelas a E_2F_2 luego son las tangentes v_α y v_β a la base en I_2 y J_2 que determinan las generatrices JK e IT antes halladas.

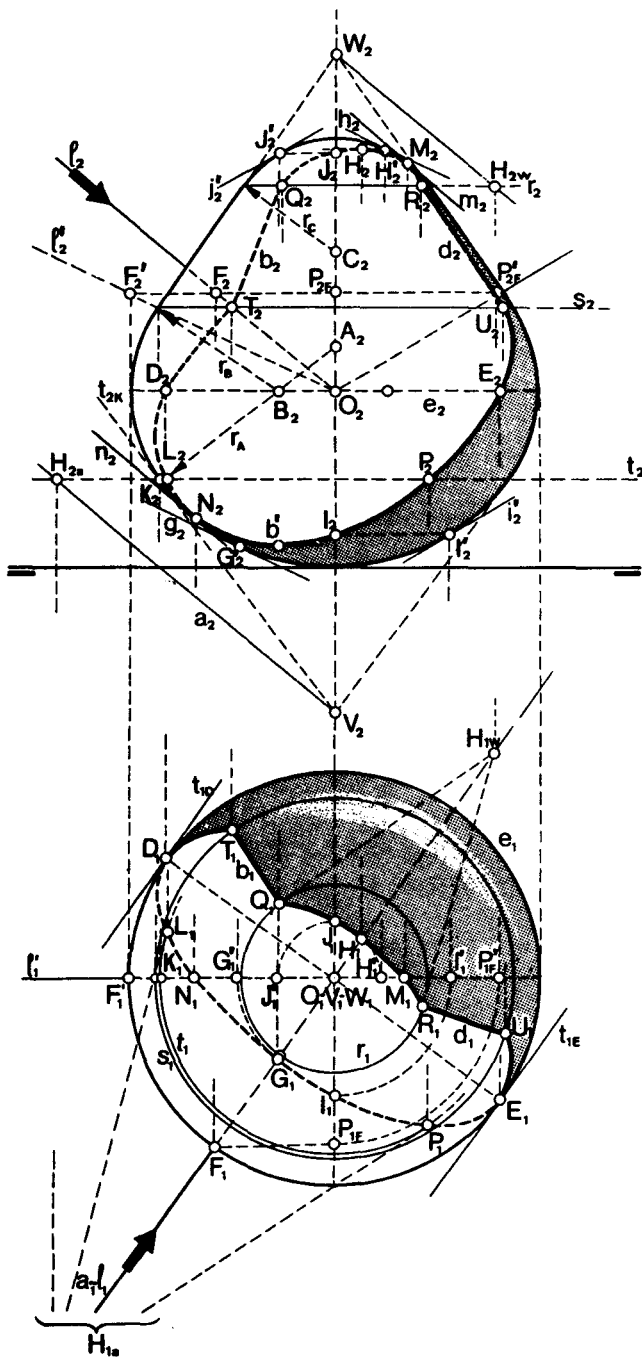


Fig. 19-23. - Sombra de una superficie de revolución.

19.9. Sombra de superficies de revolución

Sea la superficie de revolución de eje VW (Fig. 19.23) y meridiano formado por un segmento rectilíneo y tres arcos circulares de centros A_2, B_2 y C_2 y radios r_A, r_B y r_C .

Para determinar puntos de la separatriz, situados en paralelos (o meridianos), utilizaremos conos (o cilin-

dro) tangentes a la superficie, según los paralelos (o meridianos) elegidos.

Puntos del ecuador. El cilindro circunscrito auxiliar es el tangente a la superficie, según el ecuador e_1-e_2 . Los planos tangentes al cilindro paralelos a l_1-l_2 cortan al plano de e_1-e_2 según las tangentes t_{1E} y t_{1D} , paralelas a l_1 , en los puntos E_1-E_2 y D_1-D_2 que pertenecen a la separatriz.

Puntos del meridiano principal. Las trazas verticales de los planos de sombra tangentes al cilindro circunscrito, según este meridiano, son las paralelas a l_2 tangentes al meridiano en los puntos N_1-N_2 y M_1-M_2 buscados.

Puntos más alto y bajo. Pertenecen al plano del meridiano de proyección O_1F_1 paralela a l_1 . Girando el meridiano, alrededor del eje, (por medio de un punto F del rayo OF), hasta dejarlo frontal, el punto F y el rayo OF tomarán la posición $F'_1-F'_2$ y $l'_1-l'_2$. Las tangentes g_2 y h_2 al meridiano principal, paralelas a l'_2 , nos dan los puntos de tangencia G'_2 y H'_2 y al deshacer el giro, los puntos buscados G_1-G_2 y H_1-H_2 .

Puntos del meridiano del perfil. El punto F se proyecta ortogonalmente sobre el plano del meridiano, en P_F , y se gira éste hasta dejarlo frontal, en P'_F . Las paralelas a $O_2P'_{2F}$ tangentes al meridiano principal, en I'_2 y J'_2 , nos dan, al deshacer el giro, los puntos I_1-I_2 y J_1-J_2 .

Puntos situados sobre el paralelo t_2 . La tangente t_{2K} al meridiano principal, en K_1-K_2 , corta al eje en el vértice V del cono circunscrito, según el paralelo t_1-t_2 . El rayo luminoso a_1-a_2 , trazado por V , corta a la base del cono, en $H_{1a}-H_{2a}$ y determina las tangentes $H_{1a}L_1$ y $H_{1a}P_1$ a t_1 , en los puntos buscados L_1-L_2 y P_1-P_2 .

De forma análoga se hallan los puntos Q, R y T, U , situados en los paralelos r_2 y s_2 .

La separatriz obtenida está formada por el arco elíptico RHO , las rectas b y d y los tres arcos elípticos TL, LP y $PÜ$.

Los simétricos, respecto a l_1 , de las proyecciones horizontales de los puntos hallados son nuevos puntos de la separatriz que facilitan su trazado.

Las sombras arrojadas de los puntos de la separatriz determinan la sombra arrojada de la superficie.

19.10. Sombra de la esfera

Sea la esfera de centro O y radio R (Fig. 19.24). El cilindro de sombra de la esfera es tangente a ella, según un círculo máximo (separatriz), de plano normal a l_1-l_2 . La sombra elíptica de esta círculo es la sombra arrojada de la esfera. Para hallarla, se emplean los métodos que siguen:

1er Método (Fig. 19.24). Por el centro O de la esfera, se traza el plano α perpendicular a l_1-l_2 (por medio de la horizontal r_1-r_2 , normal a l) y se abate sobre el horizontal en (r) y (O) . Se traza la circunferencia, de centro (O) y radio R (separatriz abatida), desabatida según el círculo máximo de diámetro \overline{AB} y proyecciones elípticas de ejes $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{C_1D_1}$ y diámetros conjugados $\overline{A_2B_2}$ y $\overline{C_2D_2}$.

Las sombras arrojadas de la separatriz sobre H y V son, respectivamente, las elipses de ejes $\overline{A_3B_3}$ y $\overline{C_3D_3}$ y diámetros conjugados $\overline{A_5B_5}$ y $\overline{C_5D_5}$ (sombras de \overline{AB} y \overline{CD}) que se cortan en los puntos G_5, F_5, I_5 y J_5 de LT .

La limitatriz i_1-i_2 pasa por el punto I_1-I_2 (no es necesaria i_2 ni I_2) de intersección de r_1 con la simétrica r'_2

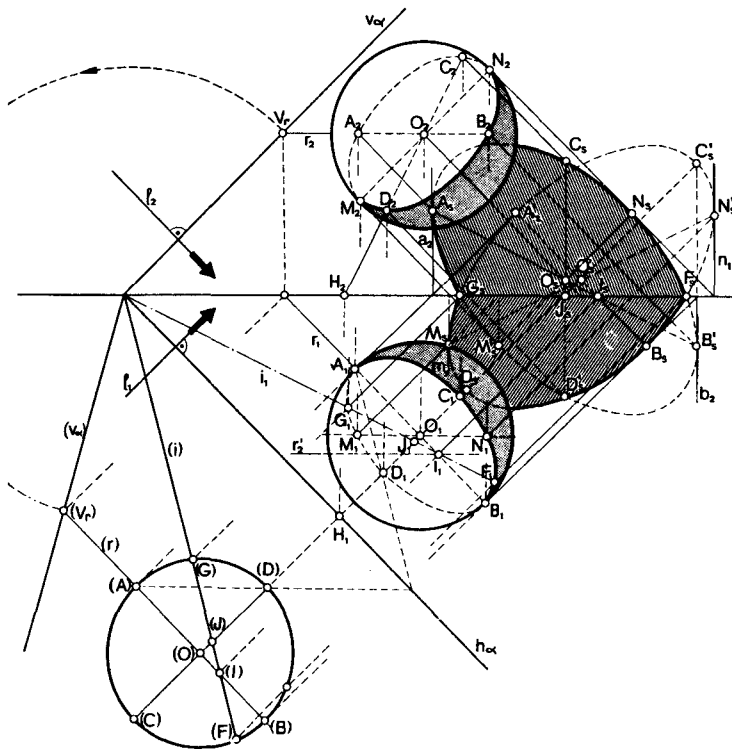


Fig. 19.24.—Sombra de la esfera por abatimiento.

de r_2 , respecto a LT , y corta a la separatriz y a sus ejes en los puntos limitadores (núm. 19,5) G, F y J, I , de sombras G_5, F_5 y J_5, I_5 .

Los planos verticales paralelos a l_1-l_2 y tangentes a la esfera, en A y B (planos límites) son los de trazas verticales a_2 y b_2 , tangentes a la sombra arrojada sobre el vertical, en A_5 y B_5 . Análogamente, los planos de canto paralelos a l y tangentes a la esfera, en M y N , son los de trazas horizontales m_1 y n_1 , tangentes a la elipse en M_5 y N_5 .

2º Método (Fig. 19.25). Consiste en hallar directamente los ejes de cada elipse de sombra, cortando la

esfera por los planos proyectantes del rayo luminoso $l \equiv OO_5$ y abatiendo las secciones sobre H y V , según las circunferencias de radio R y centros $(O)_1$ y $(O)_2$.

En proyección horizontal, las paralelas a $(l)_1$, tangentes a la circunferencia de centro $(O)_1$, en (A) y (B) , determinan, al desabatir, el eje menor A_1B_1 de la proyección horizontal de la separatriz y el eje mayor $\overline{C_1D_1} = 2R$, normal a l_1 . Análogamente, las paralelas a $(l)_2$, tangentes a la circunferencia de centro $(O)_2$, en (M) y (N) , determinan los ejes M_2N_2 y K_2S_2 de la proyección vertical.

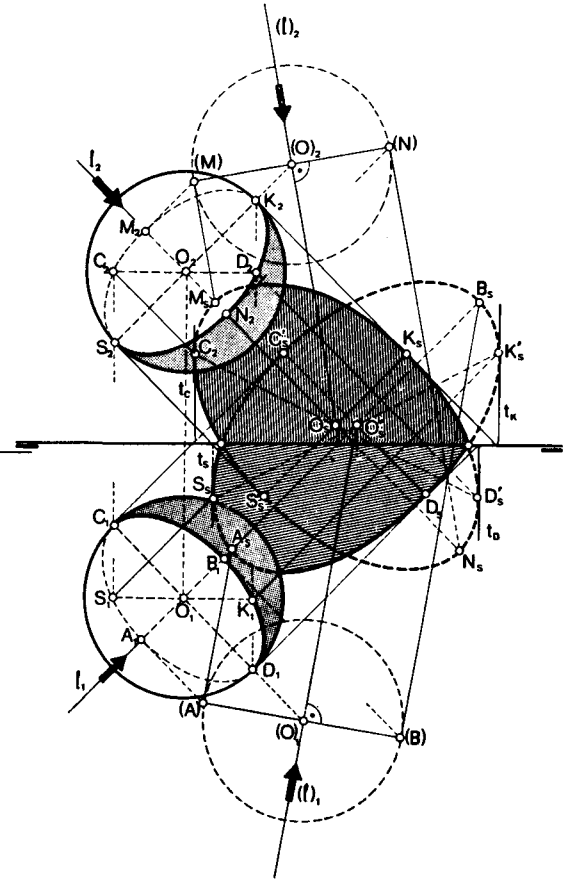


Fig. 19.25.—Sombra de la esfera por secciones de planos proyectantes de l_1-l_2 .

Las sombras de estos ejes son los ejes $\overline{A_5B_5}, \overline{C_5D_5}$ y $\overline{M_5N_5}, \overline{K_5S_5}$ de las elipses de sombra arrojadas por la esfera sobre H y V . (Ver núms. 19,16 a 19,23 de n/E.de G.D.).

19.11. Separatriz de sombra de dos superficies Δ y Ω con una curva común σ

Los diversos casos que pueden presentarse son (Fig. 19.26):

1° Δ y Ω no son tangentes a lo largo de σ (Fig. a). Las separatrices de Δ y Ω cortan σ en puntos distintos A y B . Se exceptúa el caso de que la tangente a σ , en C , pase por el foco luminoso o que ambas superficies sean tangentes en C , como sucede en la figura.

2° Δ y Ω son tangentes a lo largo de σ (Fig. b). Las dos separatrices pasan por los puntos A y C de σ .

3° Δ y Ω son superficies de revolución, del mismo eje y con un paralelo común. (Fig. 19.27-a). Lo mismo que en el caso 1°.

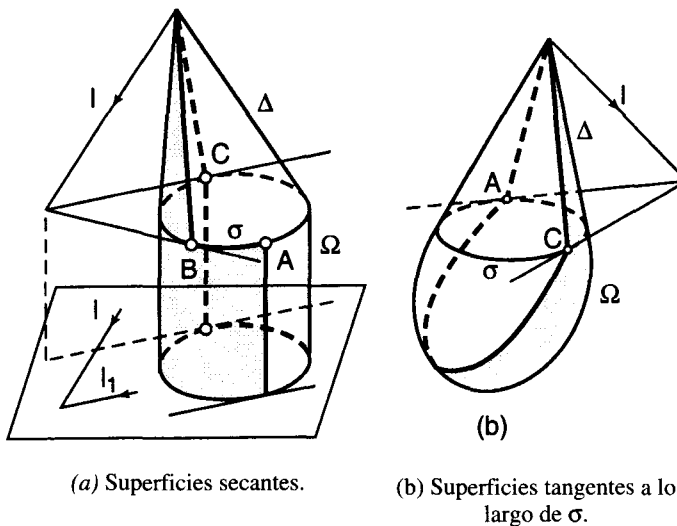
4° Δ y Ω son superficies de revolución, coaxiales y tangentes, según un paralelo s . (Fig. b). Lo mismo que en el 2° caso.

Nótese que, aunque las separatrices corten a σ en el

mismo punto (casos 2°, 4° y punto C del 1°) no son generalmente tangentes en dicho punto. (Ver n° 326 de la "Geometría Descriptiva" - 2° Fascículo de C. Cagnac y J. Commeau).

19.12. Sombra de un cuerpo sobre otro

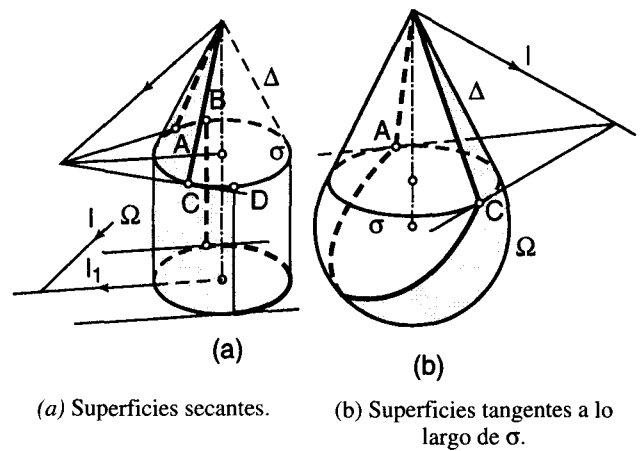
Para hallar las sombras que un cuerpo P (Fig. 19.28) arroja sobre otro L , se dibujan las sombras P_{SH} y L_{SH} que arrojan sobre el plano H , por ejemplo, y de ellas se deduce si P arroja toda o parte de su sombra sobre L . Se supone que P es el más próximo al foco luminoso y por tanto, el que arroja sombra sobre L . Los diversos casos que pueden presentarse son:



(a) Superficies secantes.

(b) Superficies tangentes a lo largo de σ .

Fig. 19.26a.—Separatriz de superficies con una curva común σ .



(a) Superficies secantes.

(b) Superficies tangentes a lo largo de σ .

Fig. 19.27.—Separatriz de superficies de revolución coaxiales y con un paralelo común σ .

1° P_{SH} es interior a L_{SH} (Fig. a). El cuerpo P arroja toda su sombra sobre la zona iluminada de L . La sombra $P_{SH} \equiv A_S B_S C_S$ es la intersección del prisma (o cilindro) de sombra de P con la superficie iluminada de L .

2° Las sombras tienen partes comunes (Fig. b). En la zona iluminada de L , determinada por L_{SH} , la parte común con P_{SH} es la que recibe la sombra de P y, el resto (partes en blanco), las que siguen iluminadas. La primera está limitada por los arcos $A_{SH} B_{SH}$ y $C_{SH} D_{SH}$

(sombras de los arcos $A_S B_S$ y $C_S D_S$ de la separatriz de L) y por los $B_{SH} N_{SH} C_{SH}$ y $D_{SH} M_{SH} A_{SH}$ (sombras de las intersecciones $B_S N_S C_S$ y $D_S M_S A_S$ de L con el cilindro de sombra de P , de directrices BNC y DMA).

El cilindro de sombra de P corta a L , según la curva $i \equiv A_S M_S D_S$, luego el cilindro de sombra de L (superficie límite de L) corta al primero, según las generatrices AA_S y DD_S , tangentes a i , en A_S y D_S (núm. 11,5-b), y lo mismo ocurre con las generatrices CC_S y DD_S .

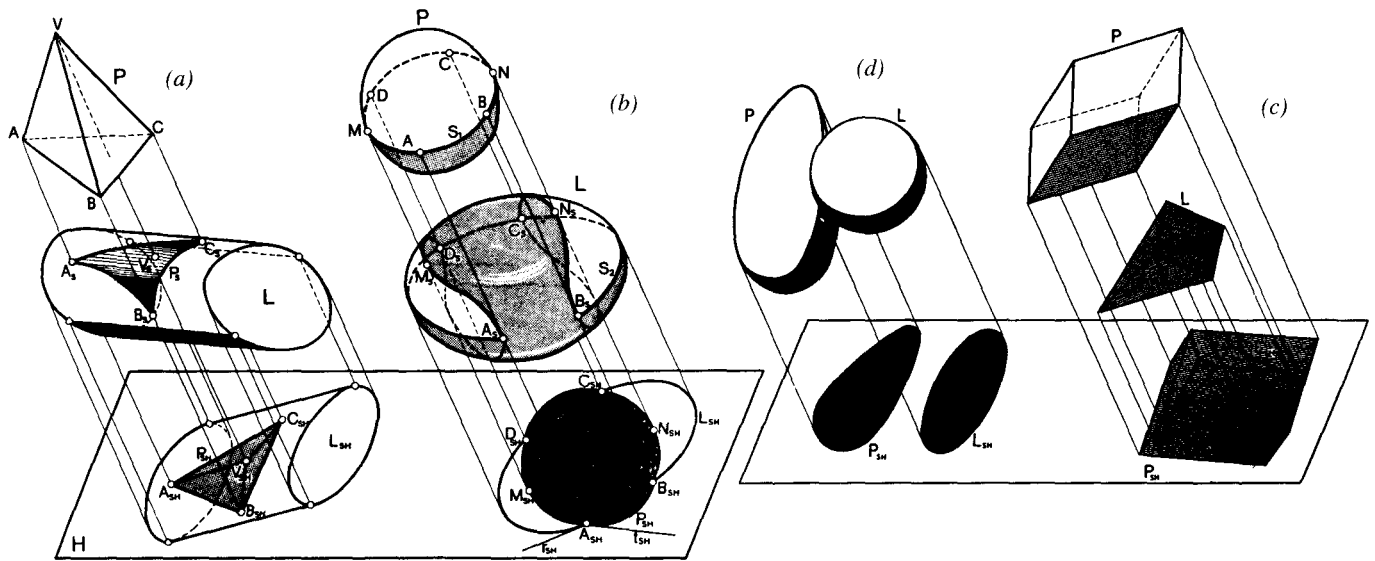


Fig. 19.28.—Sombras de un cuerpo sobre otro.

3° P_{SH} cubre por completo a L_{SH} (Fig. c). Como L es interior al cilindro (prisma) de sombra de P, todo él está en sombra.

4° Las sombras son exteriores (Fig. d). El cuerpo P no arroja sombra sobre L.

Prescindiendo de estos dos últimos casos, la determinación de la sombra se reduce a hallar la sección pro-

ducida en la parte iluminada de L, por el cilindro de sombra de P (Fig. a) o por la porción de éste correspondiente a la parte común de las sombras arrojadas (Fig. b). Es por tanto, un problema de intersección de prisma o cilindro con otra superficie. (Ver núms. 19.16 a 19.23 de n/E. de G.D.).

20. EJERCICIOS DE SOMBRAS

20.1. Sombra de figura plana de perfil

Sea la escuadra de ancho m y vértices A_1-A_2 , B_1-B_2 y C_1-C_2 , situados en el plano de perfil α (Fig. 20.1). Para hallar la sombra arrojada, se halla la sombra C_s de C_1-C_2 , se abate la escuadra sobre el horizontal, en $(A)(B)(C)$, y se trazan paralelas a los lados, a distancia m de ellos.

Se traza, luego, la limitatriz de la figura, abatida en (r) , que forma 45° con LT y corta a la escuadra abatida en los puntos limitadores (M) , (N) , (P) y (Q) . Refiriéndolos a h_α y trazando por ellos paralelas a l_1 , se obtienen las sombras M_s , N_s , P_s y Q_s , arrojadas sobre LT , que nos permiten dibujar: la sombra vertical $\overline{B_s M_s}$ y $\overline{B_s Q_s}$; las paralelas a ellas, trazadas por N_s y P_s ; las sombras horizontales $\overline{M_s A_s}$ y $\overline{Q_s C_s}$, y las paralelas a ellas, trazadas por N_s y P_s .

La paralela a $\overline{A_s C_s}$ se ha hallado, prolongando el lado interior de la escuadra, paralelo a $(A)(C)$, hasta cortar a h_α en D , y trazando por (D) dicha paralela.

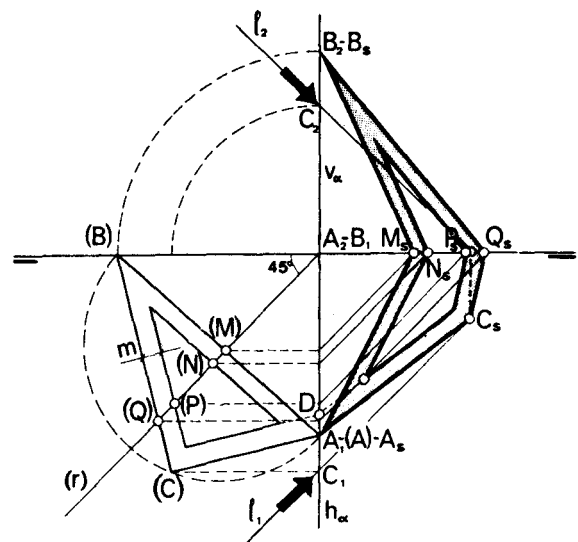


Fig. 20.1.—Sombra de figura plana de perfil.

20.2. Sombra de una recta sobre un artesa

En la figura 20.2, se ha dibujado la sombra arrojada en el interior de una artesa de base cuadrada, por el segmento \overline{AB} , determinado por el vértice B y el punto medio A de la arista de la base superior.

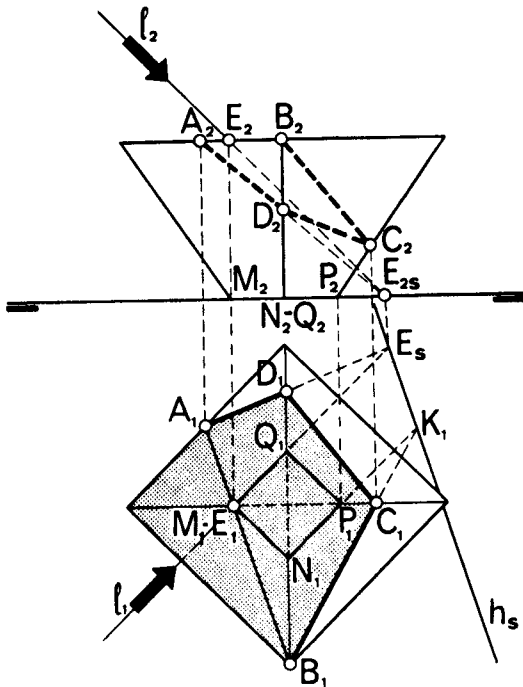


Fig. 20.2.—Sombra de \overline{AB} sobre una artesa.

La traza horizontal del plano de sombra de AB es la paralela h_s a $\overline{A_1B_1}$, trazada por la sombra E_s de cualquier punto E de AB , y corta a las trazas N_1P_1 y M_1Q_1 de las caras de la artesa, en los puntos K_1 y E_s que determinan las intersecciones $\overline{BK_1}$ y $\overline{AE_s}$ de estos planos y la sombra $ADCB$ arrojada en el interior de la artesa.

20.3. Sombra de recta sobre esfera

La figura 20.3 representa la sombra arrojada sobre la esfera de centro O y radio R , por la tangente r , en M , al paralelo s_1-s_2 de la esfera.

Las trazas del plano de sombra de r son: la paralela h_r a r , trazada por la sombra K'_s , sobre el horizontal de un punto K de r , y la recta V_r que pasa por la sombra K_{2s} , sobre el vertical, de K .

Se traza, luego, por M , el plano vertical β , normal a r que pasa por O , y se abate sobre el horizontal, siendo (O) , (M) y $(M)I$, los abatimientos de O, M y de la intersección MI , de β , y h_r-v_r , y (C) (pie de la perpendicular $(O)(C)$ a $(M)(N)$), el del centro del círculo sección de h_r-v_r , con la esfera.

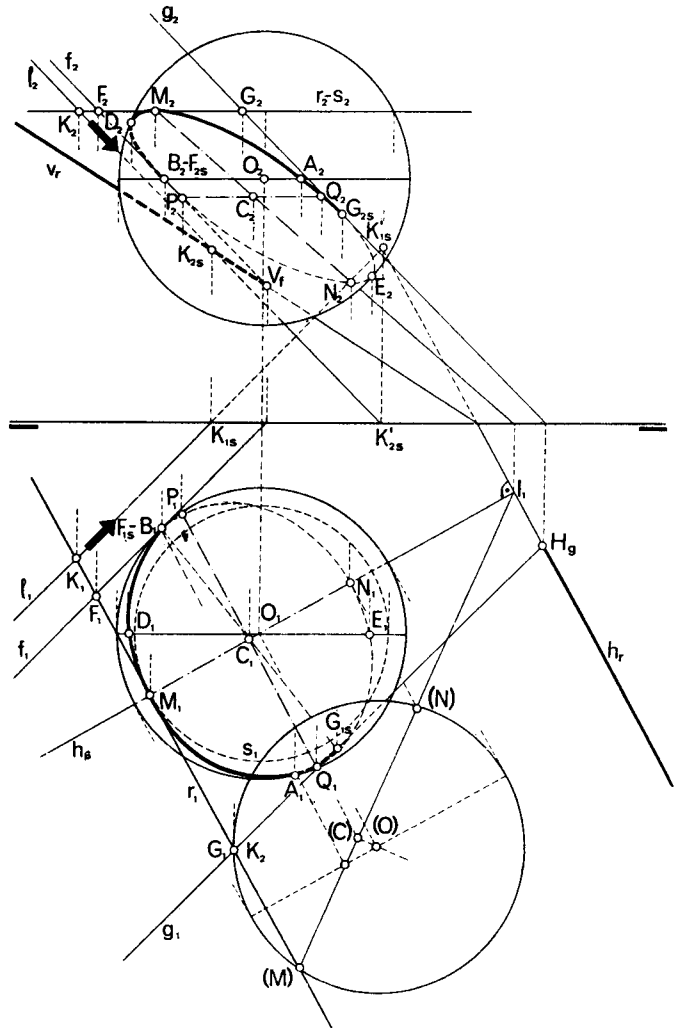


Fig. 20.3.—Sombra de r sobre una esfera.

Las proyecciones del círculo sección de h_r-v_r , obtenidas al desabatir, son: la elipse de centro C_1 y ejes $\overline{M_1N_1}$ y $\overline{P_1Q_1} = \overline{(M)(N)}$ (paralelo a r_1) y la de diámetros conjugados $\overline{M_2N_2}$ y $\overline{P_2Q_2}$, lo cual permite dibujarlas.

Las intersecciones de h_r-v_r con el ecuador y el meridiano frontal son los pntos de tangencia A, B , y E, D de las elipses con los contornos aparentes de la esfera. Finalmente, los puntos de tangencia F y G de los rayos luminosos f_1-f_2 y g_1-g_2 , tangentes a las elipses, determinan la sombra GMF arrojada sobre la esfera por el segmento \overline{FG} de r , y sus trazas H_g y V_p , las arrojadas por r sobre H y V .

c) Los extremos del diámetro vertical \overline{CD} y los de la cuerda vertical \overline{AB} , intermedia entre \overline{FQ} y \overline{CD} .

Los puntos y tangentes hallados permiten dibujar fácilmente la sombra buscada.

20.6. Sombra del cubo

La figura 20.6 representa un cubo, colocado con la diagonal \overline{AM} de punta, y las \overline{RD} y \overline{SC} paralelas a LT.

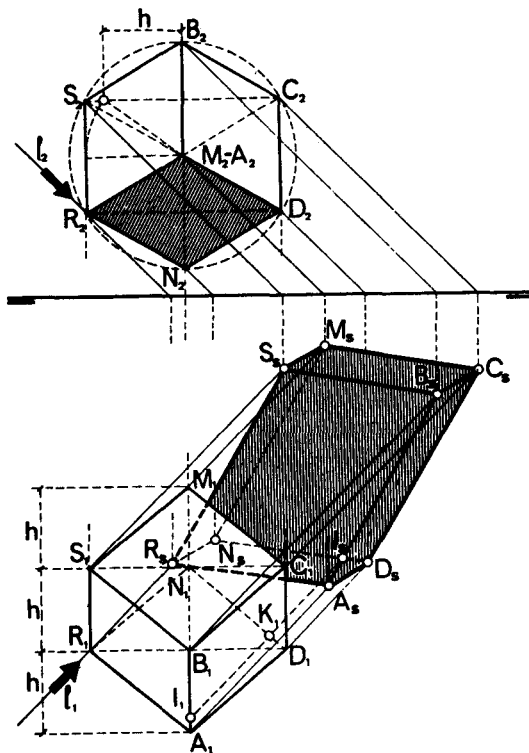


Fig. 20.6.—Sombra del cubo.

Las sombras $A_s, B_s, \dots, M_s, N_s$ de los vértices determinan el polígono perimetral $A_s D_s C_s M_s S_s R_s A_s$ y la separatriz poligonal $ADCMSRA$ que divide al cubo en dos zonas: la terna de caras de vértice B y la de vértice N .

El rayo de sombra que pasa por I_s (intersección de una arista de cada terna) corta a $\overline{A_1 B_1}$, en I_1 , y a $\overline{N_1 D_1}$, en K_1 , siendo I el más cercano al foco luego la terna de vértice B es la iluminada, lo cual permite dibujar las caras en sombra, de las que sólo es vista la $ADNR$, en proyección vertical.

20.7. Sombra de pirámide hueca

En la figura 20.7, se han dibujado las sombras de una pirámide de base exagonal $ABCDEF$, de plano de canto, y vértice V situado en el horizontal.

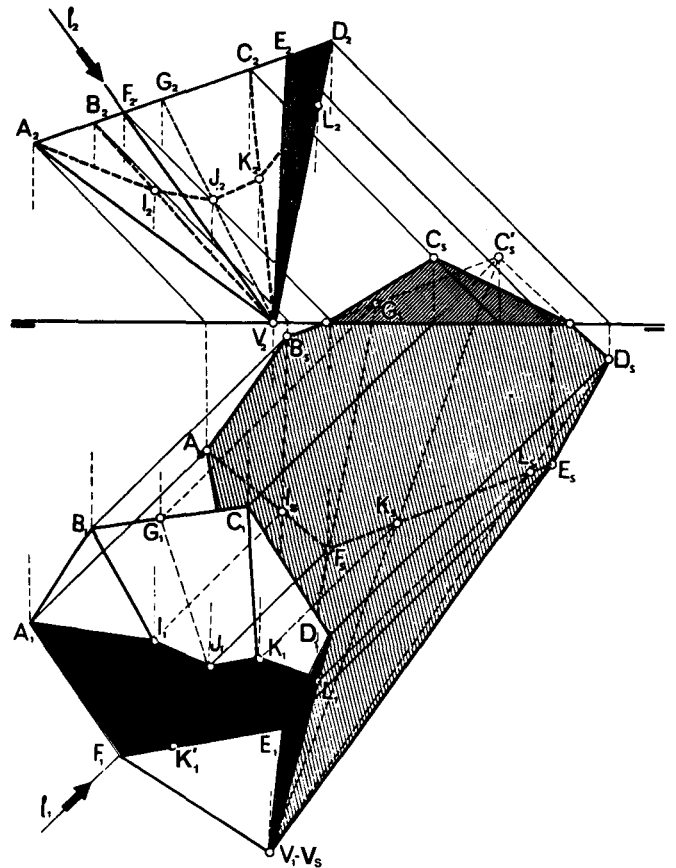


Fig. 20.7.—Sombra de pirámide hueca.

Las sombras A_s, B_s, \dots , etc. de los vértices (suponiendo maciza la pirámide) determinan el perímetro de sombra $A_s B_s C_s D_s E_s V_s$ y la separatriz poligonal $ABCDEV$ que divide a la pirámide en dos zonas: la terna de caras de vértice F y la de vértice C_s . El rayo de sombra trazado por K_s (intersección de una arista $\overline{F_s E_s}$ y $\overline{V_s C_s}$ de cada terna) corta a $\overline{F_s E_s}$ y $\overline{V_s C_s}$, en K'_1 y K_1 , siendo F la terna iluminada por estar K'_1 más cerca del foco luminoso que K_1 . Podemos pues dibujar las caras en sombra de la pirámide de las que sólo es vista la VED , en ambas proyecciones.

Las intersecciones I_s, F_s, K_s y L_s de $\overline{A_s F_s}$ y $\overline{F_s E_s}$ con $\overline{V_s B_s}, \overline{V_s G_s}$ (prolongación de $V_s F_s$), $V_s C_s$ y $V_s D_s$ son las sombras de los vértices de la sombra $A_1 I_1 J_1 K_1 L_1 E_1$ arrojada por la quebrada $A_1 F_1 E_1$ en el interior de la pirámide.

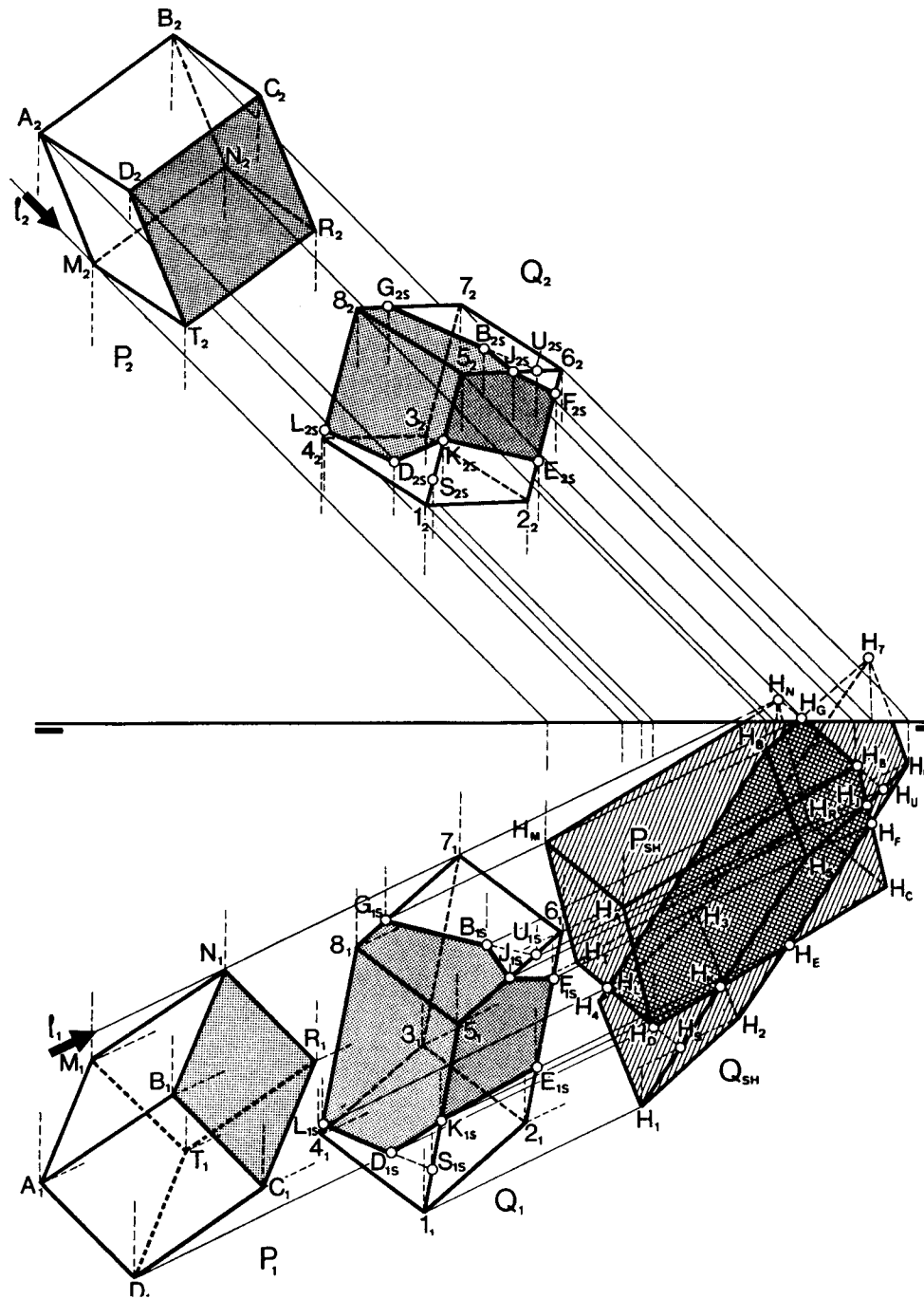


Fig. 20.8.—Sombra de prisma sobre otro.

20.8. Sombra de prisma sobre otro

La figura 20.8 representa la sombra arrojada por el prisma P sobre el Q , siendo P_{SH} y Q_{SH} los perímetros de sombra arrojados sobre H que determinan, como ya se ha dicho, las caras iluminadas y en sombra de cada uno.

El prisma P es el más próximo al foco luminoso y

su sombra P_{SH} corta a la Q_{SH} en los puntos H_E , H_F , H_G y H_I que, referidos a las generatrices correspondientes de Q , nos dan los extremos E_{1S} , F_{1S} y G_{1S} , L_{1S} de las quebradas de separación de la sombra arrojada por P sobre la zona iluminada de Q (núm. 19.12-2º caso). Los restantes vértices D_{1S} , K_{1S} y B_{1S} , J_{1S} se hallan, por restitución de las sombras H_D , H_K y H_B , H_J .

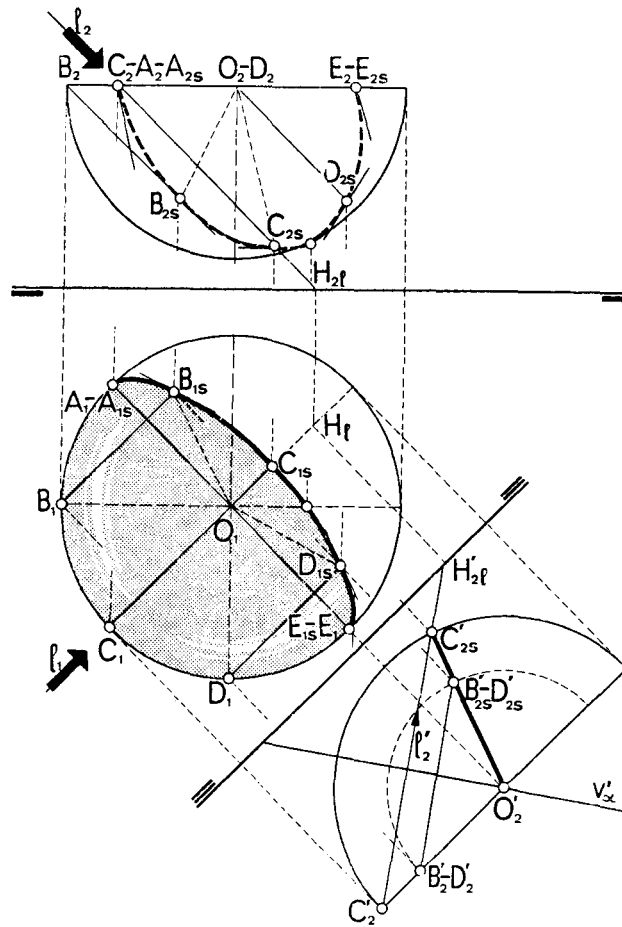


Fig. 20.9.—Sombra de semiesfera hueca.

20.9. Sombra autoarrojada de semiesfera hueca

En la figura 20.9, se ha dibujado la sombra arrojada en el interior de una semiesfera hueca, por su borde circular. Para hallarla, se han utilizado los métodos que siguen:

1.º *Por planos secantes.* Nos valdremos de planos auxiliares verticales paralelos a l_1-l_2 y de un cambio de plano vertical, de traza paralela a l_1 , siendo O'_2 y $l'_2 \equiv C'_2H'_2$ las nuevas proyecciones de O y de $l \equiv CH$.

Los planos auxiliares trazados por los puntos C, B y D , por ejemplo, cortan a la semiesfera, según círculos cuyas nuevas proyecciones son círculos de centro O'_2 y radios $\overline{O'_2C'_2}$ y $\overline{O'_2B'_2}$, y los rayos luminosos l'_2 y su paralelo $B'_2D'_2$ cortan a estos círculos, en los puntos C'_2 y $B'_2 \equiv D'_2$ que, referidos a la proyección horizontal,

nos dan las sombras buscadas C_s y $B_s \equiv D_s$ que permiten dibujar la sombra $A_sB_sC_sD_sE_s$ arrojada por el borde.

2.º *Por simetría.* En las nuevas proyecciones, la sección recta del cilindro de sombra de la esfera es un círculo de plano de canto α , cuya traza v'_α , normal a l'_2 , es mediatriz de las cuerdas $C'_2C'_{2s}$, $B'_2B'_{2s}$, ..., etc.

Los puntos C'_2, B'_2, \dots son, por tanto, simétricos de sus sombras C'_{2s}, B'_{2s}, \dots , y lo mismo ocurre con los puntos C, B, \dots del espacio y sus sombras C_s, B_s, \dots , etc., respecto al plano α luego la simétrica del borde semicircular ACE es también una semicircunferencia $A_sC_sE_s$, de proyección $\overline{O'_2C'_{2s}}$ que se proyecta horizontalmente, según la semielipse de semiejes $\overline{O_1A_{1s}}$ y $\overline{O_1C_{1s}}$, y verticalmente, según la elipse de semidiámetros conjugados $\overline{O_2A_2}$ y $\overline{O_2C_2}$, lo cual permite dibujarlas más exactamente.

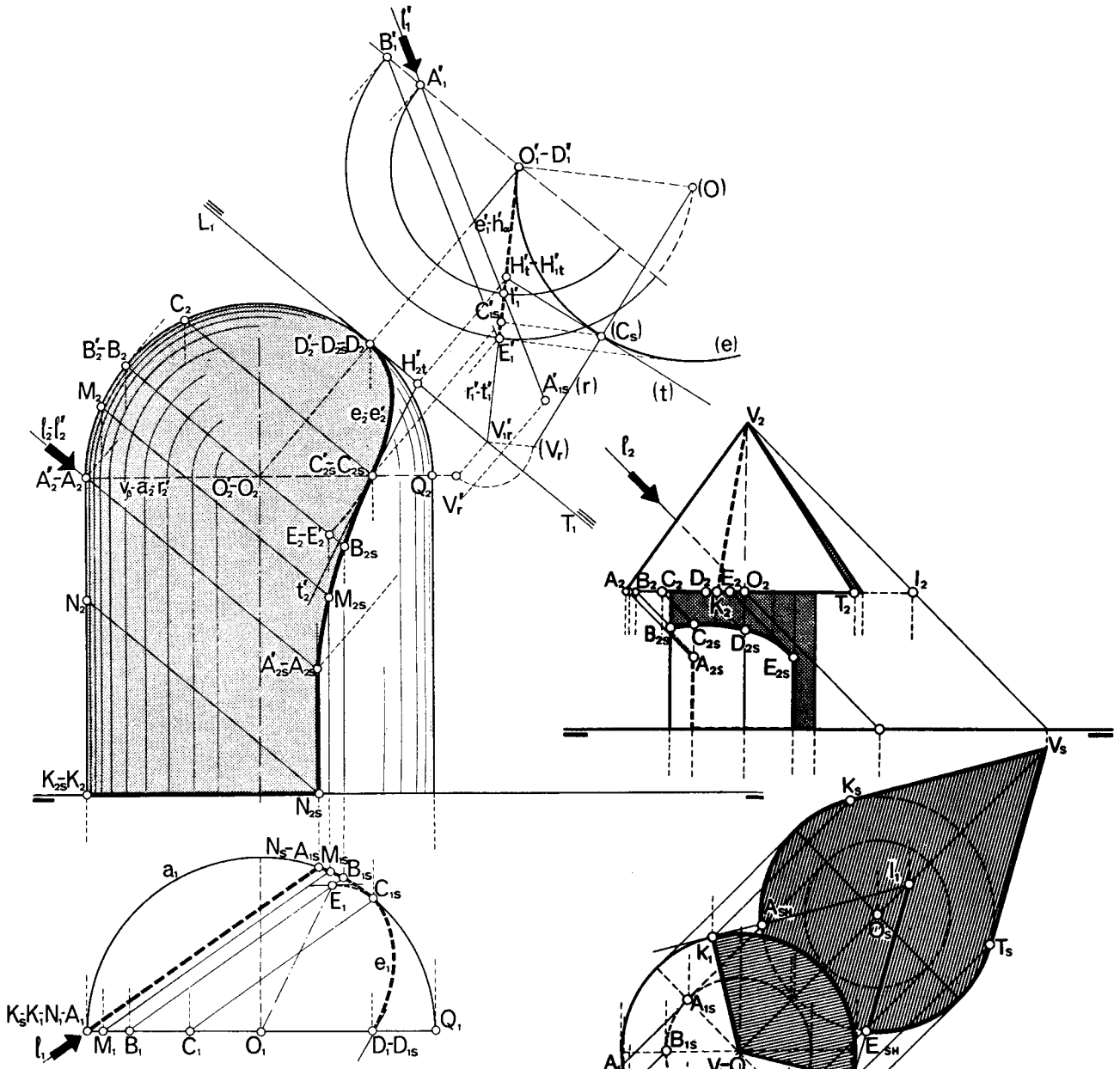


Fig. 20.10.—Sombra del nicho esférico.

20.10. Sombra autoarrojada del nicho esférico

El nicho esférico es un hueco u hornacina formado por un semicilindro vertical, circular (Fig. 20.10), rematado por una cuña esférica de 90°, de igual radio que el cilindro.

El plano de sombra del borde \overline{KA} es vertical y sus trazas con la base y pared del nicho son las sombras \overline{KN}_s y $\overline{N_sA_s}$, respectivamente.

La sombra del arco AC es la curva $A_sM_sB_sC_s$, determinada por las sombras de puntos aislados M , B y C .

La sombra de la semiesfera se ha hallado, como en el caso anterior, por medio de un cambio de plano

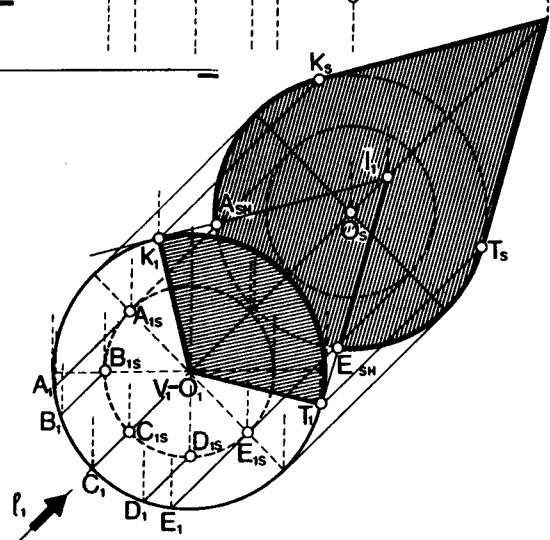


Fig. 20.11.—Sombra de cono sobre cilindro.

horizontal, de traza paralela a l_2 . En la nueva proyección, la sombra $\overline{O'_1E'_1}$ es la simétrica de $\overline{O'_1B'_1}$, respecto a la normal a l'_1 , trazada por O'_1 (no dibujada), y se proyecta, según semi-elipses e_1 y e_2 de semiejes $\overline{O_2D_2}$ y $\overline{O_2E_2}$ y diámetros conjugados $\overline{O_1D_1}$ y $\overline{O_1E_1}$.

La intersección C_2 de a_2 y e_2 pertenece al círculo e , de plano α , y a la base superior a del cilindro, de plano β , luego es un punto de la intersección r de

ambos planos, de proyecciones $r'_1 \equiv h'_\alpha$ y $r'_2 \equiv v_\beta$ (por ser α y β planos proyectantes). Si ahora abatimos el semicírculo $e'_1 - e'_2$ de plano α , sobre el horizontal, en (e) , el abatimiento $(r) \equiv (O)(V_r)$ de r corta a (e) , en (C_s) , desabatido en $C'_{1s} - C'_{2s}$, y la tangente (t) a (e) , en (C_s) , desabatida en $t'_1 - t'_2$, es la tangente común t'_2 a las curvas $M_{2s}B_{2s}C_{2s}$ y e_2 , en C_{2s} .

20.11. Sombra de cono sobre cilindro

La figura 20.11 representa un cuerpo de revolución de eje vertical, base cilíndrica y parte superior cónica.

Las sombras de la base del cono y de la superficie del cilindro son circunferencias de centro O_s (sombra de $O_1 - O_2$) y radio igual al de aquellas. Las tangentes a la primera, trazadas desde V_s (sombra de $V_1 - V_2$) y las tangentes a la segunda, paralelas a l_1 , determinan las sombras arrojadas y las sombras propias de cono y cilindro.

La sombra arrojada por la base del cono sobre el cilindro es la producida por el arco AE , limitado por los planos paralelos a l , tangentes al cilindro en A_s y E_s y se ha hallado, trazando rayos de sombra por puntos intermedios B, C y D que cortan al cilindro, en B_s, C_s y D_s y determinan la sombra buscada $A_sB_sC_sD_sE_s$.

El rayo de sombra trazada por B_{1s} determina, por restitución, el punto de tangencia B_{2s} de la sombra con el contorno aparente vertical del cilindro y los rayos trazados por A_{1s} y E_{1s} , las tangentes a la sombra, en A_{2s} y E_{2s} , paralelas a l_2 .

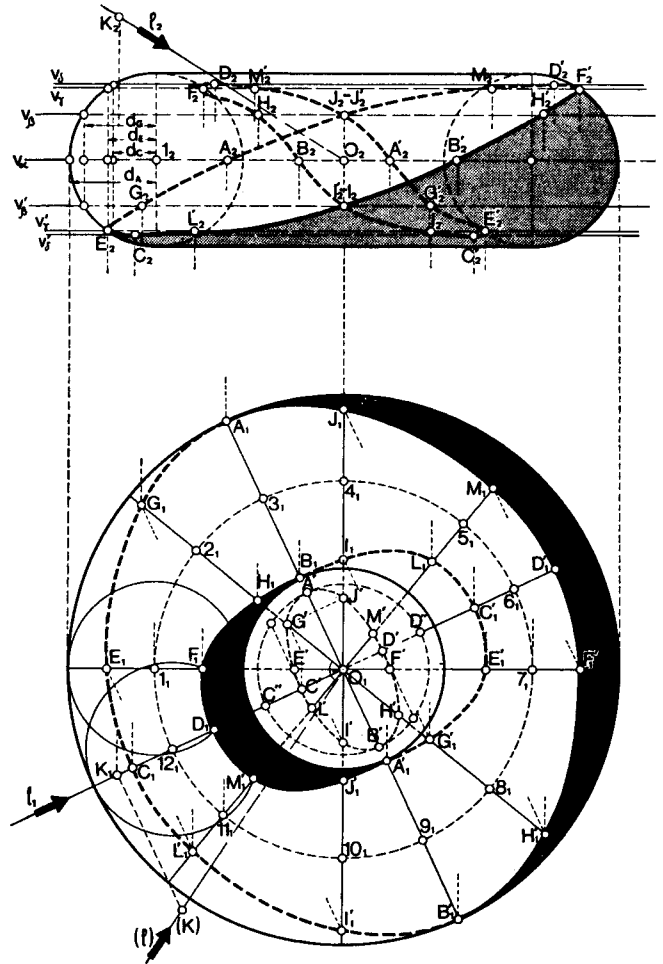


Fig. 20.12.—Sombra del toro.

20.12. Sombra del toro

Como ya se dijo (núm. 11,17-b), el toro puede considerarse como envolvente de una esfera de centro $1_1 - 1_2$ (Fig. 20.12) que gira alrededor del eje vertical. Durante este giro, la generatriz de sombra de la esfera se conserva igual a sí misma, por ser de plano normal a l . De aquí, el método a seguir:

Dibujar una esfera de centro $O_1 - O_2$, igual a la generatriz, y hallar su separatriz de sombra, de proyección elíptica, de ejes $A'B'$ (normal a l_1) y $C'D'$. Este último se ha hallado, abatiendo el rayo luminoso $l_1 - l_2$ que pasa por O , sobre el plano horizontal trazado por O , en (l) , y trazando el diámetro normal a (l) (no dibujado) cuyos extremos, referidos a l_1 , nos dan C' y D' .

Como la esfera generatriz tiene común con el toro, su meridiano de tangencia, la intersección de éste con la separatriz serán dos puntos de la separatriz del toro,

situados sobre el meridiano. Así, el plano del meridiano de centro 1_2 y 6 , por ejemplo, corta a la separatriz en los puntos C' y D' , situados sobre el toro, en C_1, D_1 y C'_1, D'_1 , tomando sobre los meridianos los segmentos:

$$\overline{1_2C_1} = \overline{1_2D_1} = \overline{O_1C'} \quad \text{y} \quad \overline{6_1C'_1} = \overline{6_1D'_1} = \overline{O_1D'}$$

Las proyecciones verticales C_2, D_2 y C'_2, D'_2 de estos puntos están situadas sobre los paralelos v_8 o v'_8 , que cortan al meridiano frontal de centro 1_2 , en puntos que distan del diámetro vertical de ésta, la longitud $d_c = \overline{1_2C_1} = \overline{1_2D_1} = \overline{O_1C'}$

Trazando nuevos meridianos, se obtienen los puntos necesarios para dibujar la separatriz, de proyecciones $E_1A_1D_1B'_1E_1$ y $D_1B_1C'_1A'_1D_1$, simétricas, por así decir, respecto al círculo medio, por ser C_1 y D_1, E_1 y F_1, \dots , etc. puntos equidistantes de éste.

Las sombras de los puntos hallados pertenecen a la sombra arrojada del toro y permiten dibujar ésta.

b) En basamentos tóricos, se utiliza un método práctico que consiste en dibujar las secciones produci

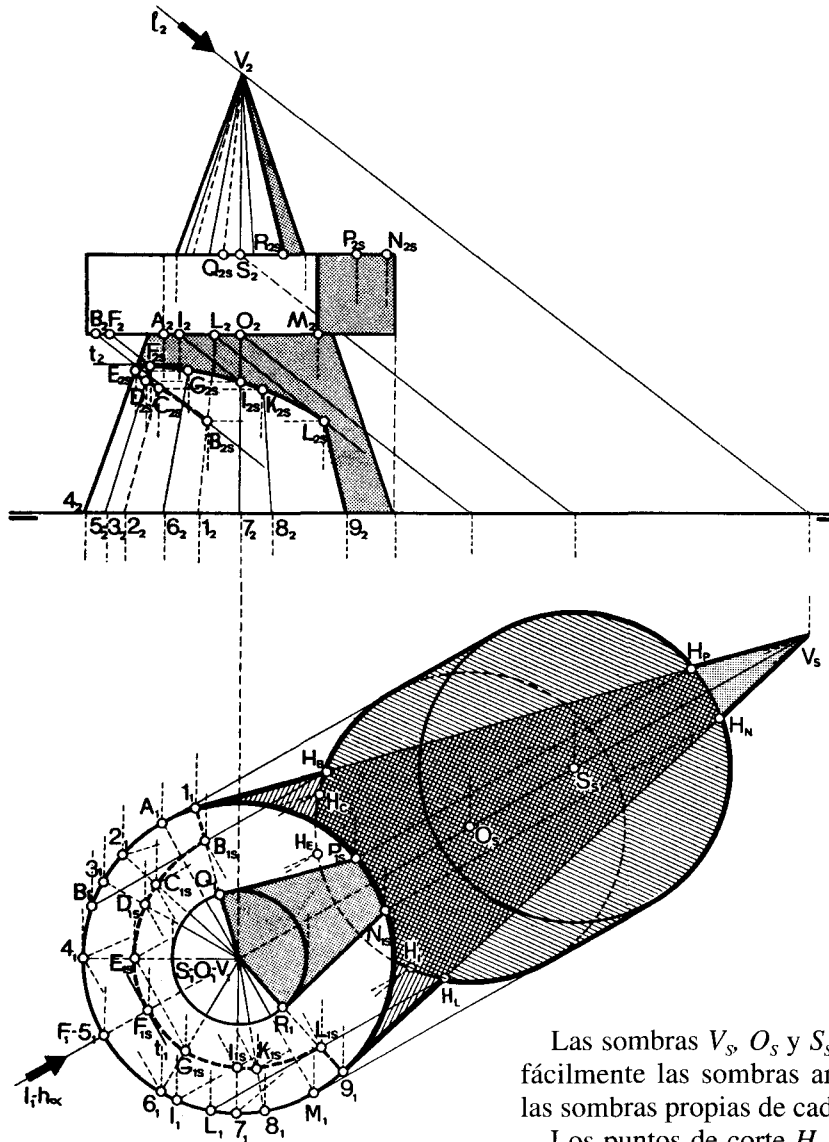


Fig. 20.13.—Sombra de cilindro sobre cono.

das en la superficie por planos verticales paralelos a la luz y trazar tangentes a ellas, paralelas a l . Los puntos de tangencia de dichas tangentes pertenecen a la separatriz y sus trazas, a la sombra arrojada (núm. 20,18 de n/E. de G.D.).

20.13. Sombra de cilindro sobre cono

En la figura 20.13, se han dibujado las sombras producidas en el cuerpo formado por un cilindro recto de bases circulares, de centros O y S , atravesado por un cono de revolución del mismo eje, vértice V y base igual a la del cilindro.

Las sombras V_s , O_s y S_s de V , O y S permiten hallar fácilmente las sombras arrojadas y a partir de éstas, las sombras propias de cada uno (núm. 20,11).

Los puntos de corte H_B y H_L de las sombras arrojadas determinan, por restitución, los extremos B_{1s} - B_{2s} y L_{1s} - L_{2s} de la sombra arrojada sobre el cono por el borde BL de la base del cilindro, y los H_P y H_N , los extremos P_{1s} - P_{2s} y N_{1s} - N_{2s} de la arrojada por el cono sobre la base superior del cilindro.

Las sombras de las generatrices $\bar{V}2$, $\bar{V}4$ y $\bar{V}7$ del cono cortan a la de la base inferior del cilindro, en H_C , H_E y H_I . Los rayos de sombra, trazados por estos puntos, cortan a dichas generatrices en los puntos de sombra C_{1s} , E_{1s} e I_{1s} que junto con sus simétricos K_{1s} , G_{1s} y D_{1s} , respecto a $l_1 \equiv h_\alpha$, permiten dibujar la sombra arrojada sobre el cono.

En proyección vertical, los rayos de sombra son tangentes a la línea de sombra, en B_{2s} y L_{2s} (núm. 29,21-2º) y en el punto más alto F_s de la curva, la tangente es la horizontal t_1 - t_2 , perpendicular al plano de simetría, de traza $h_\alpha \equiv l_1$.

II. SISTEMA ACOTADO

21. PUNTO, RECTA Y PLANO

21.1. Generalidades

El sistema acotado, también llamado de *planos acotados*, surge de la necesidad de representar superficies cuyas dimensiones verticales sean mucho más pequeñas que las horizontales.

En este sistema, se adopta un único plano de proyección H , que suponemos horizontal, sobre el que se proyectan ortogonalmente los puntos del espacio. La altura o distancia de cada punto al plano H se llama *cota* del punto. De ahí, su nombre. Es, portanto, un caso particular del sistema diédrico, en el que las proyecciones verticales de los puntos se han sustituido por sus cotas.

21.2. Representación del punto

Un punto $A \equiv A_1(3,5)$ del espacio (Fig. 21.1) queda definido por proyección ortogonal A_1 sobre H y por su altura o *cota*, representada por el número 3,5, encerrado en un paréntesis. Otros autores representan la cota por un subíndice o la colocan al lado de la proyección, sin paréntesis. Nosotros utilizaremos la primera, por considerarla más clara y menos expuesta a confusiones.

Si el punto está encima, en o debajo de H , su cota será positiva, nula o negativa, respectivamente. Conviene que el plano de proyección quede por deba

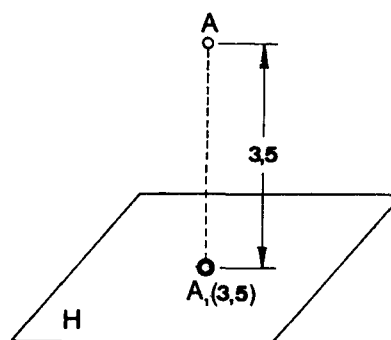


Fig. 21.1.—Representación del punto.

jo del cuerpo a representar, para que todos sus puntos tengan cota positiva.

Para determinar la posición del punto en el espacio, debe conocerse la unidad de medida ($u = 1\text{cm.}$, por ejemplo) o la escala gráfica adoptada.

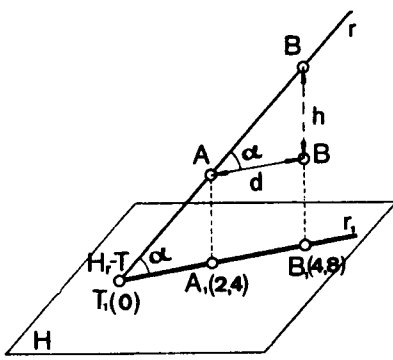


Fig. 21.2. - Recta dada por dos puntos.

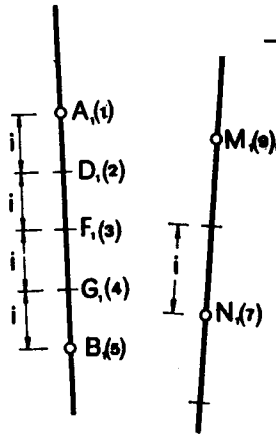


Fig. 21.3. - Intervalo de la recta.

21.3. Representación de la recta (Fig. 21.2)

Una recta $r \equiv A_1(2,4)B_1(4,8)$ se representa por dos de sus puntos A y B o por su proyección horizontal $r_1 \equiv A_1B_1$ y las cotas de dos puntos de ella. Conviene elegir puntos de cota entera, para no operar con decimales.

La traza T de r con H es el punto de cota cero de ella y se representa por H_r, T , o $T_1(O)$.

La pendiente p de r es la relación entre la distancia vertical h y la horizontal d entre dos puntos B y A de r . También puede definirse como la tangente trigonométrica del ángulo α que forma r con H , o sea:

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d}. \text{ Si } h = 1, d \text{ es el intervalo } i \text{ de } r.$$

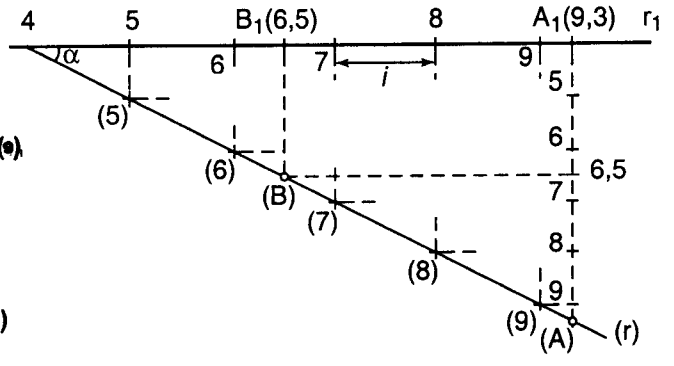
Por tanto: Se llama módulo o intervalo i de una recta a la distancia horizontal entre dos puntos de ella, cuyas cotas difieren en una unidad.

En la figura 21.3: $i = \overline{A_1D_1} = \overline{D_1F_1} = \overline{F_1G_1} = \overline{G_1B_1}$, y sustituyendo en la igualdad anterior:

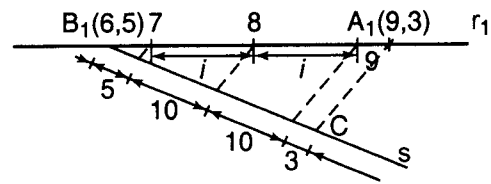
$$p = \frac{1}{i} \quad \text{o} \quad i = \frac{1}{p} \quad \text{o} \quad pi = 1.$$

luego: El intervalo i es el inverso de la pendiente. De lo expuesto se deduce:

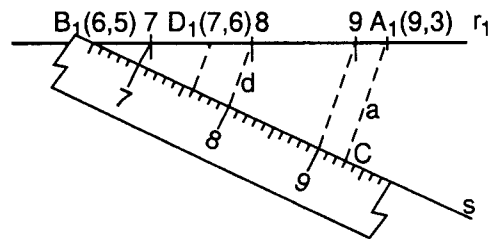
- A mayor inclinación, menor intervalo y a la inversa.
- Dos rectas d intervalos iguales tienen la misma inclinación.
- Una pendiente $p = 1,4$, por ejemplo, indica que al recorrer una distancia horizontal igual a la unidad, me elevo 1,4 unidades de altura y al contrario, un intervalo $i = 1,4$ indica que, al recorrer una distancia horizontal de 1,4 unidades, me elevo una unidad de altura.
- Si r es horizontal, todos sus puntos tienen igual cota (seis, por ejemplo). Su pendiente es nula y



(a) Por abatimiento.



(b) Por transversales.



(c) Método práctico.

Fig. 21.4. - Graduación de la recta.

el intervalo, infinito. Se representa por $r_1(6)$ o $r \equiv A_1(6)B_1(6)$.

- Si r es vertical, todos sus puntos se proyectan en su traza H_r . Su intervalo es nulo y su pendiente infinita. Se representa por $H_r \equiv r_1$.

21.4. Graduación de una recta

Graduar una recta r (Fig. 21.4) es hallar los puntos sucesivos de cota entera. La proyección de estos puntos es la imagen graduada o escala de pendiente de la recta y puede obtenerse, como sigue:

1.º Por abatimiento (Fig. a). El plano vertical, proyectante de la recta $r \equiv A_1(9,3)B_1(6,5)$, se abate sobre el de proyección o sobre otro paralelo a él (en la figura, sobre el horizontal de cota 4), tomando $\overline{A_1(A)} = 9,3-4=5,3$ y $\overline{B_1(B)} = 6,5-4=2,5$ unidades (a la escala del dibujo) que determinan el abatimiento $(r) \equiv (A)(B)$ de r .

A partir de A_1 , se lleva luego sobre $\overline{A_1(A)}$ longitudes iguales a la unidad y por los puntos de división, paralelas a r_1 que cortan a (r) en los abatimientos de los puntos de cota entera. Desabatando, se obtienen las proyecciones de éstos y el intervalo i de r .

Si se emplea una escala distinta a la del dibujo, (r) no sería el abatimiento de r , ni formaría con r_1 el

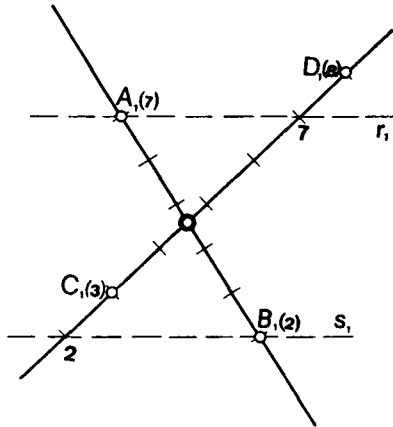


Fig. 21.5.—Rectas que se cortan.

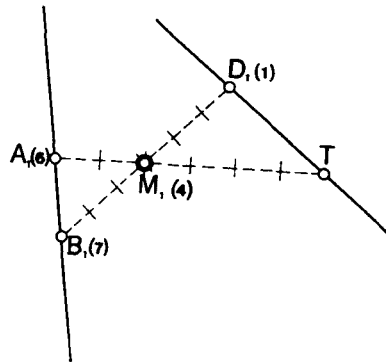


Fig. 21.6.—Las rectas se cortan fuera del dibujo.

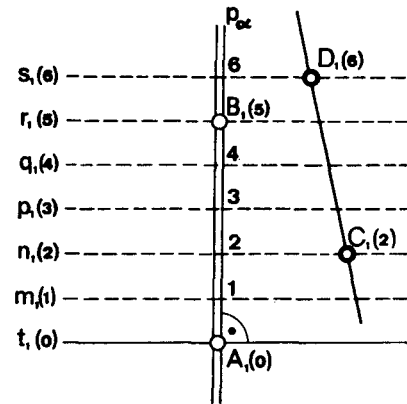


Fig. 21.7.—Recta de máxima pendiente del plano.

Las paralelas a CA_1 , trazadas por los puntos de división, cortan a r_1 en los puntos de cota entera y determinan el intervalo i de r .

3°. *Método práctico* (Fig. c). Es idéntico al anterior, pero llevando sobre s una regla graduada, y haciendo coincidir la división 6,5 con B_1 . Se marca, luego, sobre s , la división $C = 9,3$, y la enteras de la regla y, por estos últimos puntos, se trazan paralelas a CA_1 que cortan a r_1 en los puntos de cota entera.

a) Análogamente, la proyección D_1 del punto de r , de cota 7,6, por ejemplo, se obtiene de forma inmediata, trazando por la división 7,6, por ejemplo, se obtiene de forma inmediata, trazando por la división 7,6 de la regla, la paralela a CA_1 que corta a r , en D_1 .

b) Inversamente, para hallar la cota de un punto D_1 de r , se trazan por A_1 y D_1 dos paralelas a y d , de dirección arbitraria, y se hace coincidir la división 6,5 de la regla con B_1 . Si ahora se gira la regla, alrededor de B_1 , hasta que a pase por la división 9,3, la recta d indica, sobre la regla, la cota 7,6 de D . (Ver núm. 21.7).

21.5. Rectas que se cortan (Fig. 21.5)

Si dos rectas $A_1(7) B_1(2)$ y $C_1(3) D_1(8)$ se cortan, el punto de corte ha de tener igual cota en ambas rectas. Para que esto ocurra, basta que las rectas que unen los

ángulo α de inclinación de r .

2°. *Por transversales* (Fig. b). Por B_1 , se traza una secante arbitraria s y a partir de B_1 , se lleva sobre ella el segmento $\overline{B_1C} = 9,3 - 6,5 = 2,8 = 28$ décimas (medidas con una unidad arbitraria), tomando primero la diferencia $7 - 6,5 = 5$ décimas; luego, dos segmentos de 10 décimas y finalmente, otro de $9,3 - 9 = 3$ décimas.

puntos de igual cota de ambas sean de proyecciones r_1 y s_1 paralelas entre sí, puesto que las rectas dadas pertenecen al plano determinado por las horizontales paralelas $r_1(7)$ y $s_1(2)$.

Si las proyecciones se cortan fuera del dibujo (Fig. 21.6), cualquier par de rectas auxiliares $TA_1(6)$ y $B_1(7)$ $D_1(1)$ que corten a las dadas, han de cortarse en un punto.

21.6. Representación del plano

El plano α (Fig. 21.7) se representa por una de sus rectas de máxima pendiente, p_α , de proyección perpendicular a la traza $t_1(O)$ del plano (núm. 3,4). El plano queda así definido por p_α y su traza $t_1(O)$. La traza del plano también se representa por t_α o h_α (como en diédrico).

Las rectas de máxima pendiente, también llamadas *escalas de pendiente*, se representan graduadas y con doble línea para distinguirla de cualquier otra recta del plano.

Las horizontales del plano se proyectan, según perpendiculares a la escala de pendiente y son las intersecciones de α con planos horizontales de diferentes cotas.

Si un punto $C_1(2)$ está en α , pertenece a la horizontal $n_1(2)$ de α , de cota igual a la de C .

Si una recta está en α , corta a las horizontales de α .

Si el plano (Fig. 21.8) está dado por dos rectas $TC_1(4)$ y $C_1(4)A_1(1)$, los puntos de igual cota de éstas determinan las horizontales $m_1(5)$, $n_1(4)$, ... del plano y su traza $t_1(O)$.

Si el plano es horizontal, queda definido por su cota y si es vertical, por su traza h_α . (Ver núms 21,1 a 21,6 de n/E. de G.D.).

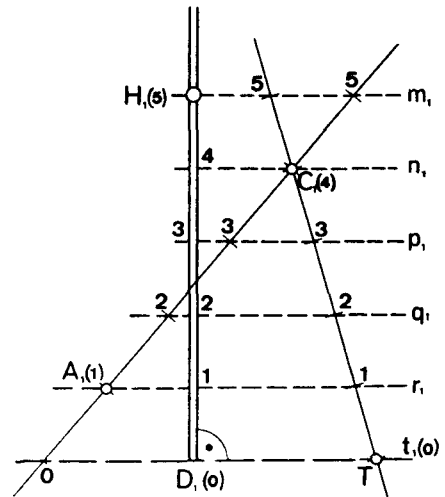


Fig. 21.8.—Plano dado por dos rectas.

EJERCICIOS

21.7. Cota de un punto de un plano

Si el plano viene dado por su recta de máxima pendiente p_α (Fig. 21.9), desde la proyección A_1 del punto dado, se traza la perpendicular a p_α y se halla la cota

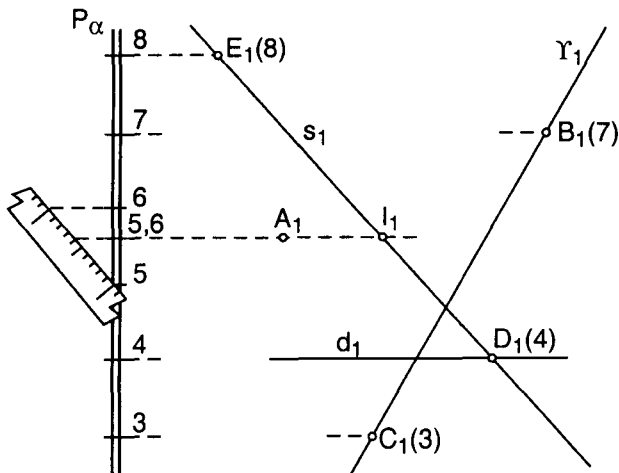


Fig. 21.9.—Cota de un punto del plano.

del punto de corte, que es igual a la del punto dado $A_1(5,6)$. Para ello, si entre las horizontales de cota 5 y 6 de p_α se colocan diez divisiones de cualquier escala, como indica la figura, la horizontal trazada por A_1 señala, sobre la escala, la cota 5,6 de A , (núm. 21,4-3°).

Si se conocen dos rectas r_1 y s_1 del plano, se halla una horizontal cualquiera d_1 de éste y se traza, por A_1 , la paralela A_1I_1 a ella que corta a s_1 , en el punto I_1 y se halla la cota 5,6 de éste, como se ha dicho.

21.8. Recta de máxima pendiente de un plano dado por tres puntos

Primeramente (Fig. 21.10), se gradúan las rectas dadas $r \equiv AB$ y $s \equiv AC$, por medio de rectas auxiliares a y b (núm. 21,4-2°), y se trazan las horizontales de cota 4 y 5 del plano que determinan el intervalo i de la recta de máxima pendiente m_1 , normal a ellas.

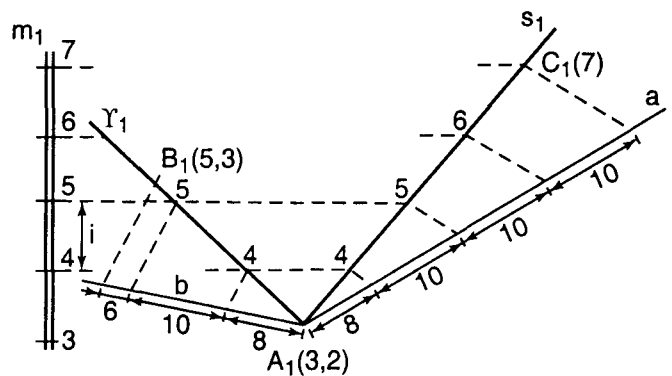


Fig. 21.10.—Plano dado por tres puntos.

21.9. Por un punto de un plano, trazar en él una recta de pendiente dada

Sea A_1 el punto dado del plano p_α (Fig. 21.11). Primeramente, se halla el intervalo i de la recta de pendiente dada $p = 2/3$, de longitud (núm. 21,3): $i = 1/p = 3/2 = 1,5$ unidades y luego, se traza el arco de radio i y centro, en un punto de cota entera $B_1(3)$ de

p_α que corta a la horizontal de cota 4 de α , en C_1 y D_1 . Las paralelas r_1 y s_1 , trazadas por A_1 , son las rectas de α que cumplen las condiciones dadas.

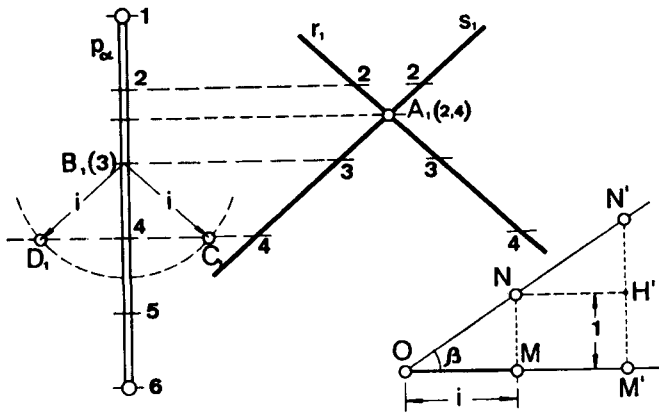


Fig. 21.11.—Recta de pendiente dada contenida en un plano.

El intervalo i puede también hallarse gráficamente, construyendo aparte un triángulo rectángulo $OM'N'$, de catetos $\overline{OM'} = 3$ y $\overline{M'N'} = 2$ unidades arbitrariamente elegidas. La paralela $H'N'$ a OM' , a distancia $\overline{M'H'} = 1$ unidad (medida a la escala del dibujo), corta a ON' en N , y determina el intervalo $i = \overline{OM}$. Si en vez de p nos dan la inclinación β de la recta respecto al horizontal, se procede análogamente, como se ve en la figura.

El problema tendrá dos, una o ninguna solución, según que i sea mayor, igual o menor que el intervalo de p_α

21.10. Trazar por una recta un plano de pendiente dada

Sea $r \equiv A_1(6) B_1(9)$ (Fig. 21.12), la recta dada y p , la

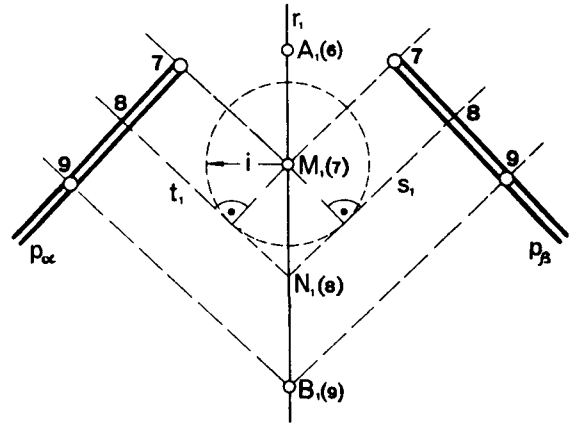


Fig. 21.12.—Plano de pendiente dada, trazado por una recta.

pendiente del plano. Primeramente, se halla el intervalo i de la recta de máxima pendiente del plano, como se explicó en el caso anterior y luego, con centro en un punto de cota entera $M_1(7)$ de r , por ejemplo, se traza la circunferencia de radio i . Las tangentes t_1 y s_1 a la circunferencia, desde $N_1(8)$, son las horizontales de los planos que determinan sus rectas de máxima pendiente p_α y p_β .

El problema tendrá dos soluciones, una o ninguna, según que el intervalo i de la recta de máxima pendiente del plano sea menor, igual o mayor que el de r .

22. INTERSECCIONES Y ABATIMIENTOS

22.1. Intersección de planos

Se determina por las intersecciones de dos horizontales de igual cota de ambos planos. En la figura 22.1, las trazas y las horizontales de cota 4 de los planos p_α y p_β se cortan, respectivamente, en los puntos T y $N_1(4)$ que determinan la intersección $TN_1(4)$ de α y β .

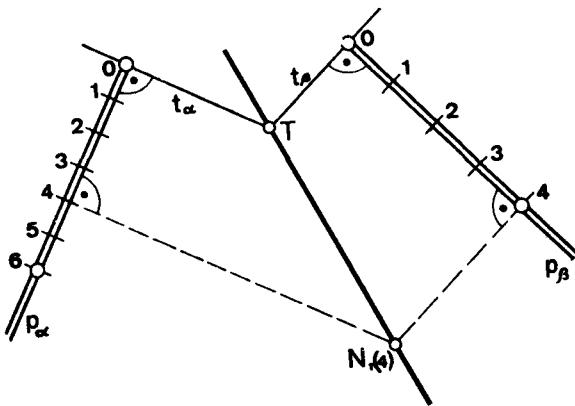


Fig. 22.1.—Intersección de los planos α y β .

Este problema es idéntico al de graduar una recta de α , de proyección t_β .

3.º Rectas de máxima pendiente paralelas (Fig. 22.4). Por ser planos de trazas paralelas, se cortan

22.2. Casos particulares

1.º Plano β horizontal (Fig. 22.2). La intersección es la horizontal r , de cota 5,8 igual a la de β .

2.º Plano β vertical (Fig. 22.3). La intersección es la recta $C_1(1) D_1(5)$, determinada por las intersecciones C_1 y D_1 de t_β con dos horizontales de COTAS 1 y 5, por ejemplo, de α .

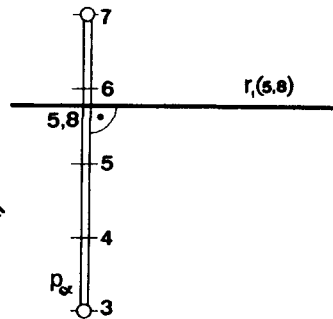


Fig. 22.2.—El plano β es horizontal.

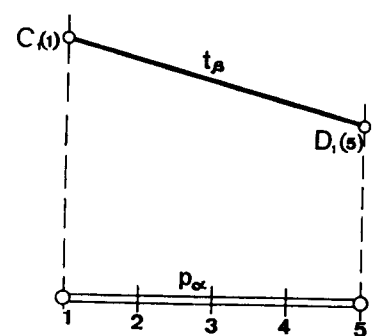


Fig. 22.3.—El plano β es vertical.

según una horizontal r , común a ambos. Para determinar un punto de ésta, se trazan dos o más rectas horizontales que unen pares de puntos de igual cota de p_α y p_β y concurren en un punto A de r , puesto que como

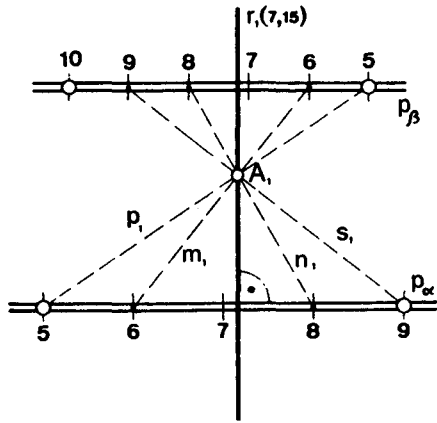


Fig. 22.4. - Rectas de máxima pendiente paralelas.

ya se sabe por Geometría, si dos paralelas son cortadas en segmentos proporcionales (intervalos de p_α y p_β) por varias rectas, éstas concurren en un punto.

La perpendicular r a p_α y p_β , trazada por A_1 , es, por tanto, la intersección de α y β .

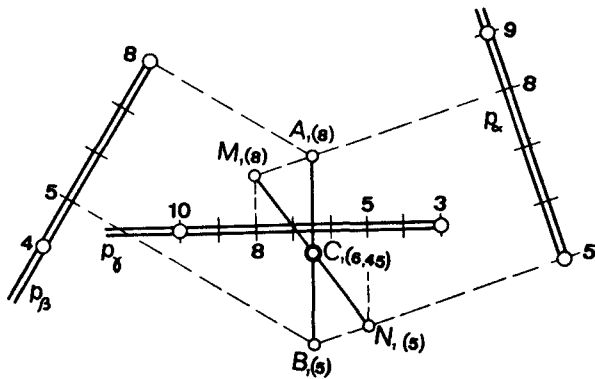


Fig. 22.5. - Intersección de tres planos.

22.3. Intersección de tres planos

En la figura 22,5 se han hallado las intersecciones AB y MN de p_α por ejemplo, con los otros dos dados p_β y p_γ . El punto de corte C_1 (6,45) de dichas rectas es el común a los tres planos.

22.4. Intersección de recta y plano

Sean p_α y AB el plano y recta dados (Fig. 22.6). Siguiendo el método general (núm. 4,3), se traza por

la recta un plano auxiliar, determinado por dos horizontales arbitrarias, de cotas 3 y 6 por ejemplo, que cortan a las de igual cota de p_α en $M_1(3)$ y $N_1(6)$. La intersección K_1 (3,75) de AB y MN es el punto de corte de AB y p_α

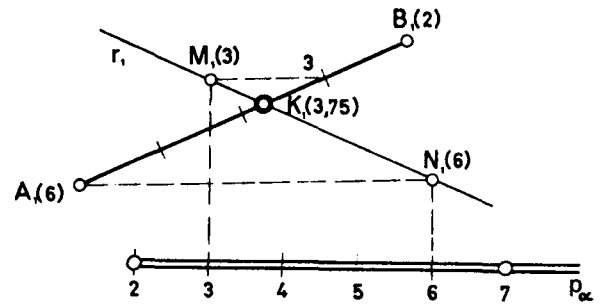


Fig. 22.6. - Intersección de recta y plano.

Las horizontales del plano auxiliar conviene elegir-las de modo que corten a las de p_α , dentro del dibujo y bajo ángulos próximos a 90° , para que las intersecciones queden claramente dibujadas.

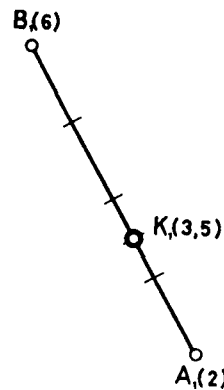


Fig. 22.7. - El plano es horizontal.

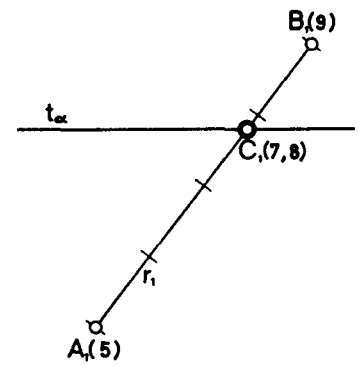


Fig. 22.8. - El plano es vertical.

22.5. Casos particulares

1.º Plano α horizontal, de cota 3,5 (Fig. 22.7). La intersección es el punto K_1 (3,5) de AB .

2.º Plano α vertical (Fig. 22.8). La intersección es el punto de corte C_1 (7,8) de t_α con la recta dada $r_1 \equiv A_1(5) B_1(9)$, y su cota se deduce de la graduación de la recta (núm. 21,4-3º).

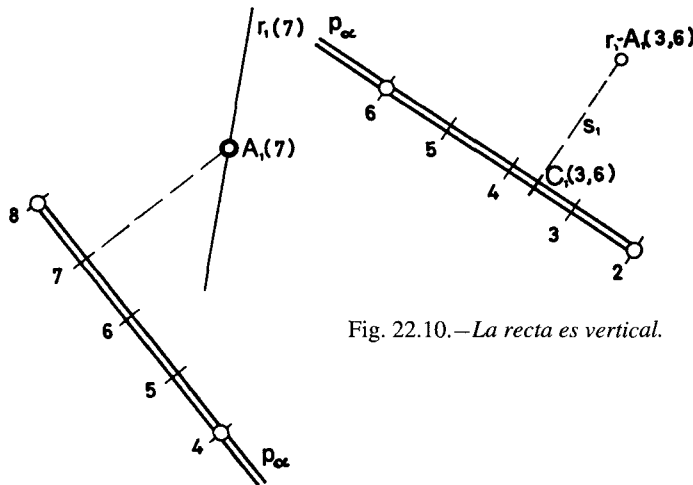


Fig. 22.10.—La recta es vertical.

Fig. 22.9.—La recta es horizontal.

3.º Recta r_1 (7) horizontal (Fig. 22.9). La horizontal de cota 7 de p_α corta a r_1 , en la intersección buscada $A_1(7)$.

4.º Recta vertical r_1 (Fig. 22.10). Se traza por r_1 la horizontal s de p_α y se halla su cota 3,6 (núm. 21,4-3º), siendo $A_1(3,6)$, la intersección buscada. (Ver núms. 21,8 a 21,20 de n/E. de G.D.).

ABATIMIENTOS

22.6. Abatimiento de un punto

Sea A_1 un punto de cota entera 2, por ejemplo, situado en p_α (Fig. 22.11). Para abatir α y con él, el punto A , sobre el horizontal de proyección (núm. 8,2), se traza por A_1 la perpendicular y la paralela a la traza t_α de α y sobre esta última, se lleva la cota $\overline{A_1(A)}_1 = 2u$ de A (igual a dos unidades, a la escala del dibujo). Con centro en el pie T de la perpendicular, se traza, luego, el arco de radio $\overline{T(A)}_1$, que corta a TA_1 en el abatimiento (A) de A .

Para abatir un punto $C_1(3)$ de α , sobre el horizontal de cota 2, por ejemplo, (figura de la derecha), se toma como charnela la horizontal $h_1(2)$ de α y, sobre la paralela a ésta, se lleva la longitud $\overline{C_1(C)}_1 = 3-2=1$ unidad u (a la escala del dibujo).

Como ya se dijo (núm. 8,5), la proyección y el abatimiento de una forma de plano α se corresponden en una afinidad ortogonal de eje t_α (charnela) y par de puntos homólogos A_1 y (A) .

Esto sirve para hallar el abatimiento (M) de un punto M_1 de α (no es necesaria su cota), por medio de la afinidad: Abatir previamente un punto de cota entera $A_1(2)$ de p_α como se ha dicho, y trazar por M_1 una recta $r_1 \equiv M_1 K$ y su homóloga (r) que pasa por el homólogo (B) de B_1 y corta a la normal $M_1(M)$ a t_α en (M) .

De forma análoga, se halla el abatimiento de N sobre el horizontal de cota 2.

Para desabatir un punto de α , de abatimiento dado (M) , se hace la construcción inversa, como se ve en la figura.

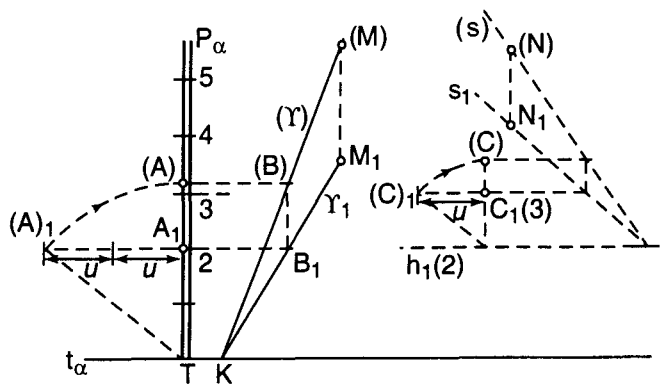


Fig. 22.11.—Abatimiento de un punto.

22.7. Abatimiento de una recta

Es la recta (r) que une la traza (A) de r_1 (Fig. 22.12) con el abatimiento (B) de un punto de cota entera B_1 (6) de r .

En la figura 22.11, el abatimiento (r) pasa por el homólogo (B) de B_1 .

22.8. Abatimiento de una figura plana

El abatimiento del polígono $ABCDE$ situado en p_α sobre el horizontal (Figura 22.13), se obtiene fácilmente por afinidad, abatiendo previamente, como ya se sabe (núm. 22,6), un punto de cota entera de p_α que

determina el abatimiento (P) del punto P del lado $a_i \equiv \overline{A_i B_i}$ del polígono y el abatimiento (a) $\equiv \overline{(A)(B)}$ de éste, (no son necesarias las cotas de los vértices).

Los abatimientos $\overline{(A)(E)}$ y $\overline{(E)(D)}$ se obtienen, como homólogos de $\overline{A_i E_i}$ y $\overline{E_i D_i}$ en la afinidad de eje t_α . El abatimiento (C) de C_i se ha hallado, por medio de la diagonal $\overline{C_i E_i}$, abatida en \overline{CE} .

Si el polígono es de plano vertical α (Fig. 22.14), se trazan por los vértices A_i, B_i, C_i y D_i normales a t_α y se llevan, sobre ellas, las cotas respectivas, a la escala

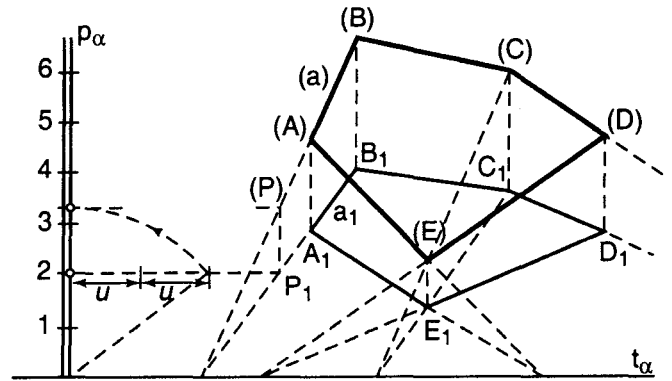


Fig. 22.13. - Abatimiento de una figura plana.

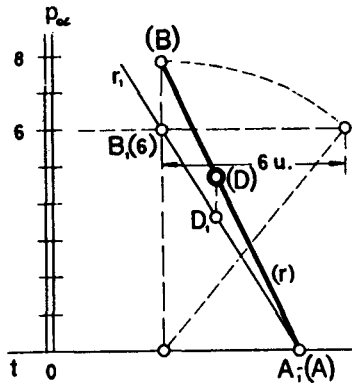


Fig. 22.12. - Abatimiento de una recta.

del dibujo, siendo $(A)(B)(C)(D)$ el abatimiento del polígono. (Ver núms. 22,13 y 14 de n/E. de G.D.).

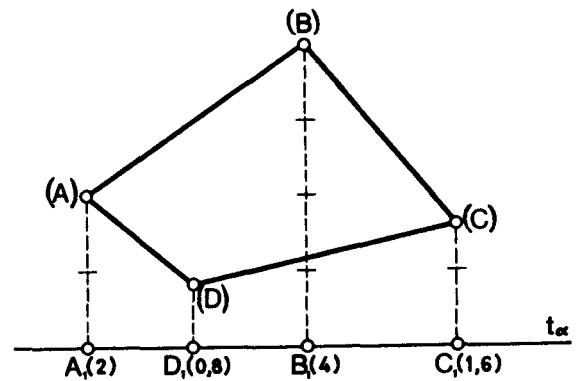


Fig. 22.14. - Abatimiento de plano vertical.

APLICACIONES

22.9. Tejados. Generalidades

Los tejados son cubiertas formadas por superficies, generalmente planas (*faldones*) y más o menos inclinadas, para evacuar el agua de lluvia (Fig. 22.15). Las horizontales inferiores a, b, d, e, \dots de cada faldón (*aleros*), suelen colocarse al mismo nivel y algo separadas de los muros, para evitar humedades y manchas.

Las intersecciones de faldones de igual pendiente se proyectan, según bisectrices $\overline{C_i A_i}, \overline{D_i E_i}, \dots$, de los ángulos formados por sus aleros y si éstos son paralelos, según la paralela media c_i .

Las intersecciones inclinadas \overline{CA} y \overline{DE} se llaman *limas*, y las horizontales c , *cumbreras*. Las primeras se clasifican en: *lima-tesa*, si separan las aguas, como las \overline{CA} y \overline{CB} , o *lima-hoya*, si las recogen, como la \overline{DE} , habiéndose indicado con flechas la dirección de las aguas.

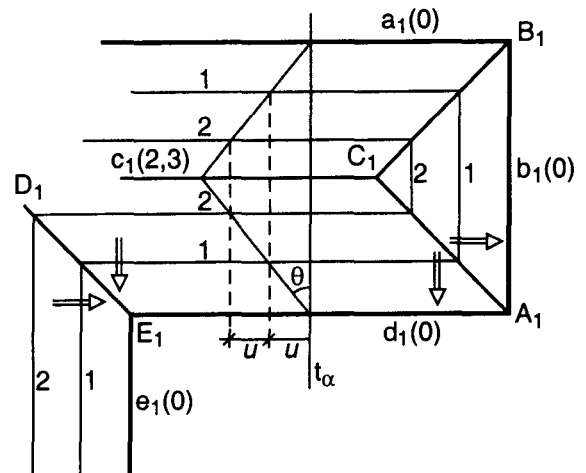


Fig. 22.15. - Intersecciones de faldones de cubiertas.

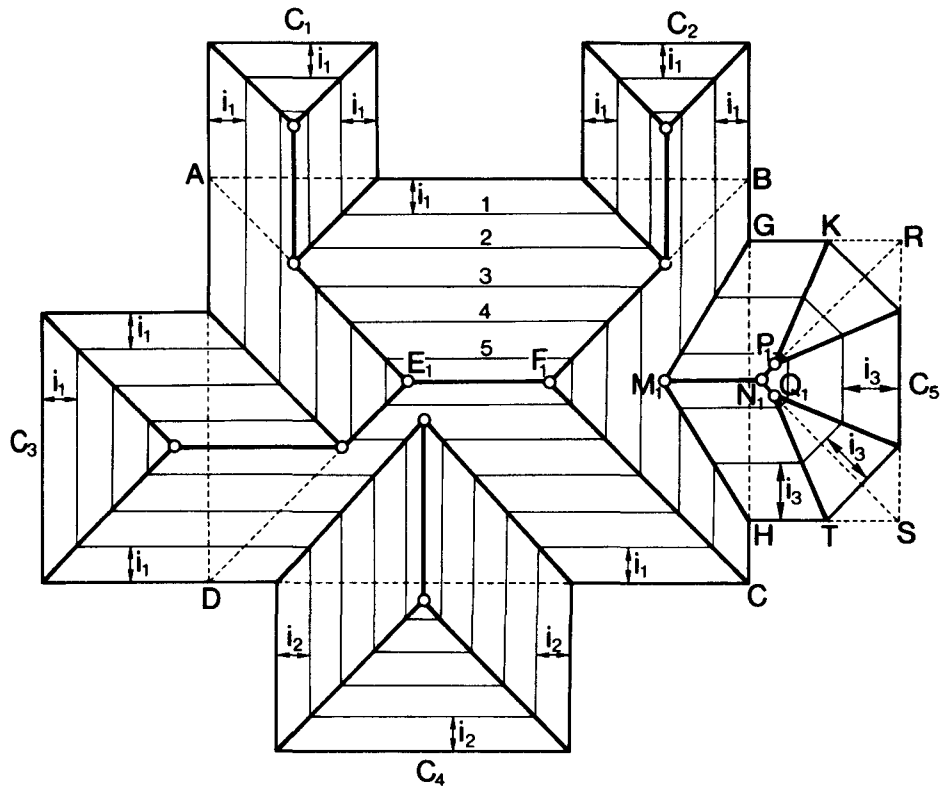


Fig. 22.16.—Planta de cubierta de un edificio.

En los tejados de igual pendiente, la planta es la misma para cualquier pendiente. Lo único que varía es la inclinación de faldones y limas, y la cota de cumbreras. La inclinación θ del faldón y la cota de la cumbrera c_i (2,3), se ha obtenido, seccionando la cubierta por un plano α normal a la cumbrera y abatiéndolo sobre el plano de cota cero de los aleros.

22.10. Intersecciones de tejados

En la figura 22.16, se ha dibujado la planta de cubiertas de una edificación, integrada por un cuerpo principal rectangular ABCD con cuatro salientes rectangulares C_1 , C_2 , C_3 y C_4 y uno exagonal C_5 .

Suponemos que los faldones o vertientes del tejado del edificio principal y de los anexos C_1 , C_2 y C_3 son de pendiente p_1 , y los de C_4 y C_5 , de pendientes respectivas p_2 y p_3 , siendo $p_2 > p_1 > p_3$.

Primeramente, se gradúan, como ya se sabe (núm. 21,4), las rectas de máxima pendiente de todos los faldones, de intervalos respectivos $i_2 < i_1 < i_3$ (puesto que, a mayor pendiente, le corresponde menor intervalo) y se trazan las horizontales de cota entera de los faldones, asignando cota cero a la planta horizontal a cubrir (planta de aleros). Las intersecciones de estas horizontales determinan las aristas de intersección de los faldones, dibujadas con trazo grueso. (Ver núms. 24,1 a 24,25 de n/E. de G.D.).

23. PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD, DISTANCIAS Y ÁNGULOS

23.1. Rectas paralelas

Las condiciones de paralelismo de dos rectas r y s (Fig. 23.1) son:

- a) Que las proyecciones r_1 y s_1 sean paralelas.
- b) Que tengan pendientes o intervalos iguales.
- c) Que las cotas crezcan en el mismo sentido.

De esto se deduce que *dos rectas paralelas r y s pueden superponerse por traslación paralela, en dirección de las horizontales del plano $[r, s]$ y lo mismo sucede con sus proyecciones o imágenes graduadas r_1 y s_1 .*

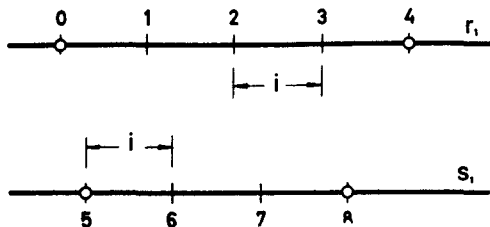


Fig. 23.1.—Rectas paralelas.

23.2. Planos paralelos

Si dos planos son paralelos, sus escalas de pendiente han de ser paralelas, de igual pendiente o intervalo y de cotas crecientes en el mismo sentido.

El paralelismo de planos verticales se reduce al paralelismo de sus trazas.

23.3. Paralelismo de recta y plano

Como ya dijimos en diédrica (núm. 5,3), *una recta es paralela a un plano, si es paralela a cualquier recta del plano. Recíprocamente: un plano es paralelo a una recta, si contiene a una paralela a la recta dada.*

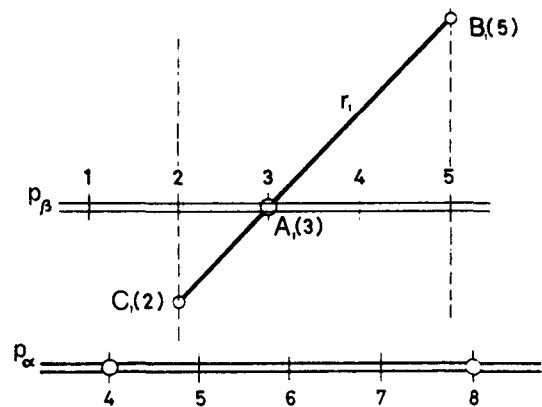


Fig. 23.2.—Recta paralela a α , trazada por A .

Así, para trazar por un punto $A_i(3)$ (Fig. 23.2) una paralela a un plano dado p_α , basta trazar por A el plano p_β paralelo al α . Cualquier recta $r \equiv BC$, contenida en β , trazada por A , resuelve el problema.

También podría haberse trazado una recta contenida en α y, por A , la paralela r a ella. El primer procedimiento es más aconsejable, si r ha de cumplir otra condición.

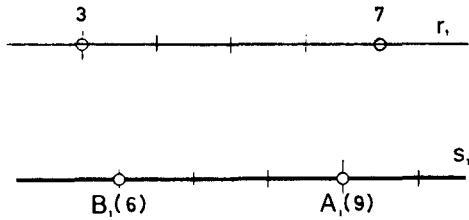


Fig. 23.3.—Plano paralelo a r , trazado por A .

Inversamente: para trazar por $A_1(9)$ (Fig. 23.3) un plano paralelo a una recta dada r , basta trazar por A la paralela a s a r , y cualquier plano que pase por s resuelve el problema. (Ver núms. 22,1 a 22,4 de n/E. de G.D.).

PERPENDICULARIDAD

23.4. Recta perpendicular a un plano

Si por un punto A de un plano α (Fig. 23.4), se traza la perpendicular $r \equiv AB$ a éste y la recta de máxima pendiente $p \equiv AC$ de α , sus proyecciones ortogonales r_1 y CB pasarán por la proyección ortogonal A_1 de A sobre H y coincidirán con la normal r_1 a t_α .

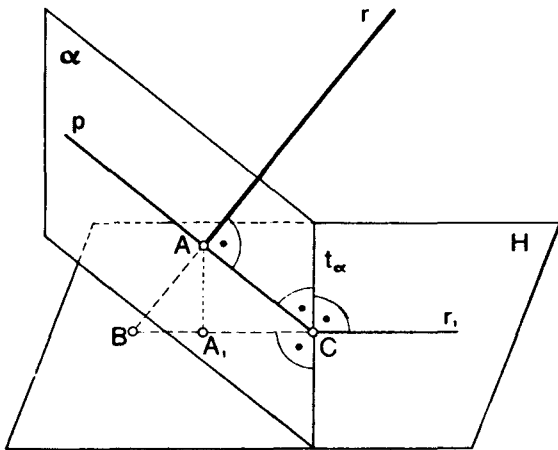


Fig. 23.4.—Perpendicularidad entre recta y plano.

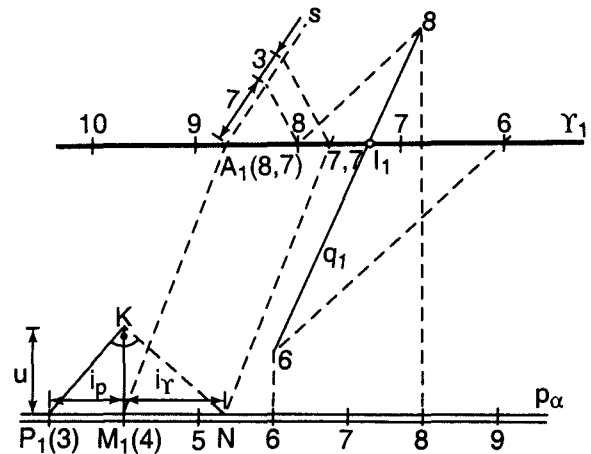
En el triángulo rectángulo ABC , así formado, la altura es media proporcional entre los segmentos en que divide a la hipotenusa, luego:

$$\overline{AA_1}^2 = \overline{BA_1} \times \overline{A_1C}, \quad \text{o sea} \quad \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BA_1}} \times \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1C}} = 1$$

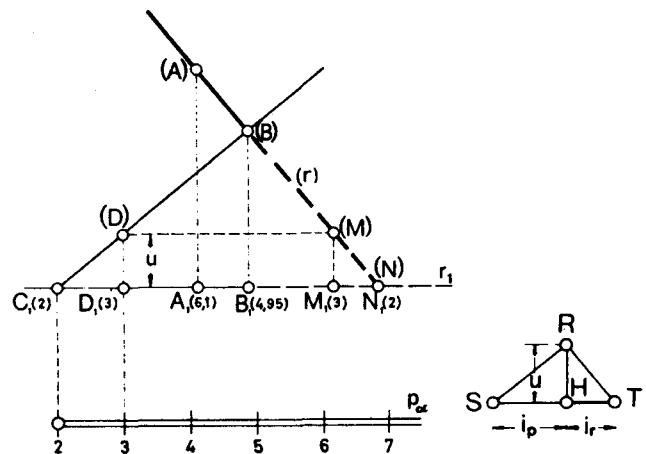
y siendo: $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BA_1}} = p_r$ y $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1C}} = p_p$, resulta:

$$p_r \times p_p = 1 \quad \text{ó} \quad p_p = \frac{1}{p_r}$$

Las condiciones de perpendicularidad de recta y plano, deducidas de lo expuesto son, por tanto:



(a) Primer método.



(b) Segundo método.

Fig. 23.5.—Perpendicular a α , trazada por $A_1(8,7)$.

a) Que la proyección de la recta sea paralela a la de la recta de máxima pendiente del plano.

- b) Que sus intervalos (o sus pendientes) sean inversos.
- c) Que sus cotas crezcan en sentidos contrarios.

23.5. Recta perpendicular a un plano, trazada por un punto (Fig. 23.5)

a) Para trazar la perpendicular r a un plano dado p_α , por un punto $A_1(8,7)$ (Fig. a), se construye sobre el intervalo i_p de p_α (o en figura aparte), el triángulo rectángulo de catetos $\overline{P_1M_1} = i_p$ y $\overline{M_1K} = u$ (unidad de altura, a la escala del dibujo). La perpendicular KN a $\overline{KP_1}$ determina sobre p_α el intervalo $i_r = \overline{M_1N}$ de r que permite graduar ésta, llevando sobre ella el intervalo $8,7 - 7,7 = i_r$ (por traslación paralela de dirección M_1A_1). El punto de cota entera 8 de r , se ha hallado llevando sobre una transversal s , a partir de A_1 , 7 y 3 unidades arbitrarias (núm. 21,4-2°).

Si se pide la intersección I de r y α , se traza por r un plano auxiliar, de horizontales arbitrarias, de cotas 6 y 8, que cortan a las de igual cota de α , según la

recta q_1 , siendo $I_1 \equiv [r_1, q_1]$ el punto buscado.

b) Otro método (Fig. b) consiste en trazar, por la proyección A_1 del punto dado, la recta de máxima pendiente $C_1(2) D_1(3)$ de α y abatir el plano vertical que la contiene, sobre el horizontal de cota 2, por ejemplo, tomando $A_1(A) = 6,1-2 = 4,1$ u y $D_1(D) = u$. La perpendicular (r) a $(C)(D)$, trazada por (A) , corta a la charnela en $N_1(2)$, siendo $r \equiv A_1(6,1) N_1(2)$ la recta pedida.

Para graduar la recta, se traza la paralela $(D)(M)$ a r_1 que corta a (r) en el punto (M) , de cota 2, de (r) . La intersección (B) de (r) y $(C)(D)$ es el abatimiento del punto de corte $B_1(4,95)$ de r y α .

23.6. Plano normal a una recta, trazado por un punto

Es el recíproco del anterior y se resuelve, de forma análoga a la explicada (Fig. 23.5), tomando p_α como la recta dada y r , como escala de pendiente del plano normal a p_α trazado por A .

DISTANCIAS

23.7. Distancia entre dos puntos

Es un problema similar al de hallar la longitud d del segmento \overline{AB} , determinado por dos puntos dados (Fig. 23.6) y se resuelve, construyendo sobre $\overline{A_1B_1}$ el triángulo rectángulo de catetos $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{B_1(B)} = 4,5$ u (a la escala del dibujo). La hipotenusa $\overline{A_1(B)}$ es la distancia buscada.

Como se ve, esto es lo mismo que abatir el plano vertical que contiene a \overline{AB} sobre el plano horizontal de cota igual a la de A .

23.8. Distancia de un punto a un plano

Se traza la perpendicular r , desde el punto dado A al plano α (Fig. 23.5-a) y se halla la intersección I de r y α , como se explicó en el núm. 23,5-a. La distancia pedida es el segmento \overline{AI} .

También puede hallarse por abatimiento, como se explicó en el núm. 23,5-b.

23.9. Distancia de un punto a una recta

Lo más sencillo es abatir el plano determinado por el punto A y la recta r y hallar la distancia de (A) a (r) .

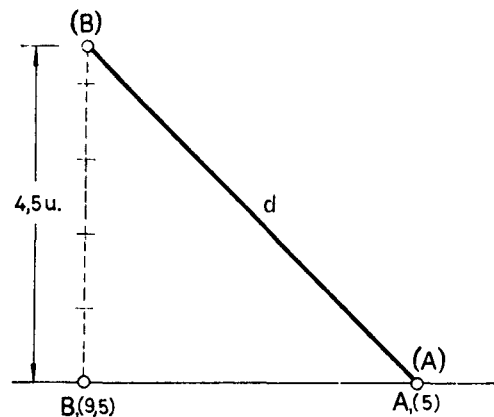


Fig. 23.6. - Distancia entre A y B.

También puede trazarse por A el plano β , perpendicular a r , y hallar su intersección B con r . El segmento \overline{AB} es la distancia pedida.

23.10. Distancia entre rectas paralelas

Se obtiene, por abatimiento del plano determinado por las paralelas dadas r y s (Fig. 23.7), tomando como charnela la horizontal t_1 (5). El abatimiento (A) del punto A_1 (8) de r determina el abatimiento (r) de r y el (s), de s , paralelo a (r).

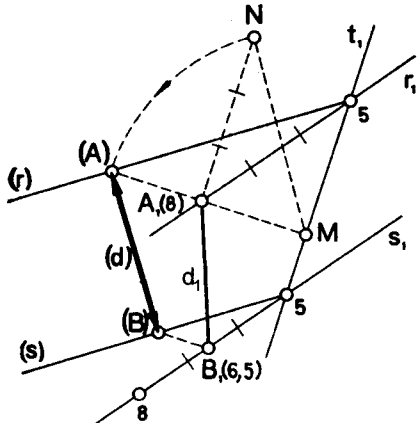


Fig. 23.7.—Distancia entre rectas paralelas.

23.11. Distancia entre planos paralelos

Es el segmento de perpendicular común a ambos planos, comprendido entre ellos.

También puede hallarse más fácilmente, cortando los planos α y β dados (Fig. 23.8) por el plano vertical que contiene a p_α por ejemplo, y corta a éstos, según rectas de máxima pendiente, abatidas sobre el horizontal de cota 2, en (p_α) y (p_β). La distancia d entre (p_α) y (p_β) es la buscada.

El abatimiento (p_α) de p_α pasa por el abatimiento (A) del punto A_1 (5) de p_α y el (p_β), paralelo a (p_α), por el abatimiento (C) del punto C_1 (5) de β , de imagen C_1 situada en p_α . (Ver núms. 22,5 a 22,15 de n/E. de G.D.).

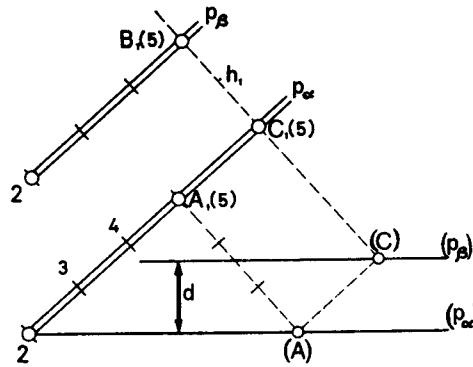


Fig. 23.8.—Distancia entre planos paralelos.

La perpendicular común $\overline{A_1B_1}$ a (r) y (s) es la distancia pedida $d \equiv \overline{A_1B_1}$, desabatida en $d_1 \equiv \overline{AB_1}$.

La distancia d también queda determinada por las intersecciones de r y s con un plano perpendicular a ambas.

La determinación de ángulos se reduce, generalmente, a abatir el plano del ángulo para hallar éste en verdadera magnitud. (Ver núms. 22,6 a 22,13 de n/E. de G.D.). A continuación, se exponen algunos ángulos de frecuente aplicación.

23.12. Ángulo de dos rectas

Para obtener el ángulo $\alpha \equiv \widehat{rs}$ (Fig. 23.9), se abate el vértice A_1 (9) sobre el horizontal de cota 5, por ejemplo, en (A), tomando como charnela la horizontal t_1 (5), siendo $\alpha \equiv \widehat{B_1(A)D_1}$.

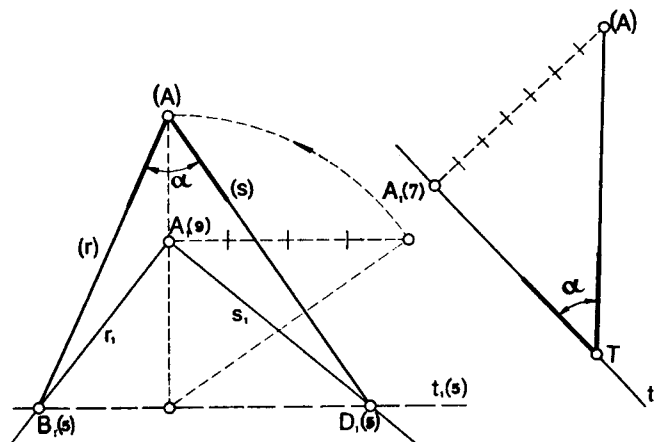


Fig. 23.9.—Ángulo de dos rectas.

Fig. 23.10.—Ángulo de una recta con el plano de proyección.

23.13. Ángulo de una recta con el plano de proyección

Es el que forma la recta TA_1 (7) (Fig. 23.10) con su proyección ortogonal sobre H . Se obtiene, abatido el plano vertical de traza t que contiene a la recta, siendo (A) el abatimiento de A . El ángulo $\alpha = \widehat{(A)TA_1}$ es el buscado.

23.14. Ángulo de un plano con el de proyección

Es el que forma su recta de máxima pendiente con el de proyección y se obtiene, como en el caso anterior.

ÁNGULOS

24. LÍNEAS, SUPERFICIES Y TERRENOS

24.1. Representación de líneas

a) *Línea quebrada* (Fig. 24.1). Se representa por las proyecciones acotadas de sus vértices, como la *ABCDMN*.

b) *Curva plana* (Fig. 24.2). Queda definida (Fig. a) por su proyección horizontal *c₁* y por la recta de máxima pendiente p_α de su plano.

La curva horizontal *b₁* (4) (Fig. b), por su proyección y su cota.

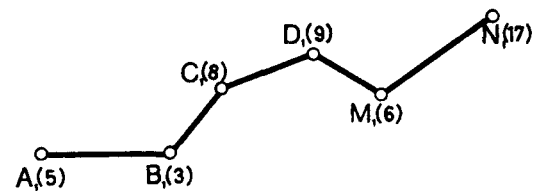
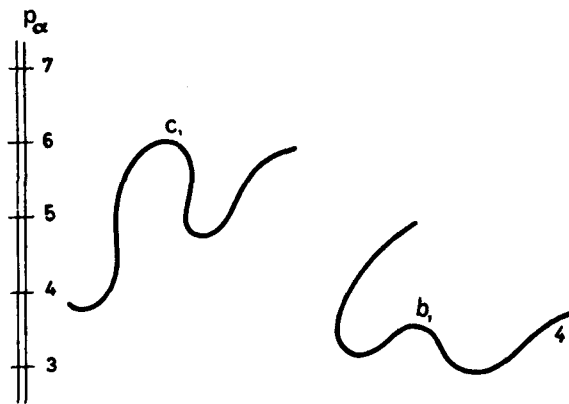
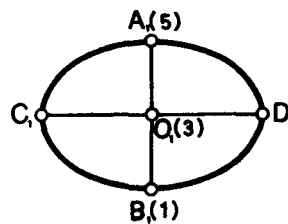


Fig. 24.1.—Línea quebrada.



(a) Curva de plano inclinado.

(b) Curva horizontal.



(c) Circunferencia de radio $R = \overline{OD_1}$.

Fig. 24.2.—Representación de curvas planas.

La circunferencia, por su centro O_1 (3) (Fig. c), su radio $R = \overline{O_1C_1} = \overline{O_1D_1}$ y el extremo A_1 (5), por ejemplo, del eje menor de la elipse proyección.

c) *Curva alabeada*. Si no se conoce su forma de generación, lo más práctico es inscribirla una poligonal y representar éste como en el caso a). El número de lados o la longitud de éstos dependerá de la exactitud con que han de representarse las variaciones de curvatura de la línea.

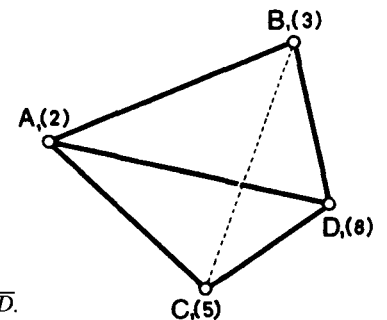


Fig. 24.3.—Tetraedro.

24.2. Representación de superficies y cuerpos

Como ejemplo, indicaremos someramente la representación de superficies elementales.

El tetraedro *ABDC* (Fig. 24.3) y las superficies poliédricas quedan definidas por sus vértices A_1 (2), B_1 (3), D_1 (8) y C_1 (5). Las aristas ocultas conviene dibujarlas de trazos o puntos, para facilitar su representación.

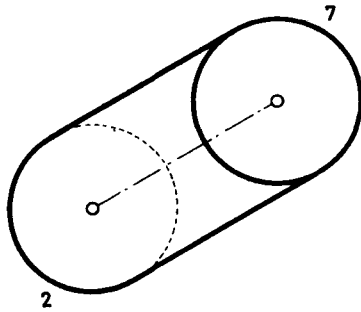


Fig. 24.4. - Cilindro de base horizontal.

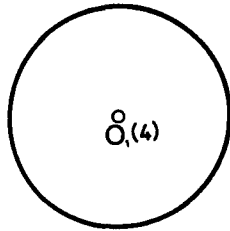


Fig. 24.5. - Esfera.

El cilindro, por sus bases y su contorno aparente. Si las bases son horizontales (Fig. 24.4), basta indicar la cota de éstas.

El cono, por el vértice y la base y la esfera (Fig. 24.5), por su centro $O_1(4)$ y su radio.

La figura 24,6 representa el cuerpo de revolución formado por dos esferas iguales, de centros $A_1(5)$ y $B_1(5)$, y un cilindro de eje AB, limitado por sus intersecciones circulares r y s con las esferas.

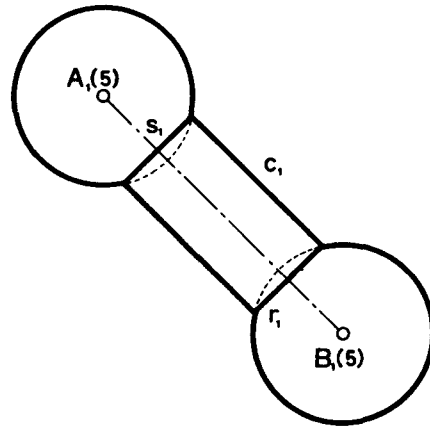


Fig. 24.6. - Cuerpo de revolución de eje horizontal.

Las superficies irregulares, cuya ley de formación se desconozca, no tienen normas generales de representación, debiendo elegirse, en cada caso, la más apropiada. (Ver núm. 23,5 a 23,23 de n/E. de G.D.).

TERRENOS

24.3. Superficies topográficas. Representación

El sistema acotado es el utilizado, casi exclusivamente, para representar la superficie terrestre porque permite hallar con facilidad las alturas y pendientes en cada punto de la superficie y proporciona imágenes claras e intuitivas de la forma y accidentes del terreno.

Esto se consigue (Fig. 24.7), cortando la superficie del terreno por planos horizontales y equidistantes entre sí la misma longitud. Las secciones producidas por estos planos son curvas, llamadas *líneas* o *curvas de nivel*, por ser de igual cota los puntos de cada una.

Si se proyectan dichas curvas sobre H y se indican las cotas respectivas de cada una, se obtiene una representación muy clara del terreno, cuya exactitud dependerá de la equidistancia e de los planos secantes.

Como plano de proyección (de cota cero), se toma el de la superficie del mar en calma, en Alicante, prolongado por debajo de las tierras. De aquí, que a las cotas positivas se les llame también *cotas sobre el nivel del mar*. Esto obliga a prescindir de la curvatura esférica de la tierra y a suponer que el plano de proyección es perfectamente plano; que las verticales son paralelas y que cortan a la superficie en un solo punto, lo cual es admisible en zonas no muy extensas, teniendo en cuenta la longitud del radio terrestre.

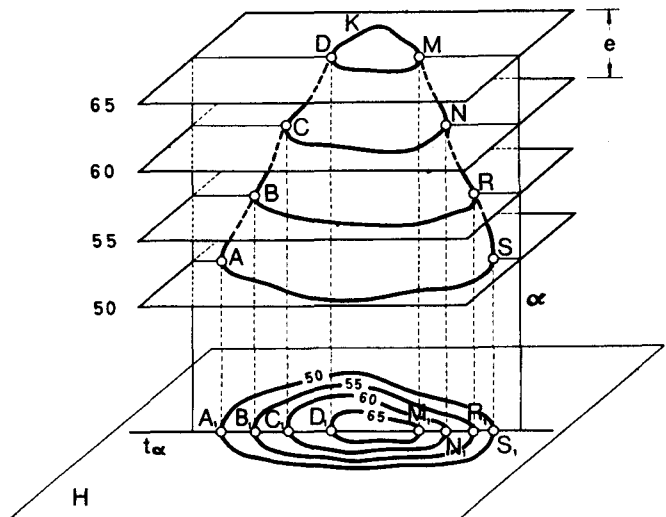


Fig. 24.7. - Representación de un terreno.

Se llama *plano topográfico* o simplemente *plano*, a la representación de una zona de terreno de extensión apropiada para poder ser dibujada sobre un plano y a la superficie representada, *superficie topográfica*.

Según la finalidad a que se destinan, los planos reciben los nombres de: *hidrográficos, catastrales, agrícolas, orográficos, militares*, etc.

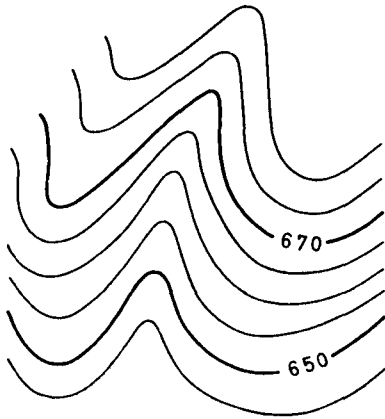


Fig. 24.8.—Curvas de nivel de un terreno.

24.4. Equidistancia

Se llama *equidistancia real o métrica o simplemente equidistancia*, la distancia vertical que existe entre dos planos horizontales de dos curvas de nivel consecutivas o lo que es lo mismo, la distancia constante e que separa los planos secantes consecutivos de la Fig. 24.7.

Equidistancia gráfica es la equidistancia real, reducida a la escala del dibujo. Ejemplo: en un plano a escala 1/50.000, con una equidistancia real $e = 10$ m., la equidistancia gráfica es:

$$\frac{e}{50.000} = \frac{10}{50.000} = 0,0002 \text{ m} = 0,2 \text{ mm.}$$

y, si la escala es 1/n: e/n .

La equidistancia gráfica es, por tanto, el cociente de dividir la equidistancia real por el denominador de la escala del plano.

La equidistancia varía según que el terreno sea más o menos accidentado pues si se adoptara la misma en todos los planos, las curvas de nivel estarían muy espaciadas en terrenos poco movidos y muy juntas, en zonas montañosas.

24.5. Curvas de nivel

Para facilitar la lectura de los planos, todas las curvas de nivel (Fig. 24.8) se dibujan con trazo fino y cada cuatro o cinco curvas, se dibuja una con trazo más grueso.

A veces, para representar detalles topográficos situados entre dos curvas de nivel, se reduce la equidistancia a la mitad, interpolando curvas en esta zona. Las curvas interpoladas se dibujan de trazos para distinguirlas de las normales.

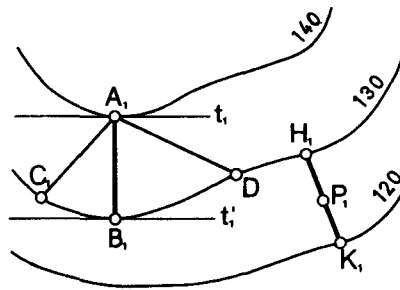


Fig. 24.9.—Línea de máxima pendiente.

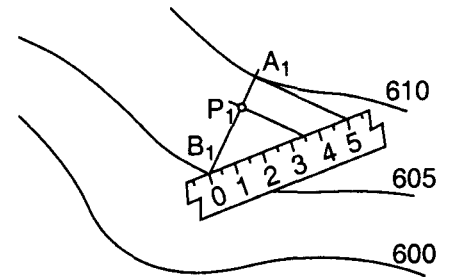


Fig. 24.10.—Cota de un punto del terreno.

24.6. Líneas de máxima pendiente

Si, desde un punto A , situado en una curva de nivel (Fig. 24,9), se trazan varias rectas que corten a la curva inmediata, la pendiente entre A y cada uno de los puntos C , B y D (distantes verticalmente la equidistancia e), depende únicamente de sus distancias horizontales A_1C_1 , A_1B_1 y A_1D_1 , correspondiendo la mayor pendiente a la distancia menor A_1B_1 .

La recta \overline{AB} se llama *línea de máxima pendiente* y dada la proximidad de las curvas, puede considerarse que es normal a ambas (o al menos, a una de ellas), puesto que si trazamos las tangentes t y t' a las curvas, podemos suponer que, en las proximidades del segmento \overline{AB} , el terreno se confunde con el plano definido por t y t' luego la recta de máxima pendiente de este plano, perpendicular a t y t' , ha de coincidir con \overline{AB} .

La pendiente en un punto P , situado entre dos curvas de nivel, es la de la línea de máxima pendiente \overline{HK} , que pasa por P . Como fácilmente se comprende, el trazado de la línea de máxima pendiente no puede ser exacto, sino sólo aproximado, dibujándose a sentimiento en la mayor parte de los casos.

24.7. Cota de puntos situados entre dos curvas de nivel

Por el punto dado P_1 (Fig. 24.10) se traza la línea de máxima pendiente y por A_1 y P_1 , dos paralelas de dirección arbitraria. La cota 608,5 de P se halla de forma inmediata por el método de la regla (núm. 21,4-3°).

24.8. Trazado de perfiles

La sección producida en un terreno por un plano vertical (o una superficie cilíndrica de generatrices

verticales) se llama *perfil del terreno*. En la figura 24.7, el perfil de plano α es la curva *ABCDKMNRS*, de proyección t_α .

Según su dirección, los perfiles se llaman *longitudi-*

nales o *transversales*, según que sus trazas coincidan o sean normales a las proyecciones de los ejes de carreteras, ríos, calles, etc.

Para construir o levantar el perfil plano vertical, de

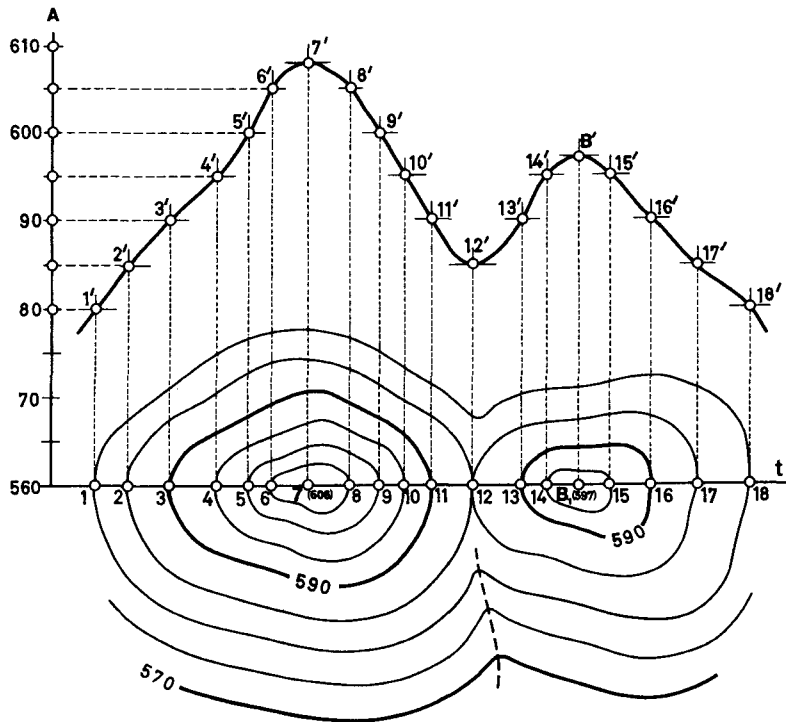


Fig. 24.11. - Trazado de un perfil.

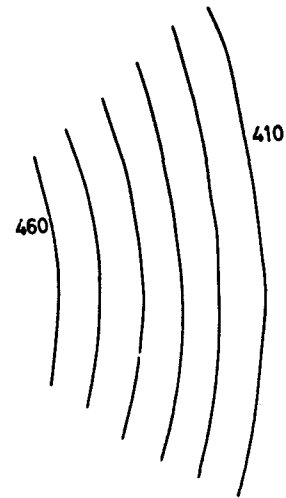


Fig. 24.12. - Vertiente o ladera.

traza t (Fig. 24.11), se abaten las intersecciones 1, 2, 3..., 18 del plano con las curvas de nivel, sobre el horizontal de cota 560, por ejemplo, llevando la altura de cada punto sobre el plano de cota 560 (a la escala del dibujo). Así se obtienen los abatimientos 1', 2', 3', ..., 18' que determinan el perfil buscado.

La unión de estos puntos puede hacerse por segmentos rectilíneos (perfil quebrado) o con una curva, trazada a sentimiento (perfil curvo) que se asemeja más a la forma real del terreno.

Los perfiles no suelen construirse directamente sobre el plano, sino en otro papel (mejor transparente), marcando en éste la traza t y los puntos 1, 2, 3, ..., 18 y procediendo luego como se ha explicado.

Para apreciar mejor las diferencias de altitud, suele ampliarse la escala de alturas. Se obtiene así, una figura deformada (perfil realzado) que puede ser útil para resaltar ciertos detalles.

Los perfiles tienen numerosas aplicaciones. En el aspecto militar, para determinar zonas vistas y ocultas, ángulos de tiro, zonas desfiladas, etc. En carreteras y autopistas, para hallar pendientes, trazados, volúmenes de tierras, etc. En movimientos de tierras, para hallar secciones, volúmenes, compensaciones, costes, etc.

24.9. Formas del terreno

Aunque las formas que presenta el terreno son variadísimas, podemos referirlas a tres tipos fundamentales que resultan útiles en la interpretación y lectura de planos. Estos son: la vertiente o ladera, la divisoria y el valle o vaguada.

a) *Vertiente o ladera* (Fig. 24.12). Es una superficie de terreno inclinada y bastante plana, representada por curvas casi rectilíneas y paralelas.

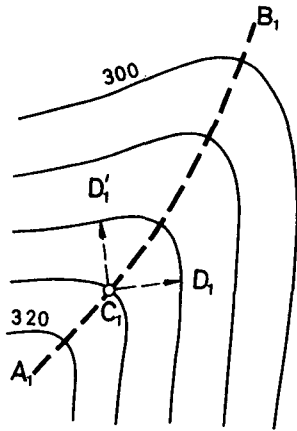


Fig. 24.13. - Divisoria.

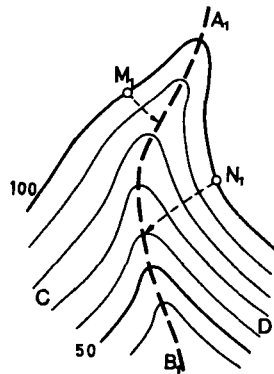


Fig. 24.14. - Valle o vaguada.

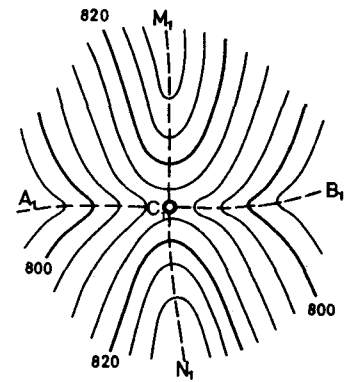


Fig. 24.15. - Collado.

b) *Divisoria* (Fig. 24.13). Es el encuentro de dos laderas, unidas por una superficie convexa representada por curvas bastante redondeadas. Se caracteriza porque las *curvas de menor cota envuelven a las de mayor cota*.

Si, desde un punto *C* de la divisoria *AB*, se trazan las líneas de máxima pendiente *CD* y *CD'* de cada ladera y se supone, teóricamente, que una gota de agua cae en *C*, parte de ella resbalaría por la primera vertiente, en dirección *CD*, y la otra parte, caería en dirección *CD'*. De aquí, el nombre de *divisoria de aguas*.

c) *Valle o vaguada* (Fig. 24.14). Está formada por dos laderas que se unen, según una superficie cóncava representada por curvas en forma de entrante, caracterizadas porque *las de mayor cota envuelven a las de menor cota*. Si los flancos son muy escarpados se

llama *garganta o cortadura*.

Si desde dos puntos *M* y *N* de cada ladera, se trazan sus líneas de máxima pendiente, seguirán una dirección casi rectilínea hasta su encuentro con la línea *AB* de vaguada luego las aguas que caigan por las vertientes *C* y *D* se unirán en la línea *AB* y descenderán luego, a lo largo de ella. Estas líneas, marcadas en el terreno, se llaman según su importancia: *vaguadas*, *torrentes*, *barrancos*, etc.

d) *Puerto o collado*. Es otra forma interesante de terreno. Está formado por dos divisorias *M* y *N*, colocadas frente a frente (Fig. 24.15), y dos vaguadas *A* y *B*, también opuestas. Su aspecto recuerda a una silla de montar.

El punto *C* del collado es el más bajo de las divisorias y el más alto de las vaguadas. (Ver núms. 25,2 a 25,6 den/E. de G.D.).

25. APLICACIONES

25.1. Recta de pendiente dada, apoyada en curvas de nivel consecutivas

Sea \overline{AB} el segmento pedido (Fig. 25.1); $p = 10\%$, la pendiente; $e = 10$ m., la equidistancia real y $1/5.000$, la escala del plano. De la fórmula de la pendiente:

$$p = \frac{e}{\overline{A_1B_1}} \quad \text{se deduce:} \quad \overline{A_1B_1} = \frac{e}{p} = \frac{10}{0,1} = 100 \text{ m}$$

y a la escala del dibujo:

$$A_1B_1 = 100 \text{ m.} \quad \langle \rangle \quad 100/5.000 = 0,02 \text{ m.} = 20 \text{ mm.}$$

Con centro en un punto A_1 de la curva de cota 50, se traza luego el arco de radio $\overline{A_1B_1} = 20$ mm. que corta a la siguiente curva, en B_1 y C_1 , siendo $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{A_1C_1}$ las rectas pedidas.

25.2. Camino de pendiente constante entre curvas de nivel

Primeramente (Fig. 25.2), se halla la longitud, a escala, de la proyección $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1C_1}$ del tramo de pendiente dada, comprendido entre dos curvas de nivel consecutivas y luego, con centro en un punto A_1 de la curva de cota 30, dada, y radio $R = \overline{A_1B_1}$, se traza un arco que corta a la siguiente curva en B_1 y C_1 . Desde B_1 y C_1 como centros, se trazan nuevos arcos de radio R que cortan a la siguiente curva en M_1 y N_1 y así se

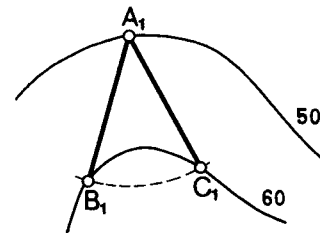


Fig. 25.1.—Coamino de pendiente dada entre dos curvas consecutivas.

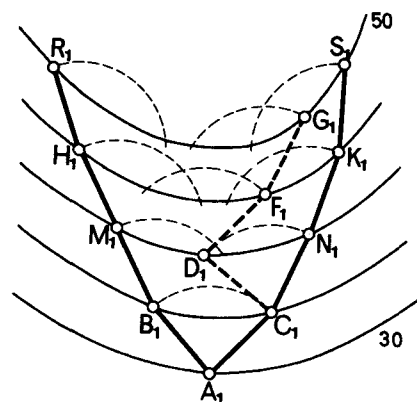


Fig. 25.2.—Camino de pendiente dada entre dos curvas.

continúa, hasta cortar a la curva de cota 50, dada.

Además de los caminos extremos $ABMHR$ y $ACNKS$, así obtenidos, existen otros intermedios, como el $ACDFG$, determinados por los arcos intermedios de la figura.

25.3. Camino de pendiente constante entre dos puntos A y B

Si el punto B, por ejemplo, no pertenece a una curva de nivel, se halla su cota 65 (núm. 24,7); se interpola esta curva (dibujada de trazos) y se hallan las longitudes m_1 y $m_1/2$ de los tramos de pendiente dada, comprendidos entre dos curvas consecutivas y entre las de cotas 60 y 65 (núm. 25,1).

Se traza luego el camino $A_1B'_1$ (núm. 25,2), tomando como radio m_1 , excepto en el último tramo, de radio $m_1/2$. Se repite de nuevo la construcción, con una pendiente menor que p y radio n_1 y se traza otro camino que corta a la curva 65, en B''_1 . Como B_1 queda más próximo a B'_1 que a B''_1 , se elige un radio intermedio más próximo a m_1 y se continúan los tanteos, hasta encontrar el radio r_1 que proporcione el camino definitivo que pase por B_1 .

25.4. Galerías rectilíneas subterráneas

El trapecio $A_1D_1C_1B_1$ (Fig. 25.4) es la planta del eje $D_1C_1 = 25$ m. del suelo de una galería horizontal, utilizada como polvorín, y de los ejes $A_1D_1 = B_1C_1 = 41$ m. de los suelos de las galerías de entrada que parten de A_1 (420) y B_1 (420), en rampa ascendente de pendiente

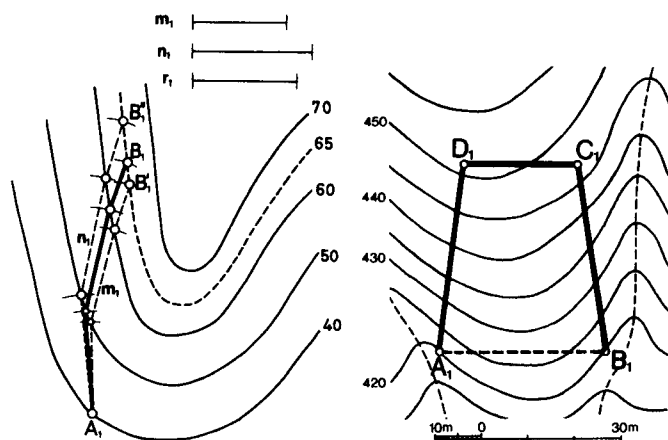


Fig. 25.3.—Camino de pendiente dada entre dos puntos A y B.

Fig. 25.4.—Galerías rectilíneas subterráneas.

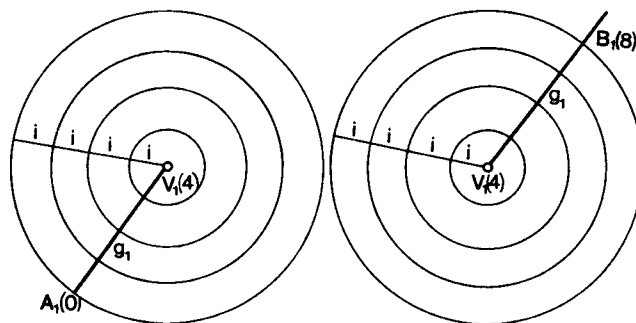
$p = 1/100$. Hallar la longitud de las galerías de acceso y la cota y profundidad del polvorín.

El desnivel d , entre D y A o C y B , en rampa del $1/100$, es:

$p = d/\overline{AD_1}$, de donde: $d = p \times \overline{AD_1} = 0,01 \times 41 = 0,41$ m.
y la cota de \overline{DC} : $420 + 0,41 = 420,41$ m. luego:

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{41^2 + 0,41^2} = 41,002 \text{ m.}$$

Se hallen luego (núm. 24,7) las cotas 447 y 451,20 m. del terreno, en C y D , respectivamente, y la profundidad $447-420,41 = 26,59$ m. de C y la $451,20-420,41 = 30,79$ m. de D .



(a) Cono de vertido o terraplén. (b) Cono de desmonte.

Fig. 25.5.—Conos de talud.

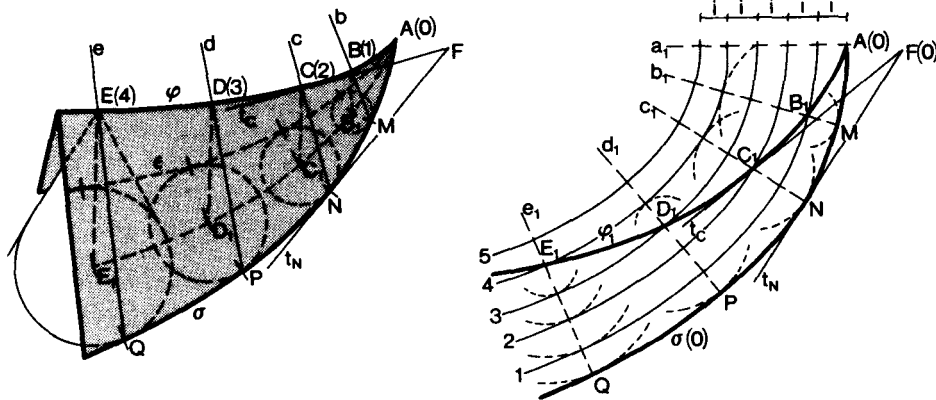
Estos datos también pueden obtenerse gráficamente, por medio de perfiles, de trazas $\overline{AD_1}$ y $\overline{B_1C_1}$.

25.5. Conos de talud (Fig. 25.5)

El lugar geométrico de las rectas de pendiente p que pasan por un punto V (Fig. a) es un cono de revolución de eje vertical, vértice V y generatriz $g \equiv VA$, de intervalo $i = 1/p$. Todo plano tangente al cono, pasa por V y es de pendiente p o lo que es lo mismo, el cono es la envolvente de los infinitos planos de pendiente p que pasan por V .

Si V es de cota entera, las curvas de nivel se proyectan, según circunferencias de centro V y radios $i, 2i, 3i, \dots$, etc. Los dos cono se llaman *conos de talud*. El inferior (Fig. a), engendrado por la semirecta VA es el *cono de vertido o terraplén* y el superior (Fig. b), engendrado por VB , el *de desmonte*. Son de frecuente uso para la determinación de taludes de terraplén y desmonte. De ahí, su nombre.

Si desde un punto situado en la vertical de V , se vierte material suelto sobre un plano sensiblemente horizontal, se forma un cono de revolución. Si se vierte más material, el cono aumenta, elevando su vértice y conservando el ángulo de inclinación de las generatrices, llamado *ángulo de talud natural o de reposo*.



(a) Talud desarrollables de borde alabeado.

(b) Talud que pasa por línea alabeada.

Fig. 25.6.—Talud definido por una línea alabeada. Método de envolventes.

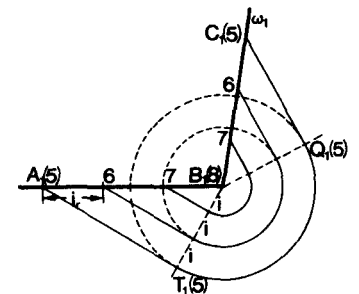


Fig. 25.7.—Talud de borde quebrado de plano inclinado

25.6. Talud de borde alabeado. Método de envolventes

Se llama *superficie de talud* o simplemente *talud*, la superficie Δ (Fig. 25.6) de igual pendiente en todos sus puntos. Si Δ ha de pasar por una línea alabeada $\varphi \equiv ACE$ (el borde de una explanación, por ejemplo) e imaginamos trazados los conos de talud de vértices coincidentes con los puntos de φ , la envolvente de los conos es la superficie de talud. En la figura, sólo se han dibujado los de vértices de cota entera y sus trazas circulares, de centros B_i, C_i, \dots y radios $i, 2i, \dots$, etc., siendo $i = 1/p$.

Si se traza la tangente t_c a φ , en $C_i(2)$ y desde su traza F , la tangente t_N , en N , a la traza circular del cono, el plano $[CFN] \equiv [t_c, t_N]$ es tangente a φ , en C , y al cono y a Δ , según la generatriz $c \equiv \overline{CN}$.

La envolvente Δ de los infinitos planos tangentes, así trazados, es una reglada desarrollable (*talud desarrollable*) de directriz φ ; cono director, el del talud, y generatrices b, c, d, \dots , etc. Se llama *superficie de igual pendiente* (núms. 15,5-c y 15,14 de n/G.D.S. y A.) y está engendrada por un plano de pendiente p que se mueve, conservándose tangente a φ . Para hallarla, se dibujan las trazas circulares de los conos, de radios $i, 2i, \dots$, etc. y centros situados en los puntos de cota entera B_i, C_i, \dots de φ . La envolvente de ellas es la traza σ de Δ .

Las proyecciones de las curvas de nivel son “paralelas” a σ (núm. 9,8-3º de n/G.D.S. y A.) y distan entre sí la longitud $i = 1/p$. Para dibujarlas, se trazan las generatrices b_i, c_i, d_i, \dots determinadas por los puntos de tangencia M, N, P, \dots de σ ; se dividen a partir de estos puntos, en partes iguales de longitud i , y se unen los puntos de división de igual cota. También pueden

dibujarse, como envolventes de las curvas de nivel de igual cota de los conos.

Los puntos de tangencia de σ , como el N , se obtienen más exactamente conociendo la traza F de la tangente t_c a φ . La tangente t_N a la traza del cono, desde F , es tangente a σ , en N , y permite dibujar σ y c_i con más exactitud. La paralelas a t_N , en los puntos de división de c_i , son tangentes a las curvas de nivel, en dichos puntos.

En la figura b, se han trazado los conos de terraplen, por debajo de φ y los de desmonte, por encima, prolongando las generatrices b_i, c_i, \dots , etc. Si se invierte la construcción, se obtiene otro talud de pendiente p y traza ε (Fig. a). El problema tendrá dos, una o ninguna solución, según que las cuerdas $\overline{AB_i}, \overline{B_iC_i}, \overline{C_iD_i}, \dots$, etc. sean mayores, iguales o menores que el módulo i (núm. 21,9).

25.7. Casos particulares

1º. *Talud de borde recto* $r \equiv \overline{AB}$ (Fig. 25.7). Las horizontales de nivel del talud plano pasan por los puntos de cota entera de r y son tangentes a los círculos de nivel de igual cota del cono de talud, de vértice $B_i(8)$ (núm. 21,9). El punto de tangencia T_i de la tangente A_iT_i , determina la recta de máxima pendiente \overline{BT} del plano.

2º. *Talud definido por la quebrada ABC de plano inclinado* (Fig. 25.7)

Desde A_i y C_i se trazan las tangentes al círculo de nivel de cota 5 del cono de vértice $B_i(8)$, siendo T_i y Q_i los puntos de tangencia. El talud se compone de la porción BTQ del cono y de los planos $[A, B, T]$ y $[C, B, Q]$ tangentes al cono, según las generatrices respectivas \overline{BT} y \overline{BQ} .

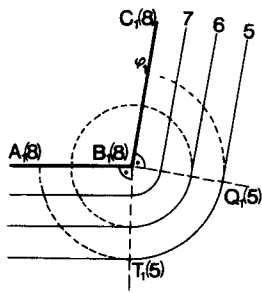
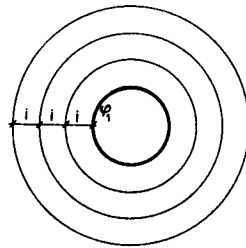
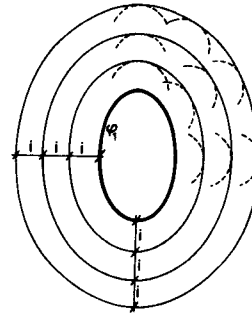


Fig. 25.8.—Talud de borde horizontal.



(a) Borde circular.



(b) Borde elíptico.

Fig. 25.9.—Taludes de borde curvo horizontal.

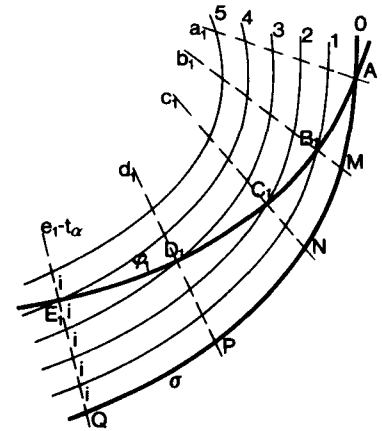


Fig. 25.10.—Talud alabeado por el método de perfiles.

3°. Talud de borde horizontal φ . Si φ es una recta horizontal AB (Fig. 25.8), el talud es un plano de horizontales de cota entera, paralelas a \overline{AB} , y distanciadas entre sí, en planta, la longitud i .

Si es una quebrada horizontal ABC , se compone de los planos tangentes al cono, según las generatrices de tangencia \overline{BT} y \overline{BQ} , y de la porción de cono BTQ .

Si el borde φ es curvo, las líneas de nivel de cota entera del talud son “paralelas” a φ , y distanciadas entre sí la longitud $i = 1/p$.

Si φ es circular (Fig. 25.9-a), el talud es una superficie cónica de revolución (cono de talud) y si es elíptica (Fig. b), la superficie de talud no es cónica y las curvas de nivel no son homotéticas, ni son elipses, como a primera vista parecen (núm. 15,14 de n/G.D.S. y A.).

25.8. Método de perfiles

Según este método, en el talud de pendiente p , definido por la curva alabeada φ (Fig. 25.10), todo plano de perfil α , de traza normal a φ , corta al talud, según una recta $e \equiv EQ$, de pendiente p . Las generatrices del talud son por tanto rectas de intervalo $i = 1/p$ que cortan a φ y se proyectan, según normales a_1, b_1, \dots a φ .

El talud Δ se determina, graduando las generatrices a_1, b_1, c_1, \dots , normales a φ , trazadas por los puntos de cota entera de φ y uniendo los puntos de división de igual cota. Así se obtiene la traza σ y las curvas de nivel de cota entera que pasan por A, B, C, \dots , etc.

La superficie Δ es, en general, una reglada alabeada (talud alabeado); sus curvas de nivel no son “paralelas” ni equidistantes entre sí, y los planos tangentes a la superficie en los distintos puntos de una generatriz, tienen distintas pendientes y forman un haz de planos de arista coincidente con dicha generatriz (núm. 19,1-3° de n/G.D.S. y A.).

25.9. Comparación de ambos métodos

El talud desarrollable, obtenido por el método de envolventes, es una reglada desarrollable que tiene igual pendiente en todos sus puntos y el talud alabeado, obtenido por el método de perfiles, es una reglada alabeada que no tiene igual pendiente en todos sus puntos, excepto en los dos casos que siguen:

a) Borde horizontal φ (Fig. 25.9). Las curvas de nivel son “paralelas” y distanciadas entre sí la longitud $i = 1/p$. La superficie coincide con el talud desarrollable.

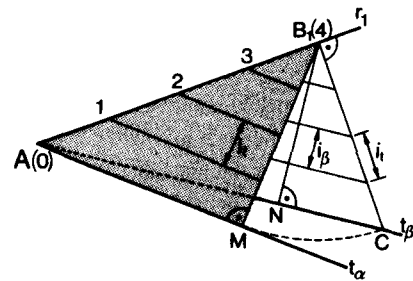


Fig. 25.11.—Comparación de taludes planos, obtenidos por los dos métodos.

b) Borde rectilíneo inclinado r (Fig. 25.11). El talud plano α del método de envolventes no coincide con el β , del método de perfiles. En efecto, si el intervalo del talud es $i_1 = 1/p$, la traza $t_\alpha \equiv AM$ es la tangente al círculo de centro B_1 y radio $4i_1$ y t_β es la recta AC , siendo $\overline{B_1C} = 4i_1$.

Como se ve en la figura, la recta de máxima pendiente $\overline{B_1M} = \overline{B_1C} = 4i_1$ de α es mayor que la de máxima pendiente $\overline{B_1N} = 4i_\beta$ de β , es decir:

$$i_\beta < i_1 \text{ y } p_\beta > p_\alpha$$

luego β es de mayor inclinación que el α . En general, los taludes alabeados son de mayor inclinación que los

desarrollables pero, en la práctica, se consideran suficientemente aproximados si los bordes son poco curvados y de pequeña pendiente, como sucede en carreteras.

A pesar de su inexactitud, el método de perfiles es el más utilizado en carreteras por ser, en definitiva, más sencillo y práctico que el de envolventes.

25.10. Vertedero de tierras (Fig. 25.12)

Sea el vertedero formado por una explanada de plano inclinado α y proyección circular φ , de centro O_p , a la que se accede por un camino recto de plano α y bordes \overline{AB} y \overline{CD} . Las pendientes de α y de los taludes son: $p_\alpha = 10\%$ y $p_t = 2/3$ y sus intervalos respectivos: $i_\alpha = 1/p_\alpha = 10$ m. e $i_t = 3/2 = 1,5$ m.

Primeramente, se han dibujado las horizontales de cota par de α (distanciadas $2i_\alpha = 20$ m.) y el perfil de plano β (plano de simetría del vertedero), siendo (\overline{MQ}) y (\overline{NP}) rectas de pendiente p_t . Como ejercicio, los taludes de la mitad inferior se han hallado por envolventes, y los restantes, por perfiles.

a) *Método de envolventes.* Las líneas de nivel se hallan (núm. 25,6 y 25,7-1º), como envolventes de líneas de nivel de igual cota de conos o hallando puntos de tangencia, como el T ; siendo $\overline{QT} = 4i_t$. Las de igual cota se cortan en puntos de la sección BI del talud plano de borde \overline{AB} , con el de borde curvo.

b) *Método de perfiles.* El talud plano se halla (núm. 25,9-b), tomando $\overline{F_1G_1} = 2 i_t$ y el alabeado, por generatrices de proyección radial, normales a φ (núm. 25,8), y ambos se cortan, según la curva plana DK . (Ver núms. 25,7 a 25,12 de n/E. de G.D.).

c) *Observación.* La normal t_p a \overline{NP} y la horizontal t_N , tangente a φ en N , son paralelas y determinan el plano $\tau \equiv [t_N, t_p]$, tangente al talud alabeado en N y al desarrollable, en todos los puntos de \overline{NP} , siendo t_p tangente a σ' , pero no a σ'' . Ambos taludes se cortan, según la generatriz \overline{NP} , pero no son tangentes a lo largo de ella, sino sólomente en N (núm. 19,9 de n/G.D.S. y A.).

25.11. Explanación horizontal

Sea la explanada de bordes rectos y circulares, de cota 60, representada en planta (Fig. 25.13). Las pendientes de taludes de desmonte y terraplen son $p_D = 5/4$ y $p_T = 5/6$, y los intervalos: $i_D = 4/5 = 0,8$ m e $i_T = 6/5 = 1,2$ m. La explanación corta al terreno, según la curva de nivel FK (línea neutra), de cota 60, que sepa

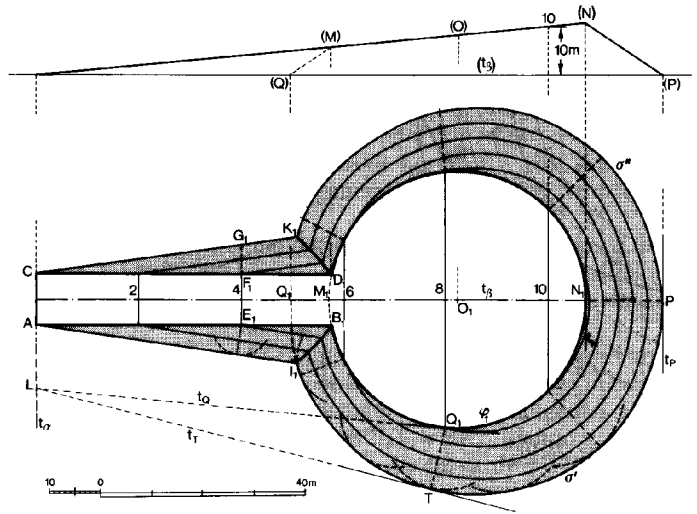


Fig. 25.12.—Vertedero de tierras.

ra la zona de terraplén $FEDCBAJK$ de la de desmonte $FGHIK$.

Taludes de terraplén. Las curvas de nivel son “paralelas” a los bordes de la explanación y distan

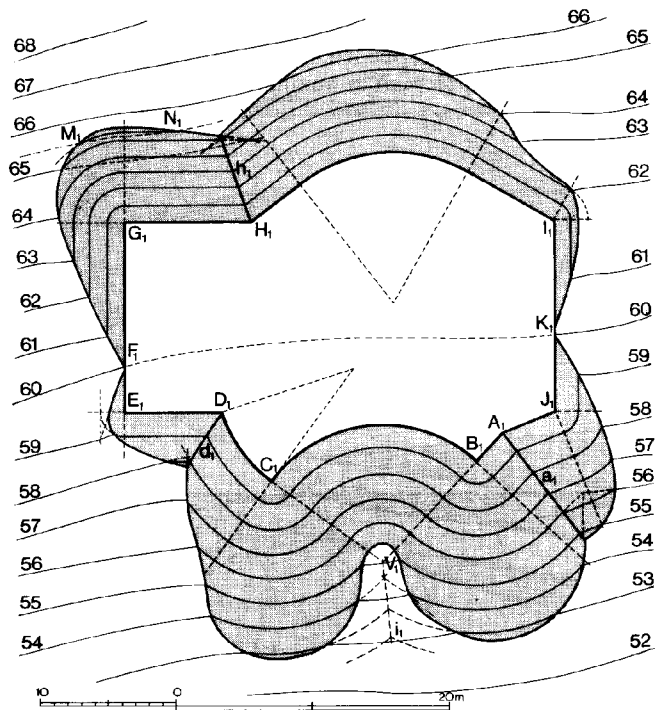


Fig. 25.13.—Explanación horizontal del terreno.

entre sí la longitud i_T . En los vértices salientes C_1 y B_1 son tangentes a las curvas de nivel de los conos de talud (núm. 25,7-3°) y en los entrantes A_1 y D_1 , se cortan en puntos que definen la intersección a , de los planos de bordes \overline{AB} y \overline{AJ} y la parábola sección d , producida por el plano de borde \overline{DE} en el cono de borde DC.

El talud cóncavo de borde BC es un cono invertido de vértice V , tangente a los conos de vértices B y C y éstos se cortan, según la hipérbola de proyección i_1 (normal a $\overline{B_1C_1}$) que pasa por V .

Taludes de desmonte. Las líneas de nivel distan entre sí la longitud i_D . Como el terreno a desmontar se

supone consistente, en los ángulos entrantes G_1 e I_1 , los taludes planos pueden hacerse tangentes al cono de desmonte (caso de la figura) o prolongarse formando un diedro (no dibujado). En los salientes H , las líneas de nivel se cortan en puntos de la intersección h .

Las trazas de los taludes con el terreno se hallan por puntos, como intersecciones de las líneas de nivel de los taludes con las de igual cota del terreno. Si aparecen puntos muy separados, pueden hallarse otros intermedios M_1 y N_1 , por interpolación de curvas (caso de la figura) o por perfiles auxiliares. (Ver núms. 25,12 a 25,18 de n/E. de G.D.).

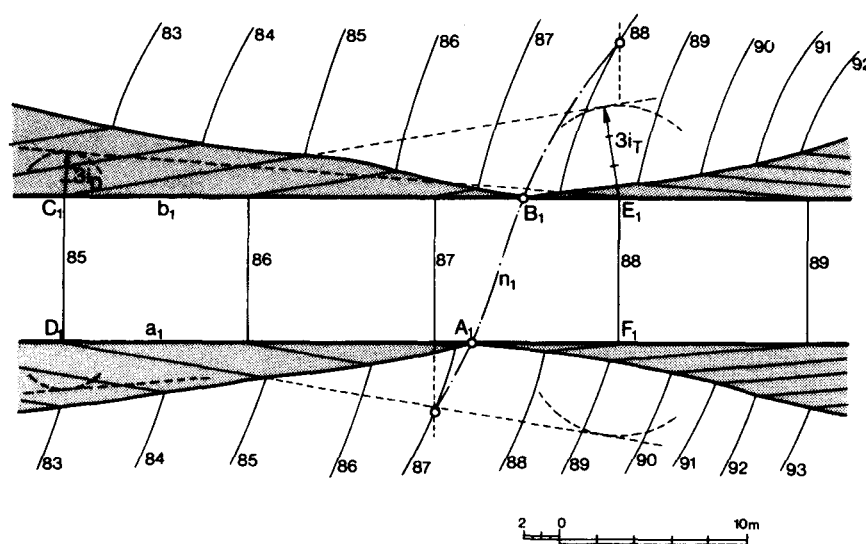


Fig. 25.14.—Taludes desarrollados de carretera.

25.12. Taludes de carreteras, por el método de envolventes (Fig. 25.14)

Las rectas a y b son los bordes del plano de la explanación de un tramo recto de carretera, determinado por las horizontales de cotas 85 a 89. Las pendientes de los taludes son $p_T = 2/3$ y $p_D = 5/4$, y sus intervalos respectivos $i_T = 3/2 = 1,5$ m. e $i_D = 4/5 = 0,8$ m.

Las horizontales 87 y 88 de la explanación cortan a las de igual cota del terreno, en puntos que determinan la traza n del plano de la explanación con el terreno (línea neutra) que separa las zonas de desmonte y

terraplén.

Las horizontales de los taludes planos del terraplén son paralelas a las tangentes trazadas desde C_1 y D_1 a los círculos de centros E_1 y F_1 y radio $3i_T$ (núm. 25,7-1°). Las de los taludes de desmonte son paralelas a las tangentes, desde E_1 y F_1 , a los círculos de centros C_1 y D_1 y radio $3i_D$.

Las intersecciones de las horizontales de taludes con las de igual cota del terreno son puntos de las trazas de los taludes con el terreno que han de pasar por A_1 y B_1 .

25.13. Taludes de carretera por el método de perfiles

La figura 25.15 representa la explanación de una carretera de pendiente constante, formada por dos tramos rectos, de bordes a, b y c, d , unidos por un tramo curvo cuyos bordes se proyectan, según círculos φ_1 y ϵ_1 , de centro O_1 . Las pendientes son $p_T = 2/3$ y $p_D = 1$, y los intervalos, $i_T = 1,5$ m. e $i_D = 1$ m.

La línea neutra (curvas m_1 y n_1) se halla como antes se ha dicho y corta a los bordes de la explanación, en los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1 de separación de taludes de desmorte y terraplén.

Las proyecciones de las generatrices de taludes coinciden con las prolongaciones de las horizontales de la explanación. Llevando sobre ellas, a partir del borde, longitudes i_D o i_T y uniendo los puntos de división de igual cota, se obtienen las horizontales de los taludes planos y las curvas de nivel de los alabeados. Las intersecciones de éstas con las curvas de nivel de igual cota del terreno son puntos de las trazas de los taludes que han de pasar por A_1, B_1, C_1 y D_1 . (Ver núms. 25,20 a 25,28 de n/E. de G.D.).

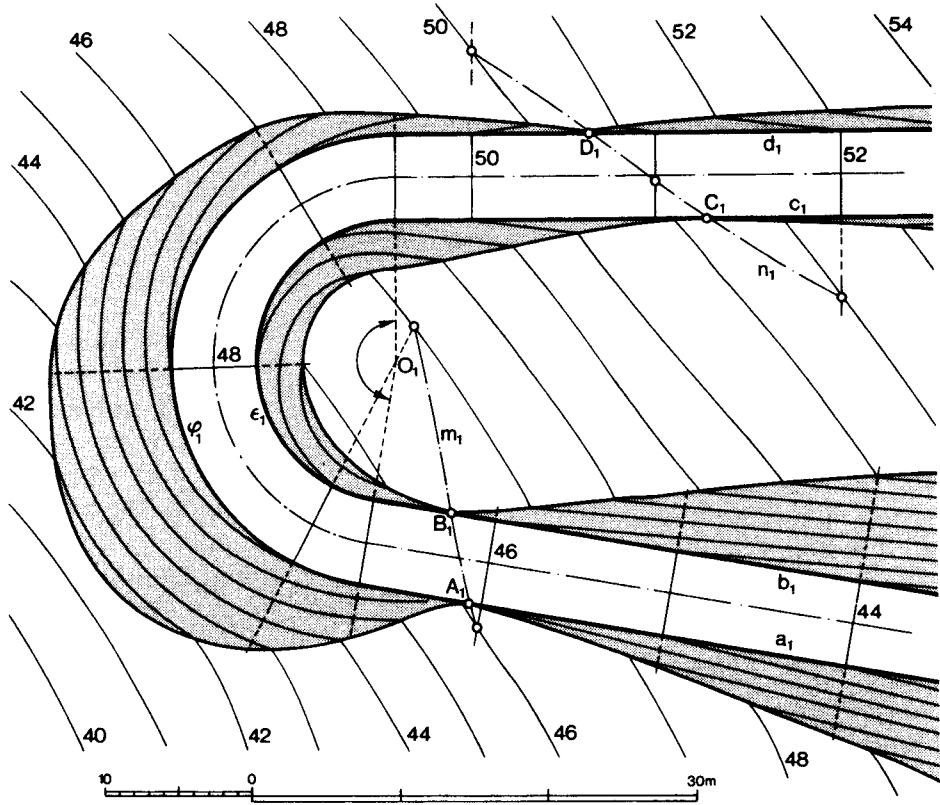


Fig. 25.15.—Taludes alabeados de carretera.

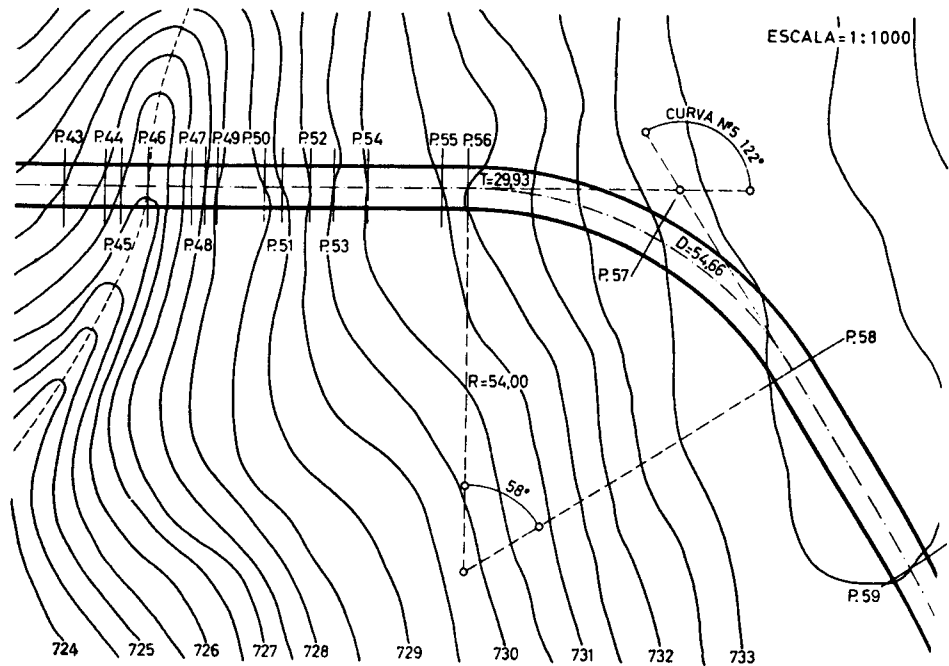


Fig. 25.16.—Planta de un tramo de carretera.

Perfil Longitudinal

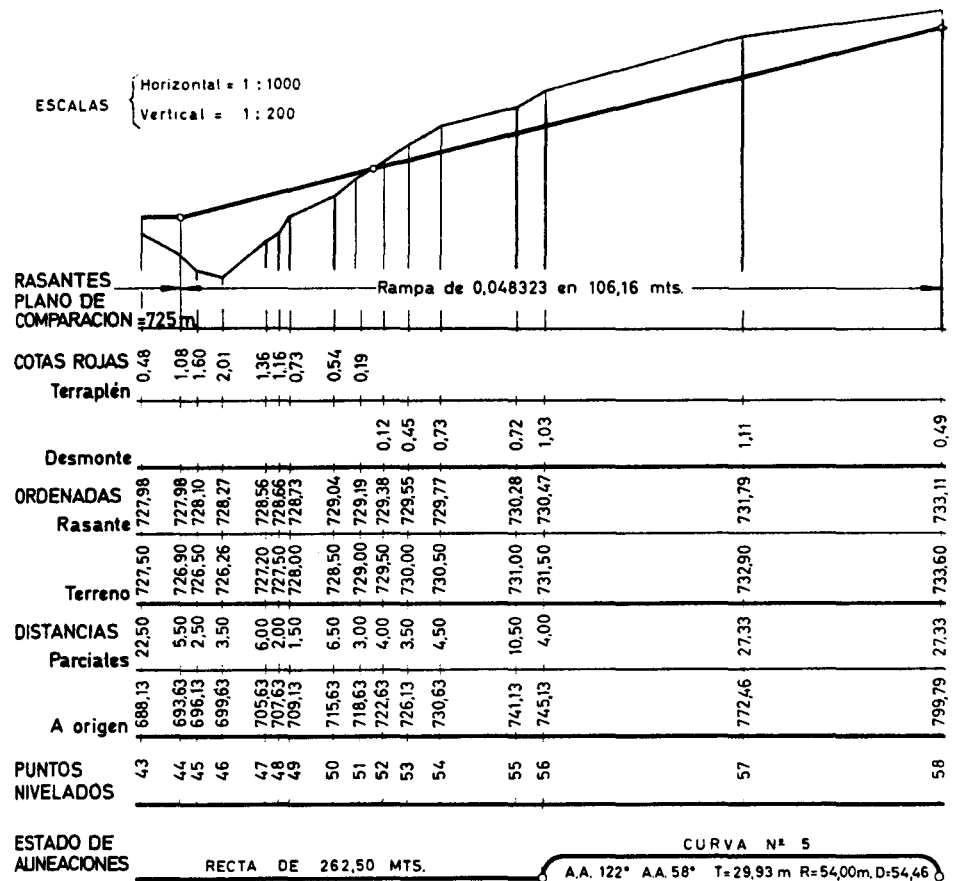


Fig. 25.17.—Datos del perfil longitudinal del tramo anterior.

25.14. Trazado práctico de carreteras

Una vez elegido el trazado definitivo de la carretera, se dibujan en el plano los tramos rectilíneos y se unen por curvas cuyo radio depende del terreno y de la importancia de la vía proyectada. La figura 25.16 es parte de un plano topográfico en el que se ha trazado la planta del eje y de los bordes de una explanación, de 6 m. de ancho, formada por un tramo recto y otro curvo de 54 m. de radio.

Primeramente, se dibujan las trazas de los perfiles transversales, normales al eje. Se numeran sucesivamente y luego se levanta el perfil longitudinal del terreno, de traza coincidente con el eje de la carretera (Fig. 25.17), tomando las alturas a escala cinco veces mayor (perfil realzado). Sobre este perfil, se dibujan luego las rasantes de la explanación y se completa, en su parte inferior, con los datos que siguen:

Estado de alineaciones. Se indica la longitud de las alineaciones rectas y en las curvas, el radio y ángulo en el centro, el ángulo de las tangentes y la longitud T de éstas, así como la D de la curva.

Puntos nivelados. Son los de los perfiles transversales.

Distancias al origen. Las medidas desde el origen a cada perfil transversal.

Distancias parciales. Las de cada perfil al anterior a él. Sumando sucesivamente estas distancias, se obtienen las distancias al origen. Ejemplos:

$688,13 + 5,50 = 693,63$, $693,63 + 250 = 696,13$, etc.

Ordenadas del terreno. Son las cotas del perfil longitudinal.

Ordenadas de la rasante. Se miden directamente sobre el dibujo, después de trazar la rasante.

Cotas rojas. Son la diferencia entre las cotas del terreno y de la rasante. Si es positiva, hay que desmontar (cota de desmote) y si es negativa, terraplenar (cota de terraplén).

Plano de comparación. El tomado como referencia, de cota inferior a la más baja del perfil.

Rasantes. Se indica la longitud de los tramos horizontales y en los inclinados, la pendiente y la longitud de su proyección.

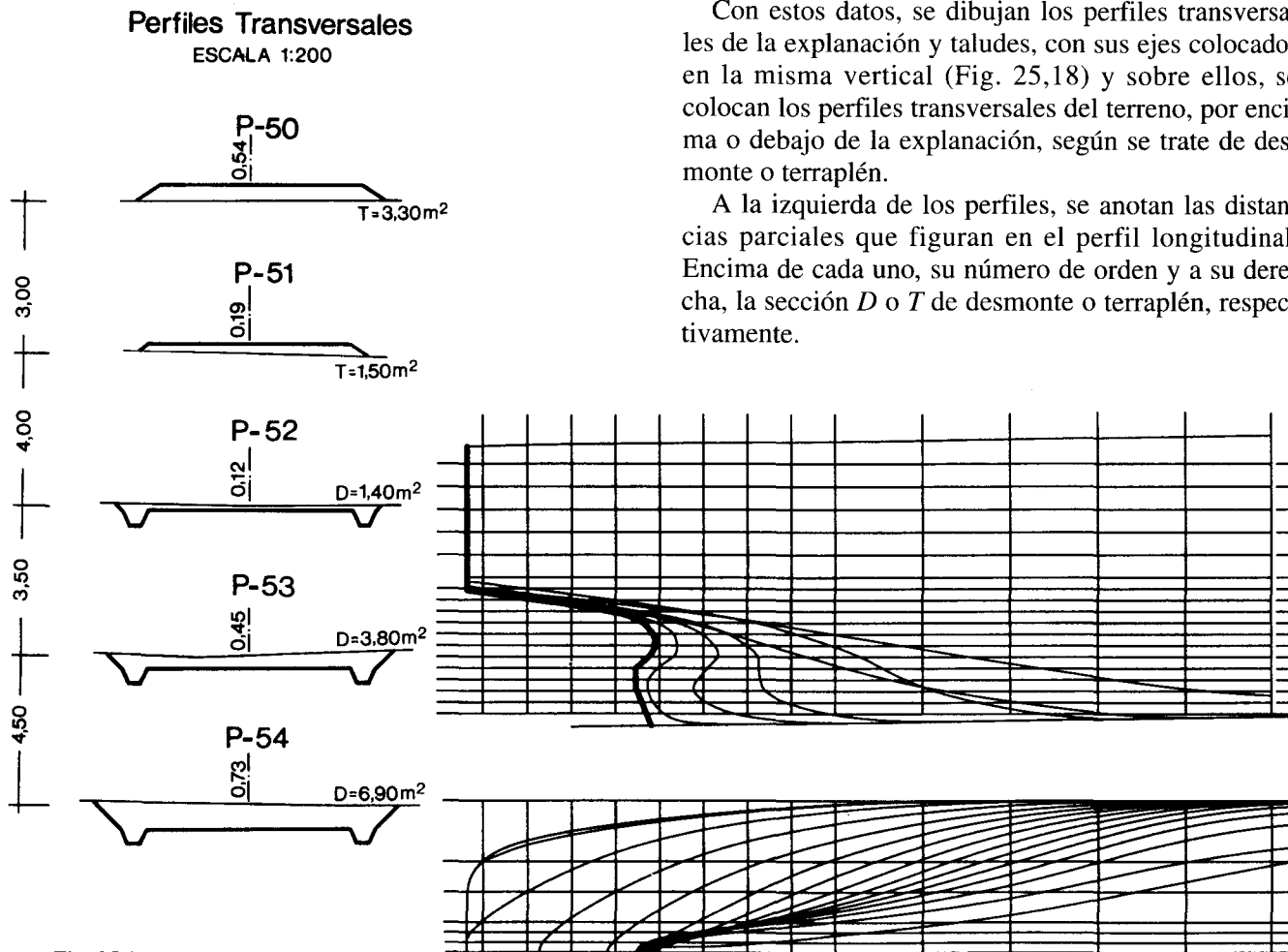


Fig. 25.18. — Perfiles transversales del tramo anterior.

Con estos datos, se dibujan los perfiles transversales de la explanación y taludes, con sus ejes colocados en la misma vertical (Fig. 25,18) y sobre ellos, se colocan los perfiles transversales del terreno, por encima o debajo de la explanación, según se trate de desmonte o terraplén.

A la izquierda de los perfiles, se anotan las distancias parciales que figuran en el perfil longitudinal. Encima de cada uno, su número de orden y a su derecha, la sección D o T de desmonte o terraplén, respectivamente.

(a) Popa.

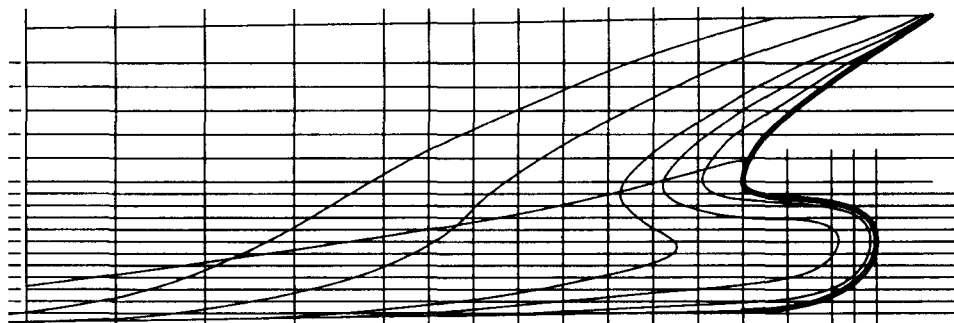
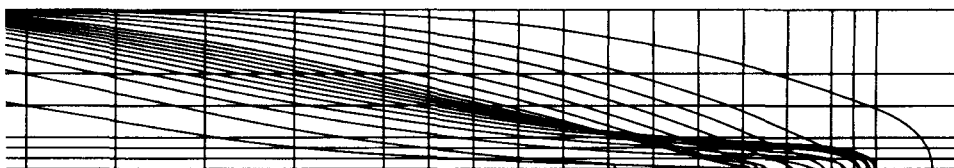
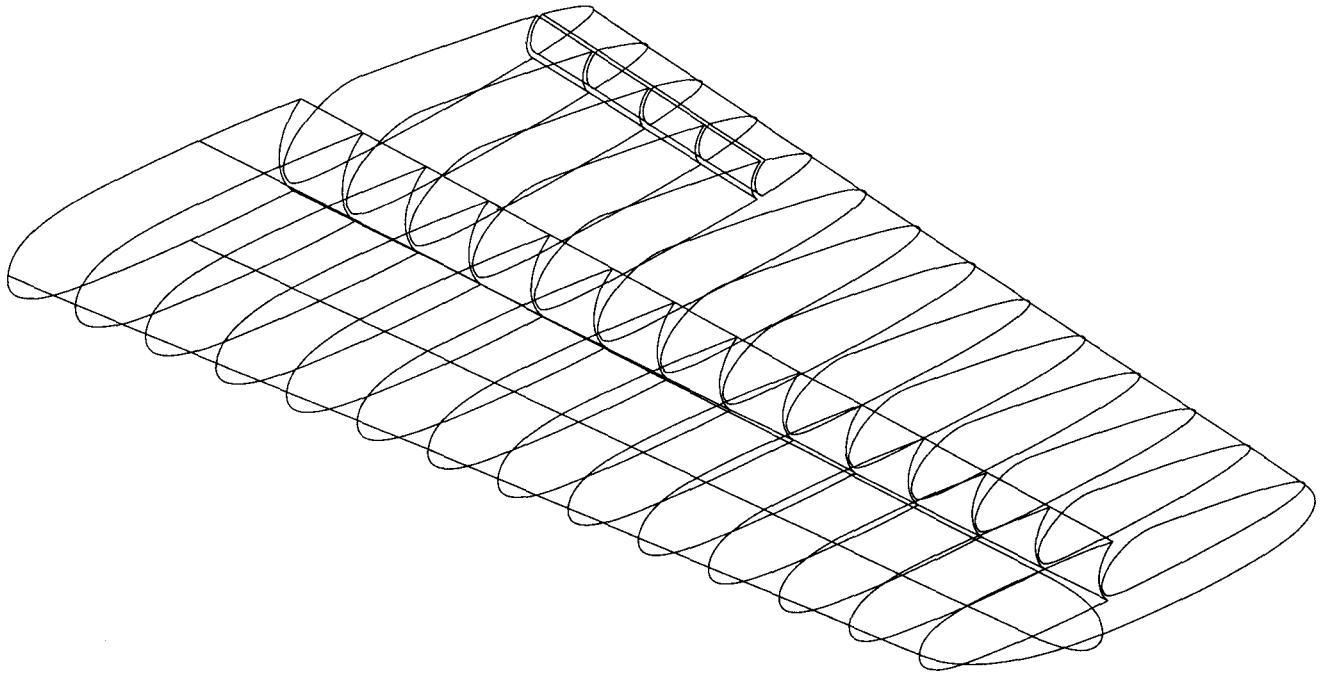


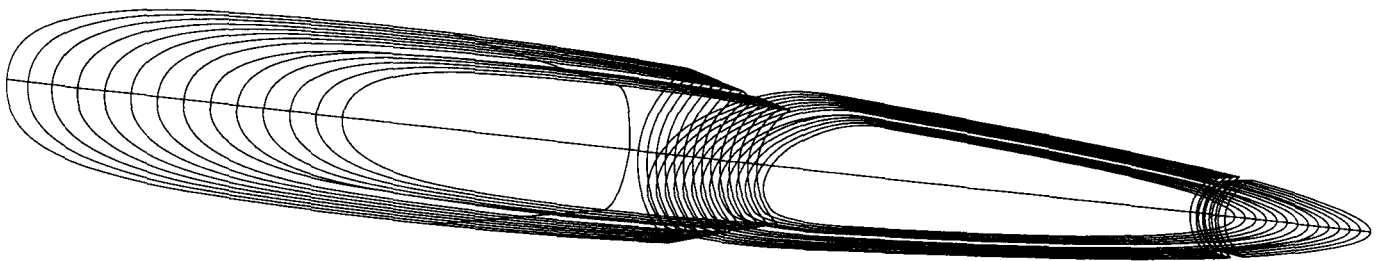
Fig. 25.19. — Cuadernas y líneas de agua de una embarcación (Por gentileza de D. José M. Riola Ingeniero Superior del canal de Experiencias Hidrodinámicas de El Pardo - Madrid).



(b) Proa.



(a) Perspectiva.



(b) Plano de forma.

Fig. 25.20.—Ala de avión.

Los perfiles transversales son necesarios para calcular volúmenes de terraplenes y desmontes y realizar posibles compensaciones de tierras.

25.15. Otras aplicaciones

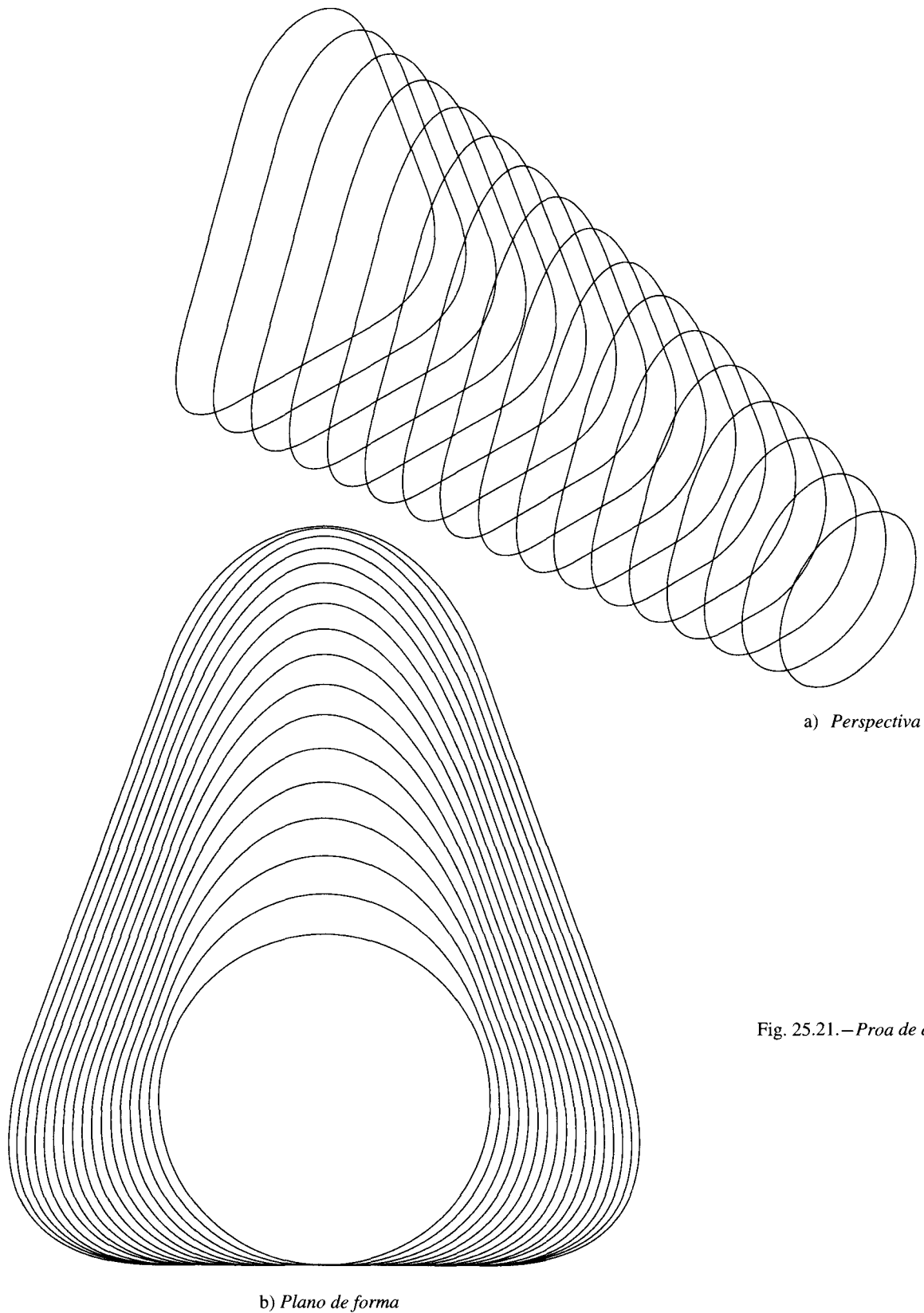
Las superficies curvas que aparecen en la fabricación y diseño de máquinas y prototipos industriales también se representan, cortándolos por haces de planos paralelos. Las secciones (*curvas de nivel*), así obtenidas, determinan los llamados *planos de forma* de la superficie que permiten construirla, estudiarla o

modificarla.

En la construcción naval, por ejemplo, la superficie del casco de las embarcaciones (Fig. 25.19) se representa por dos o tres clases de secciones de planos paralelos: las de plano vertical (*cuadernas*), las de plano normal a las cuadernas y las de plano horizontal (*líneas de agua o de flotación*).

A veces se utilizan planos de corte horizontal, con el barco girado un cierto ángulo alrededor del eje longitudinal (*secciones de escoramiento*) o planos secantes que pasan por una arista dada.

La figura 25.20 representa el ala exterior de un avión con alerón y compensador y la figura 25.21, la



a) *Perspectiva*

Fig. 25.21. – *Proa de avión.*

proa de un avión donde se ve la adaptación de una sección casi triangular a otra circular (por gentileza de

D. Manuel Prieto Alberca. Catedrático de la E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos).

III. SISTEMA AXONOMÉTRICO

A. AXONOMETRÍA ORTOGONAL

26. PUNTO, RECTA Y PLANO

26.1. Generalidades

En los sistemas de proyección ya estudiados, diédrico y acotado, puede determinarse con precisión cualquier elemento de un cuerpo o figura del espacio. De aquí su nombre de *sistemas de medida* pero a pesar de sus grandes ventajas, no permiten apreciar al primer golpe de vista, las formas, contornos y detalles de la figura representada.

Para salvar este inconveniente, se utilizan los sistemas *representativos* que vamos a estudiar, el axonométrico y el cónico.

Las imágenes de figuras obtenidas en el sistema cónico se llamaban *perspectivas* pero el uso cada vez más frecuente de las imágenes axonométricas ha hecho que, hoy en día, se aplique este nombre indistintamente en ambos sistemas.

En el axonométrico, se utiliza el llamado sistema de *ejes coordenados rectangulares* (Fig. 26.1), formado por tres rectas X , Y , Z (ejes coordenados), perpendiculares entre sí, dos a dos, y coincidentes con las direcciones principales del espacio, siendo cada uno de ellos perpendicular al plano definido por los otros dos (plano coordenado). El plano $[XY]$ se supone colocado en posición horizontal y el eje Z , vertical.

Si un punto A del espacio se proyecta ortogonalmente sobre los planos coordenados, en A_1 , A_2 , y A_3 , las proyectantes $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$ y $\overline{AA_3}$ definen un paralelepípedo rectángulo de aristas coincidentes con los ejes

coordenados, siendo A el vértice opuesto al punto O (origen de coordenadas).

Las longitudes $\overline{OM} = x$, $\overline{ON} = y$ y $\overline{OP} = z$ se llaman *coordenadas* de A y determinan la posición de A en el

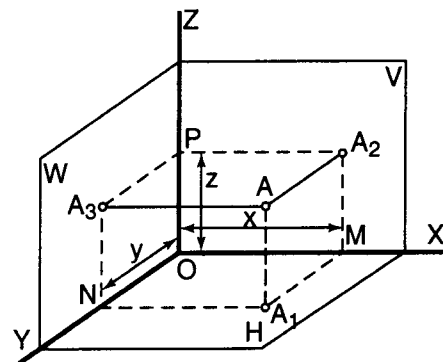


Fig. 26.1.—Ejes coordenados rectangulares.

espacio. En efecto, conocidas las coordenadas x , y , z de A , se puede construir el rectángulo OMA_1N , de lados x e y , y por A_1 , trazar el segmento $\overline{A_1A} = z$ paralelo a Z , siendo A el punto buscado.

Las proyecciones A_1 , A_2 y A_3 se llaman *proyección horizontal*, *vertical primera* y *vertical segunda*, respectivamente.

26.2. Sistemas axonométricos

a) La representación de un punto A , en el sistema axonométrico ortogonal, consiste en referir A (Fig. 26.1) a un sistema de ejes coordenados rectangulares X, Y y Z , por medio de sus proyecciones A_1, A_2 y A_3 y luego, proyectarlo todo sobre un plano de proyección o cuadro π (plano del dibujo). El sistema axonométrico, así obtenido, se llama *ortogonal u oblicuo*, según que la dirección de proyección sea normal u oblicua respecto al cuadro. En la axonometría ortogonal se verifica (Fig. 26.2):

Las proyecciones X', Y' y Z' de los ejes coordenados son los *ejes axonométricos* o ejes de referencia del sistema y su centro O' , la proyección de O .

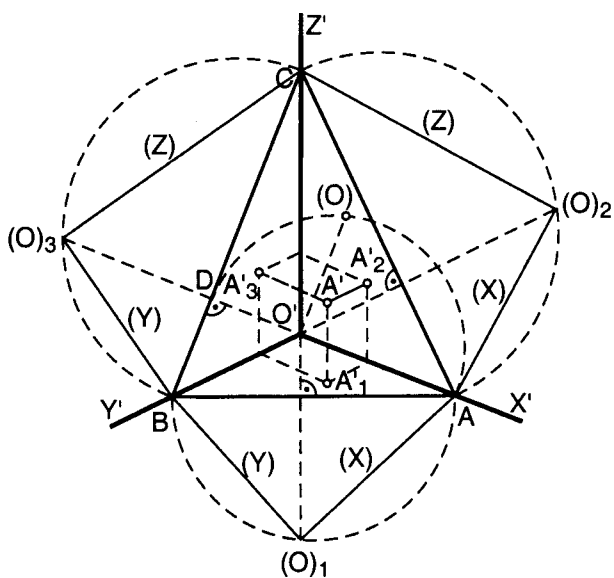


Fig. 26.2.—Representación axonométrica ortogonal.

Cada punto A del espacio tiene en el dibujo cuatro proyecciones: la proyección A' de A , llamada proyección *directa, natural* o *perspectiva* de A y las A'_1, A'_2 y A'_3 (*proyecciones axonométricas*), llamadas *proyección horizontal, vertical primera* o *vertical segunda*, respectivamente.

Por ser las proyectantes $\overline{AA_1}, \overline{AA_2}$ y $\overline{AA_3}$ paralelas a los ejes Z, Y y X , sus proyecciones $A'A_1, A'A_2$ y $A'A_3$ también lo son.

b) Las intersecciones A, B y C de los ejes con el cuadro π determinan el llamado *triángulo fundamental o de las trazas*, por ser $\overline{AB}, \overline{BC}$ y \overline{CA} las trazas de π con los planos coordenados. Como Z es perpendicular al plano $[XY]$, su proyección Z' es perpendicular a

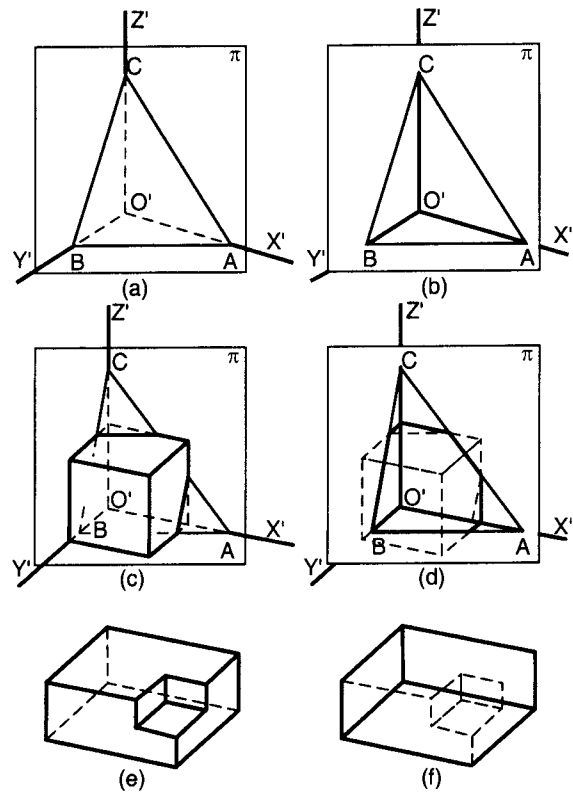


Fig. 26.3.—Sistemas de ejes de centros situados detrás y delante del cuadro.

su traza AB con el cuadro (núm. 5,4-b). Análogamente, X' e Y' son normales a $[YZ]$ y a $[XZ]$, luego, X', Y' y Z' son las alturas del triángulo de las trazas ABC y O' , su ortocentro.

c) Por ser X, Y y Z normales entre sí, el origen O es la intersección de las esferas de diámetros $\overline{AB}, \overline{BC}$ y \overline{CA} y éstas se cortan, como ya se sabe, en dos puntos simétricos respecto a π , de proyección O' , distanciados de π la longitud $\overline{O'O}$ (obtenida por abatimiento del triángulo rectángulo AOD), siendo (O) la intersección de la normal $O'(O)$ a X' con la semicircunferencia de diámetro \overline{AD} .

Si elegimos el origen O situado detrás del cuadro (Fig. 26.3-a), que es el caso más general, es vista la parte superior del plano horizontal $[XY]$ (proyección desde arriba) y si se elige el situado delante de π (Fig. b), es vista la parte inferior de $[XY]$ (proyección desde abajo).

Como se ve, ambos triedros coordenados son simétricos respecto a π y de proyecciones coincidentes y lo mismo sucede con los paralelepípedos rectángulos, simétricos respecto a π (Figs. c y d), de aristas coincidentes con los ejes o paralelas a ellos (Figs. e y f). En ambos casos, las caras y aristas vistas en uno son ocultas en el otro y a la inversa.

d) Si el cuadro o el triedro coordenado se trasladan paralelamente a sí mismos, en dirección normal a π , las proyecciones no varían. Los nuevos triángulos de las trazas serán homotéticos, respecto a O' , y se reducirán al punto O' , si el cuadro pasa por O .

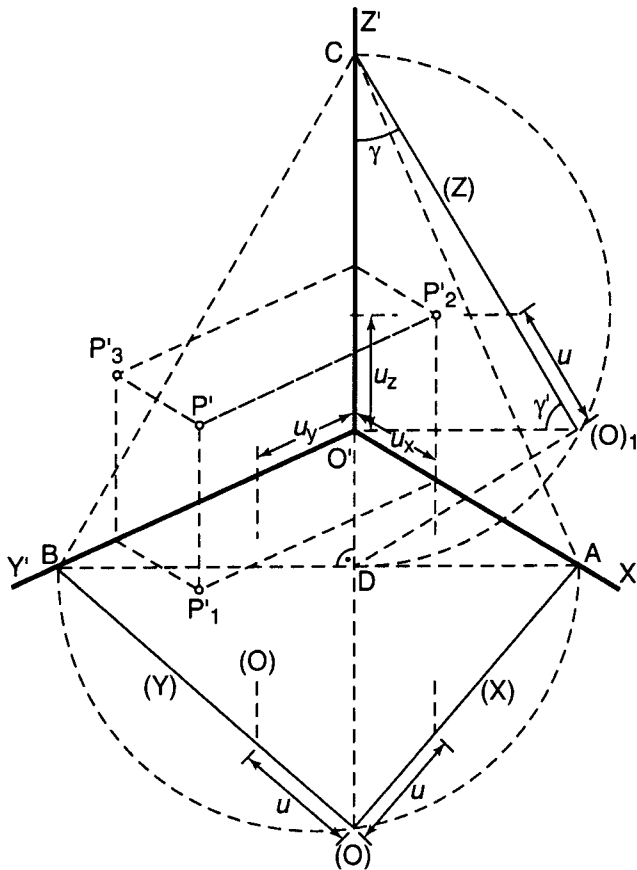


Fig. 26.4.—Escala axonométrica, coeficientes de reducción e inclinación de los ejes.

e) Finalmente, el abatimiento de O sobre el cuadro, alrededor de \overline{AB} (Fig. 26.2), es la intersección (O) , de la normal $O'(O)$, a \overline{AB} con la semicircunferencia de diámetro \overline{AB} , y determina los abatimientos (X) e (Y) de X e Y . Los abatimientos de los planos $[XZ]$ e $[YZ]$ se obtienen de forma análoga.

26.3. Coeficientes de reducción, escalas e inclinación de los ejes

a) Dado el sistema de ejes X', Y' y Z' (Fig. 26.4), abata-

mos el centro O , alrededor de \overline{AB} , en (O) , como ya se sabe, y tomemos sobre los ejes abatidos (X) e (Y) , a partir de (O) , la longitud unidad u . Al desabatir, se obtienen las unidades u_x y u_y , correspondientes a x e y , o *escalas axonométricas de X e Y*. Análogamente, abatiendo el triángulo rectángulo COD , en $C(O)$, D , se obtiene la *escala axonométrica u_z de Z*, la inclinación γ de Z respecto al cuadro y la distancia $(\overline{O})_1 O'$ de O al cuadro.

La imagen de un punto P , de coordenadas $x = 1$, $y = 2,5$ y $z = 1,5$, se obtiene, llevando sobre X', Y' y Z' las longitudes u_x , $2,5 u_y$ y $1,5 u_z$ que determinan la *perspectiva o imagen axonométrica P'* y las *imágenes axonométricas secundarias P'_1, P'_2 y P'_3* , también llamadas *proyecciones horizontal, vertical primera y vertical segunda*, o *planta, alzado y perfil*, respectivamente.

Los cocientes $c_x = u_x/u$, $c_y = u_y/u$ y $c_z = u_z/u$ se llaman *coeficientes de reducción de los ejes* y son iguales a los cosenos de los ángulos (inclinaciones) α , β y γ que cada eje forma con el cuadro.

b) En axonometría ortogonal, la suma de los cuadrados de los coeficientes de reducción es igual a 2, es decir: $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = \widehat{2}$.

En efecto, en el triángulo rectángulo $C(O)_1 D$, se verifica, siendo $\gamma' = C(O)_1 O'$:

$$c_z^2 = u_z^2/u^2 = \cos^2 \gamma = \text{sen}^2 \gamma' = 1 - \cos^2 \gamma'$$

y análogamente:

$$c_x^2 = u_x^2/u^2 = \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha' = 1 - \cos^2 \alpha'$$

$$c_y^2 = u_y^2/u^2 = \cos^2 \beta = \text{sen}^2 \beta' = 1 - \cos^2 \beta'$$

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 3 - (\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma') = 3 - 1 = 2 \quad [1]$$

$$\text{o sea: } u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2u^2 \quad [2]$$

puesto que, como se sabe por trigonometría, la suma de los cuadrados de los cosenos que una recta OO' forma con tres ejes coordenados rectangulares es igual a la unidad.

c) Los sistemas axonométricos ortogonales se clasifican en *isométrico, dimétrico o trimétrico*, según que tengan iguales las tres escalas axonométricas ($u_x = u_y = u_z$), sólo dos ($u_x = u_z$) o ninguna o dicho de otro modo, según que las inclinaciones de los ejes con el cuadro sean las tres iguales ($\alpha = \beta = \gamma$) o sólo dos ($\alpha = \gamma$) o ninguna.

En la figura 26.5, se indican las unidades axonométricas, los coeficientes de reducción, los ángulos entre ejes y la perspectiva de un cubo de arista unidad u , en cada sistema. El de escalas $u_x : u_y : u_z = 1 : 1/2 : 1$ es el dimétrico recomendado por la norma UNE 1 - 031 - 75 B y por la DIN-5 (sistema dimétrico normalizado).

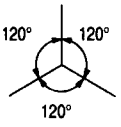
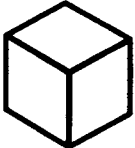
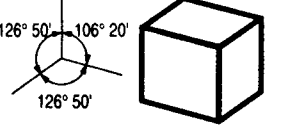
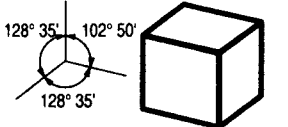
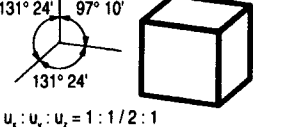
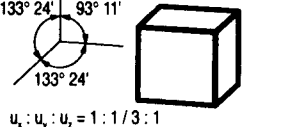
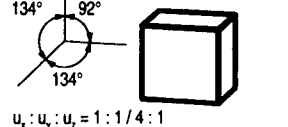
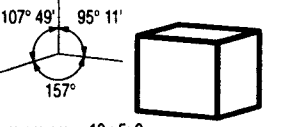
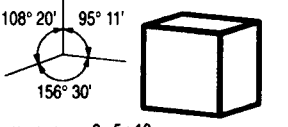
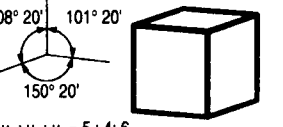
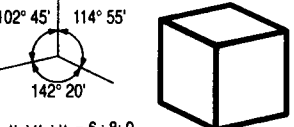
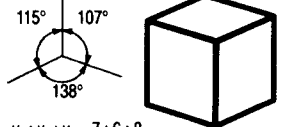
<p>ISOMETRICO</p>	 <p>120° 120° 120°</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 1 : 1 : 1$ $c_x = c_y = c_z = 0,816$</p>	
<p>DIMETRICO</p>	 <p>$126^\circ 50'$ $106^\circ 20'$ $126^\circ 50'$</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 1 : 3/4 : 1$ $c_x = 0,88$ $c_y = 0,66$ $c_z = 0,88$</p>	 <p>$128^\circ 35'$ $102^\circ 50'$ $128^\circ 35'$</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 1 : 2/3 : 1$ $c_x = 0,90$ $c_y = 0,60$ $c_z = 0,90$</p>
 <p>$131^\circ 24'$ $97^\circ 10'$ $131^\circ 24'$</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 1 : 1/2 : 1$ $c_x = 0,94$ $c_y = 0,47$ $c_z = 0,94$</p>	 <p>$133^\circ 24'$ $93^\circ 11'$ $133^\circ 24'$</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 1 : 1/3 : 1$ $c_x = 0,97$ $c_y = 0,32$ $c_z = 0,97$</p>	 <p>134° 92° 134°</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 1 : 1/4 : 1$ $c_x = 0,98$ $c_y = 0,25$ $c_z = 0,98$</p>
<p>TRIMETRICO</p>	 <p>$107^\circ 49'$ $95^\circ 11'$ 157°</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 10 : 5 : 9$ $c_x = 0,98$ $c_y = 0,49$ $c_z = 0,88$</p>	 <p>$108^\circ 20'$ $95^\circ 11'$ $156^\circ 30'$</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 9 : 5 : 10$ $c_x = 0,89$ $c_y = 0,49$ $c_z = 0,98$</p>
 <p>$108^\circ 20'$ $101^\circ 20'$ $150^\circ 20'$</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 5 : 4 : 6$ $c_x = 0,81$ $c_y = 0,64$ $c_z = 0,97$</p>	 <p>$102^\circ 45'$ $114^\circ 55'$ $142^\circ 20'$</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 6 : 8 : 9$ $c_x = 0,63$ $c_y = 0,84$ $c_z = 0,95$</p>	 <p>115° 107° 138°</p> <p>$u_x : u_y : u_z = 7 : 6 : 8$ $c_x = 0,81$ $c_y = 0,70$ $c_z = 0,92$</p>

Fig. 26.5.—Sistemas isométrico, dimétrico y trimétrico.

26.4. Determinación de ejes, coeficientes, ángulos y escalas

1º. Se conocen los ejes axonométricos X' , Y' y Z' (Fig. 26.6). Primeramente se traza, por un punto A de X' , las perpendiculares a Z' e Y' que cortan a Y' y Z' en B y C y determinan el triángulo ABC de las trazas. Luego, como se ha explicado en el número anterior, se abaten los triángulos OAB y COH, en $(O)_1AB$ y $C(O)_1H$, y sobre los ejes abatidos se lleva la escala unidad u.

Al desabitar, se obtienen: las escalas axonométricas u_x , u_y y u_z , la distancia $\overline{O'(\overline{O})}$ del centro O al cuadro y la inclinación γ de Z respecto al cuadro. Los ángulos α y β se obtienen, abatiendo O alrededor de \overline{AF} y \overline{BG} , respectivamente. Los coeficientes de reducción son:

$$c_x = \cos \alpha = u_x/u; c_y = \cos \beta = u_y/u \text{ y } c_z = \cos \gamma = u_z/u$$

2º. Se conocen las escalas axonométricas u_x , u_y y u_z . El triángulo órtico del ABC (Fig. 26.6), determinado por los pies F, G y H de las alturas, goza de las siguientes propiedades (teorema de Schömlmilch o Weisbach):

- Los ejes axonométricos X' , Y' y Z' son bisectrices del triángulo órtico y se cortan, por tanto, en el incentro O' de éste.
- Los lados y el semiperímetro p del triángulo órtico son proporcionales a los cuadrados de las escalas axonométricas y de la natural, es decir:

$$\frac{\overline{GH}}{u_x^2} = \frac{\overline{HF}}{u_y^2} = \frac{\overline{FG}}{u_z^2} = \frac{p}{u^2} \text{ o } \frac{\overline{GH}}{c_x^2} = \frac{\overline{HF}}{c_y^2} = \frac{\overline{FG}}{c_z^2} \quad [3]$$

Para que exista triángulo, el cuadrado de la unidad axonométrica mayor debe ser menor que la suma de los cuadrados de las otras dos. Estas propiedades permiten hallar los ejes axonométricos, como sigue:

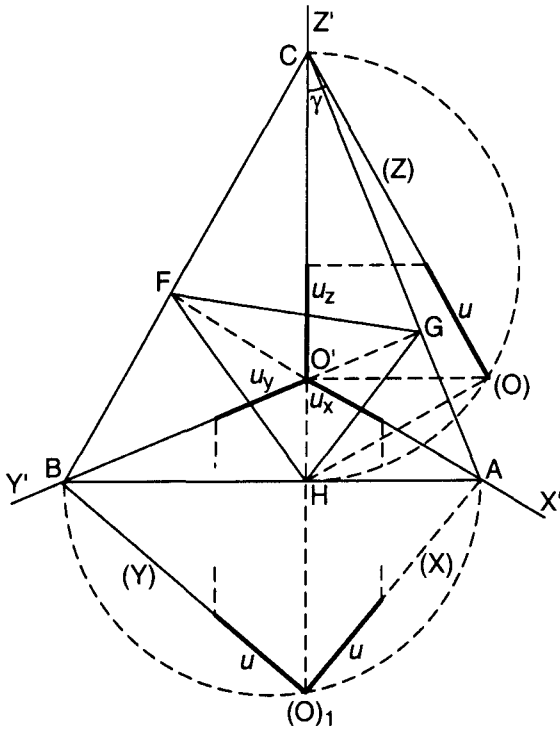


Fig. 26.6.—Determinación de escalas e inclinaciones de ejes, conociendo X', Y' y Z'.

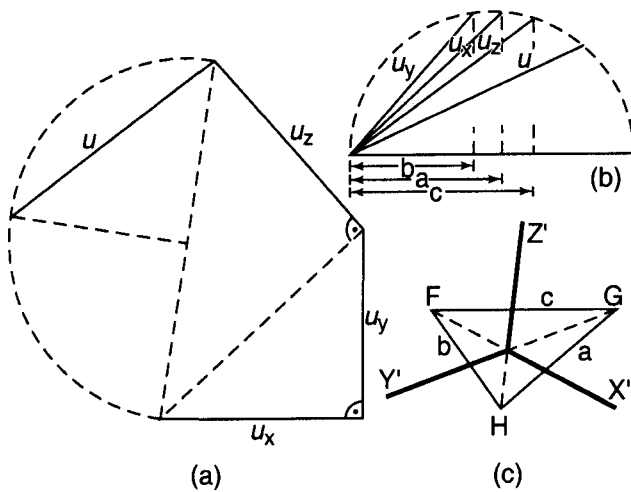


Fig. 26.7.—Determinación de los ejes, conociendo las escalas axonómicas u_x , u_y y u_z .

a) La igualdad [2] del núm. 26,3 permite hallar la unidad natural u por la construcción gráfica de la figura 26.7-a.

b) Si los segmentos u_x , u_y y u_z dados (u otros de longitudes proporcionales a ellos) se inscriben en una semicircunferencia de diámetro mayor que u , como indica la figura b, sus proyecciones sobre el diámetro verifican la igualdad [3], por ser:

$$a/u_x^2 = b/u_y^2 = c/u_z^2$$

Podemos pues construir el triángulo órtico (Fig. c), de lados $\overline{GH} = a$, $\overline{HF} = b$ y $\overline{FG} = c$ y sus bisectrices son los ejes axonómicos buscados.

Más práctico resulta construir sobre una horizontal MN (Fig. 26.8) el triángulo órtico de lados $\overline{MN} = c$, $\overline{NO'} = a$ y $\overline{MO'} = b$. Con centro en N y M se trazan arcos de radio $\overline{NO'}$ y $\overline{MO'}$ que cortan a NM en A y B . Las rectas $O'A$ y $O'B$ son los ejes X' e Y' , respectivamente y la normal a NM , trazada por O' , el eje vertical Z' (núm. 1.799 de la "Geometría" de S. Marmol y P. Beato).

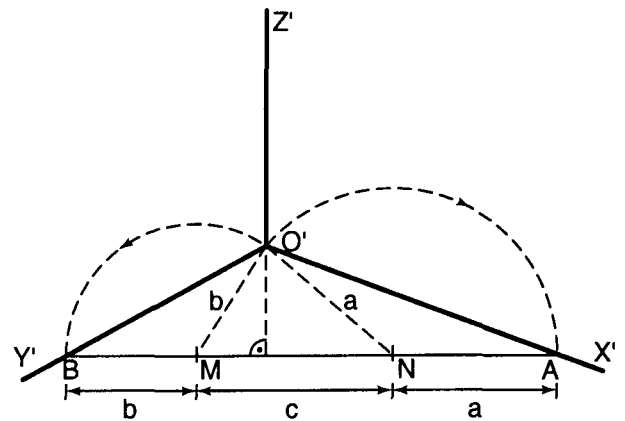


Fig. 26.8.—Método práctico de determinación de los ejes.

3º. Método numérico. Si las escalas axonómicas u_x , u_y y u_z , dadas, fueran iguales o proporcionales a 5, 4 y 6, por ejemplo, se verifica:

$$\frac{u_x}{5} = \frac{u_y}{4} = \frac{u_z}{6} \quad \text{o sea} \quad \frac{u_x}{u_z} = \frac{5}{6}$$

$$\text{y} \quad \frac{u_y}{u_z} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{y dividiendo por } u:$$

$$\frac{c_x}{c_z} = \frac{5}{6} \quad \text{y} \quad \frac{c_y}{c_z} = \frac{2}{3} \quad \text{de donde}$$

$$c_x = \frac{5c_z}{6} \quad \text{y} \quad c_y = \frac{2c_z}{3}$$

y sustituyendo en la igualdad [1] del núm. 26,3-b:

$$\frac{25c_z^2}{36} + \frac{4c_z^2}{9} + c_z^2 = 2, \text{ de donde:}$$

$$c_z = \sqrt{\frac{72}{77}} \approx 0,97 \quad c_x = \frac{5c_z}{6} \approx 0,81 \quad \text{y} \quad c_y = \frac{2c_z}{3} \approx 0,64$$

Para que haya solución debe ser: $u_z^2 < u_x^2 + u_y^2$, como así sucede, por ser $6^2 < 5^2 + 4^2$.

En general, conviene elegir escalas axonómicas proporcionales a números sencillos y que den imágenes poco deformadas, como puede comprobarse en el cuadro de la figura 26.5. (Ver núms. 27,1 a 27,5 de n/E. de G.D.).

26.5. Representación del punto

En este sistema, los planos coordenados se consideran opacos y los ejes, coincidentes con las direcciones principales del cuerpo a representar. Los planos verticales [XZ] e [YZ] (Fig. 26.9) dividen al espacio en cuatro diedros, numerados del 1 al 4, en sentido con-

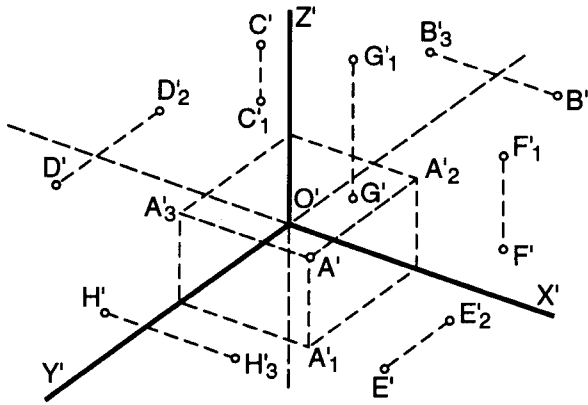


Fig. 26.9.—Representación del punto.

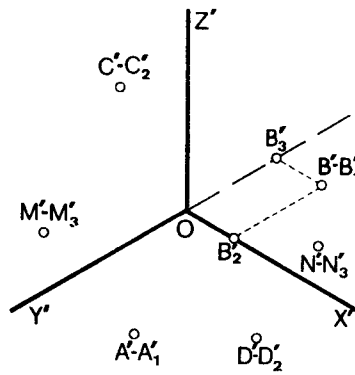


Fig. 26.10.—Puntos de los planos de proyección.

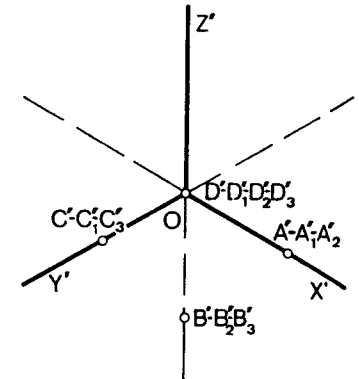


Fig. 26.11.—Puntos incidentes con el centro y ejes.

El punto queda definido por dos de sus proyecciones A' y A_1' , por ejemplo; las restantes se hallan fácilmente por paralelas a los ejes (paralelepípedo de referencia). En general, se representa por su perspectiva o proyección directa A' y una de las axonométricas A_1' , A_2' o A_3' (planta, alzado o perfil).

En la figura, los puntos, B, C y D están en los triedros (cuadrantes) 2, 3 y 4 superiores, y los E, F, G y H , en los 1, 2, 3 y 4 inferiores.

En la figura 26.10, los puntos A y B están en el plano horizontal; los C y D , en el primer vertical, y los M y N , en el segundo vertical. En la figura 26.11, los puntos A, B y C pertenecen a los ejes X, Z e Y y el OD , coincide con el origen O .

26.6. Representación de la recta

Las proyecciones de una recta r (Fig. 26.12) son las rectas que unen las proyecciones homónimas de dos puntos M y N de ella. La $r' \equiv M'N'$ es la perspectiva axonométrica o proyección natural o directa de r y las $r_1' \equiv M_1'N_1'$, $r_2' \equiv M_2'N_2'$ y $r_3' \equiv M_3'N_3'$, las proyecciones horizontal, vertical 1ª y vertical 2ª de r , respectivamente (planta, alzado y perfil).

trario a las agujas del reloj. Estos diedros quedan divididos en ocho triedros por el plano horizontal [XY] y se designan con el número del diedro y la palabra superior o inferior, según que esté encima o debajo del del horizontal. El observador se supone colocado en el primer triedro superior, de aristas OX, OY y OZ luego éste es visto y los restantes, ocultos.

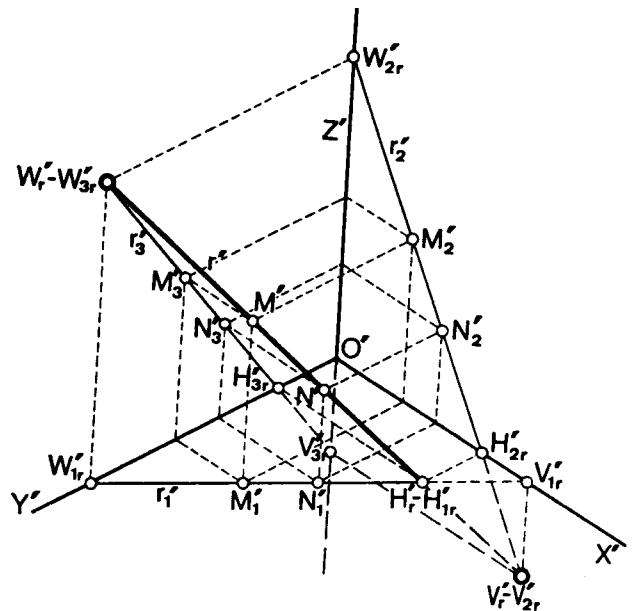


Fig. 26.12.—Proyecciones de la recta.

Si un punto M' pertenece a una recta r' , sus proyecciones M_1', M_2' y M_3' pertenecen a r_1', r_2' y r_3' , respectivamente.

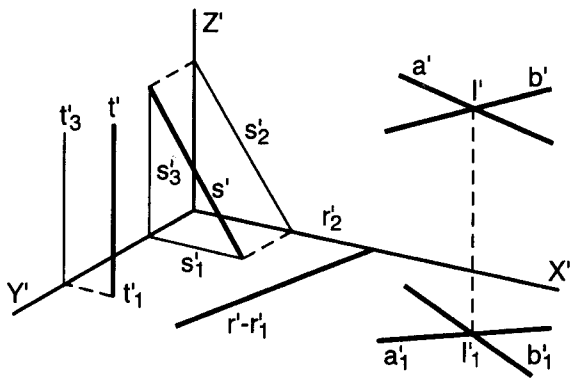


Fig. 26.13. - Proyecciones de rectas.

Las trazas H'_r , V'_r y W'_r de r con los planos coordenados, denominadas *traza horizontal*, *vertical 1ª* y *vertical 2ª* de r , respectivamente, se proyectan, por pertenecer a los planos oordenados, en las intersecciones

26.7. Rectas que se cortan

Si dos rectas a y b se cortan (Fig. 26.13), su intersección I se proyecta en las intersecciones de sus proyecciones homónimas, es decir:

$$I' \equiv [a', b'] \quad \text{e} \quad I'_1 \equiv [a'_1, b'_1].$$

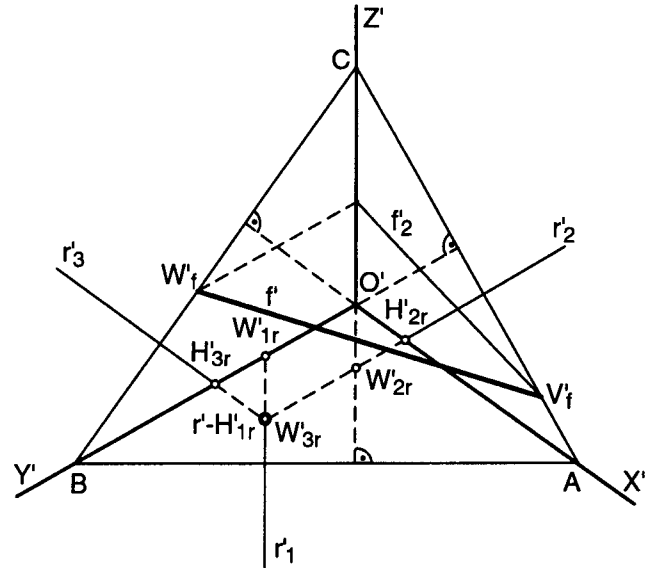


Fig. 26.15. - Recta normal a π o paralela a él.

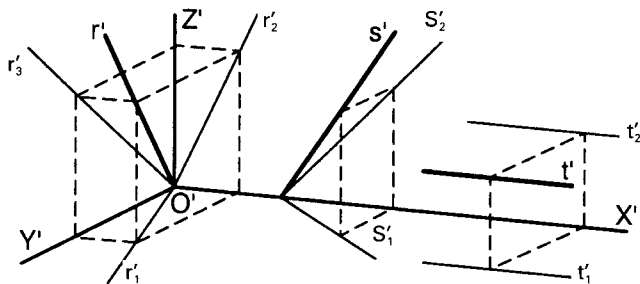


Fig. 26.14. - Recta que pasa por O' , corta a X' o es paralela a él.

de r' con sus proyecciones, es decir: $H'_r \equiv [r', r'_1]$, $V'_r \equiv [r', r'_2]$ y $W'_r \equiv [r', r'_3]$. Las trazas se designan por su proyección directa solamente, puesto que las otras coinciden con ella o están sobre los ejes axonométricos.

Si se conocen las proyecciones r' y r'_1 , por ejemplo, éstas se cortan en H'_r . Por otra parte, las intersecciones de r'_1 con X' e Y' , referidas a r' por paralelas a Z' , son las trazas V'_r y W'_r , respectivamente, que determinan las proyecciones $r'_2 \equiv V'_r H'_r$ y $r'_3 \equiv W'_r H'_r$.

La parte vista de r , situada en el primer triedro superior, queda determinada por sus trazas vistas H'_r y W'_r .

26.8. Posiciones de la recta

a) En la figura 26.13, la recta $t'-t'_1$ es normal al plano $[XY]$; la $s'-s'_1$ es paralela al $[XZ]$ y la $r'-r'_1$ pertenece al $[XY]$.

En la figura 26.14, la recta $r'-r'_1$ pasa por el origen O' ; la $s'-s'_1$ corta al eje X' , y la $t'-t'_1$, es paralela a él.

b) Si f' es proyectante (normal al cuadro π), r' se reduce a un punto (Fig. 26.15) y las proyecciones axonométricas r'_1 , r'_2 y r'_3 son paralelas a Z' , Y' y X' , respectivamente, como puede verse uniendo las proyecciones homónimas de H'_r y W'_r , coincidentes con r' . La única traza vista H'_r determina la proyección vista r'_1 de r , a partir de r' y en sentido contrario a $O'Z'$. Las proyecciones r'_2 y r'_3 son vistas, a partir de H'_r y H'_r , respectivamente.

c) Si $f' \equiv V'_r W'_r$ pertenece al cuadro, o es paralela a él (recta frontal), las perpendiculares desde W'_r y V'_r , a X' e Y' , concurren en un punto C de Z' , por ser lados BC y AC del triángulo de las trazas ABC del plano paralelo al cuadro que contiene a f .

La paralela al plano XY se llama *horizontal*, y la paralela al eje Z , *vertical*.

26.9. Representación del plano

a) Todo plano α (Fig. 26.16) corta al triedro $O'X'Y'Z'$, según tres rectas (trazas) h'_α , v'_α y w'_α (horizontal, vertical 1ª y vertical 2ª), concurrentes dos a dos

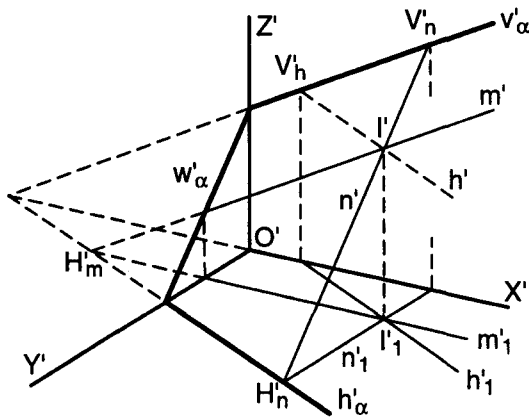


Fig. 26.16.—Representación del plano.

en puntos de cada eje (o en sus prolongaciones), que forman el llamado *triángulo de las trazas de α* . El plano queda definido por dos de sus trazas.

Las trazas se designan con la letra del plano coordenado, en minúscula, y la del plano secante α , como subíndice, y quedan definidas por su proyección directa, por pertenecer a los planos coordenados.

Toda recta de un plano tiene sus trazas incidentes con las del plano y reciprocamente. Si el plano viene dado por dos rectas m y n que se cortan, sus trazas son las rectas que unen las trazas homónimas de la recta, es decir, $h'_\alpha \equiv H'_n H'_m$ y $v'_\alpha \equiv V'_n V'_m$.

Para hallar un punto de α , se traza una recta $m'-m'_i$ de a y se toma en ella un punto $I'-I'_i$. Recíprocamente, para trazar un plano que pase por un punto $I'-I'_i$, se traza una recta $m'-m'_i$ que pase por I y luego, un plano α que pase por m .

b) *Rectas notables del plano.* Son las paralelas a los planos coordenados, es decir, la horizontal h , de proyecciones h' y h''_1 paralelas a h'_α , y las paralelas m y n al 1º y 2º vertical, de proyecciones m' , m''_2 y n' , n''_3 paralelas a v'_α y w'_α , respectivamente. Las otras proyecciones (no dibujadas) son paralelas a los ejes.

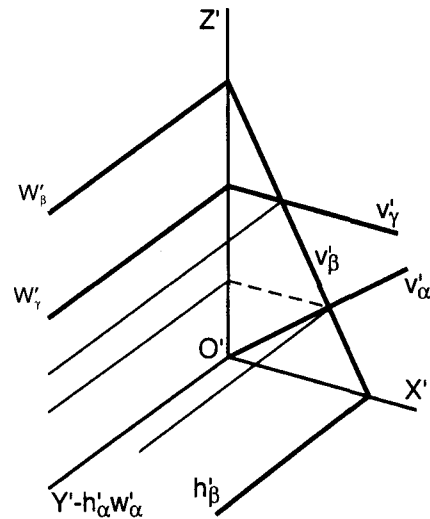


Fig. 26.17.—Planos incidentes o paralelos con uno o dos ejes.

26.10. Posiciones del plano

En la figura 26.17, el plano α pasa por eje Y ; el plano β es paralelo a Y' y el plano γ es horizontal (paralelo al $[XY]$).

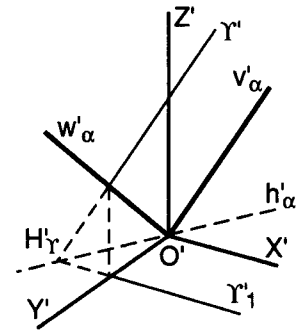


Fig. 26.18.—Plano que pasa por el origen.

En la figura 26.18, el plano α pasa por el origen O , y sus trazas concurren en O' . Si se conocen v'_α y w'_α por ejemplo, la traza h'_α queda definida por la traza H'_i de la recta $r'-r'_i$ de α , paralela al primer vertical.

En la figura 26.19, el plano α paralelo al cuadro (plano de frente o frontal) y sus trazas h'_α , v'_α y w'_α son normales a Z' , Y' y X' , respectivamente. Las horizontales de α tienen su proyección directa y horizontal normales a Z' , sucediendo análogamente con las paralelas al 1º o 2º vertical. El plano β , de trazas coincidentes, es proyectante, es decir, normal al cuadro.

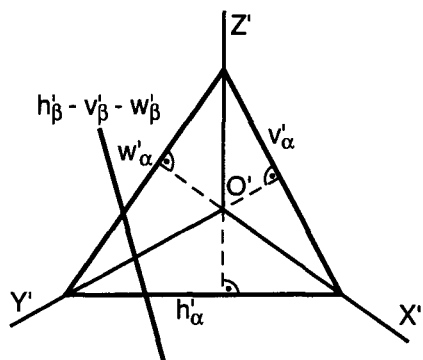


Fig. 26.19.—Plano paralelo o normal al cuadro.

26.11. Paralelismo de rectas y planos

Como ya se dijo, el paralelismo es un invariante de la proyección cilíndrica, luego se verificará:

a) Si dos rectas r y s son paralelas (Fig. 26.20), sus proyecciones homónimas son paralelas y recíprocamente.

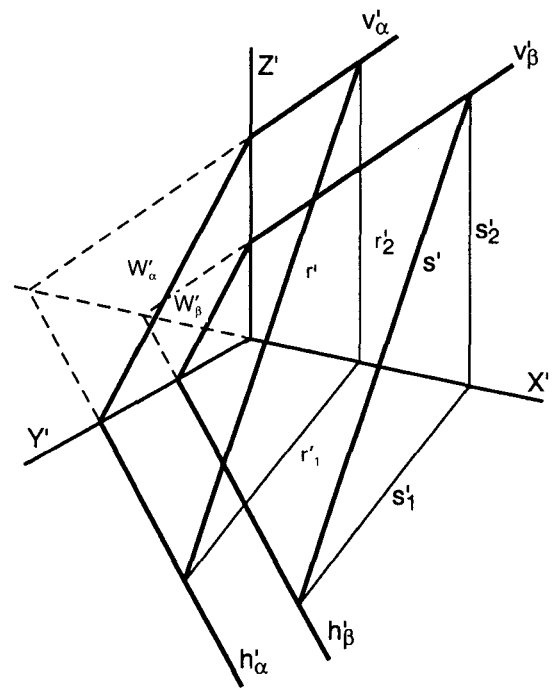


Fig. 26.20.—Rectas y planos paralelos.

b) Si dos planos α y β son paralelos, sus trazas homónimas son paralelas y recíprocamente.

27. INTERSECCIONES, ABATIMIENTOS Y PERPENDICULARIDAD. FORMAS PLANAS

27.1. Intersección de planos

a) Lo mismo que en diédrica (Fig. 27.1), las trazas de la recta de intersección $i'-i''$ de dos planos α y β son las intersecciones $W_i' \equiv [w_\alpha' w_\beta']$ y $V_i' \equiv [v_\alpha' v_\beta']$ de las trazas de α y β . La otra traza H_i' coincide con la intersección de h_α' y h_β' .

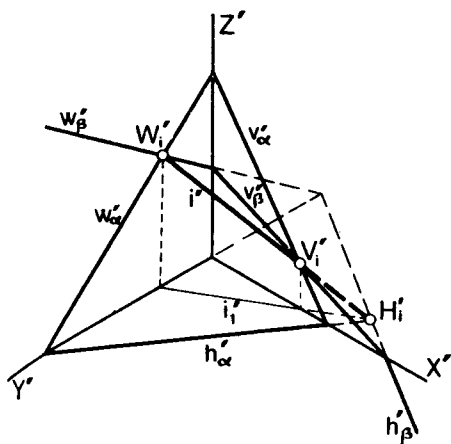


Fig. 27.1.—Intersección de planos.

b) Si las trazas de α y β se cortan fuera del dibujo o concurren en un punto O' (Fig. 27.2), se traza un plano auxiliar γ (paralelo a uno de los coordenados) que corta a α y β , según las rectas t' y r' . El punto de corte N' de r' y t' determina la intersección $i' \equiv O'N'$ de α y β .

con el cuadro $\pi \equiv ABC$, y se designa con la notación π_α o t_α .

b) Si el cuadro pasa por O' (Fig. a), la traza t_α se halla por medio del plano horizontal $[XY]$ que corta al α , según h_α' y al cuadro, según la paralela r' a \overline{AB} , trazada por O' . La intersección de r' y h_α' es un punto P' de la traza ordinaria. Haciendo lo mismo con el 1^{er} vertical, se obtiene el punto $Q' \equiv [v_\alpha' s']$ que determina la traza $t_\alpha \equiv P'Q'$ que es oculta y paralela a $M'N'$.

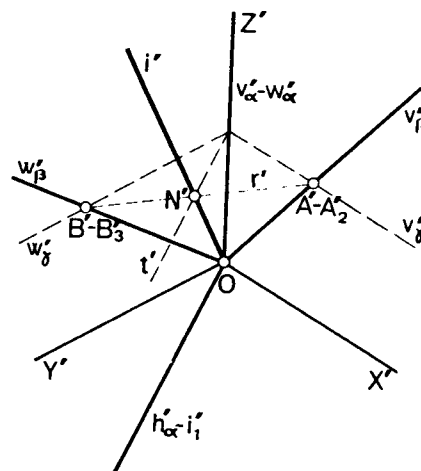


Fig. 27.2.—Caso particular.

27.2. Traza ordinaria de un plano (Fig. 27.3)

a) Es la intersección $\pi_\alpha \equiv M'N'$ del plano α , dado,

Si α pasa por O' (Fig. b), se traza un plano $[A,B,C]$ paralelo al cuadro que corta al α , según la recta $M'N'$. La paralela a $M'N'$, trazada por O' , es la traza t_α buscada.

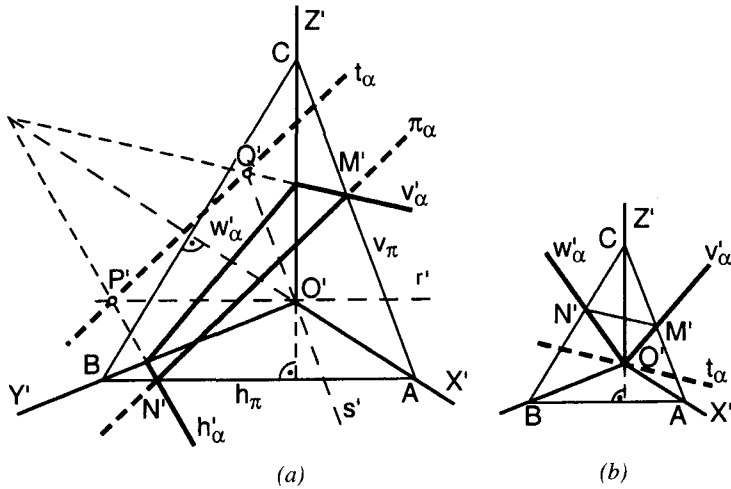


Fig. 27.3. —Trazas ordinarias de un plano.

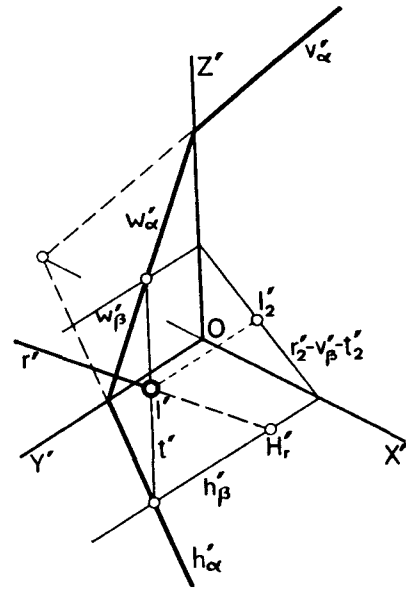


Fig. 27.4. —Intersección de recta y plano.

27.3. Intersección de recta y plano

Se halla (Fig. 27.4), haciendo pasar por la recta dada $r'-r''$ un plano auxiliar β (en este caso, el proyectante de r sobre el 1^{er} vertical) que corta al plano dado

α , según la recta t' . El punto de corte I' de r' y t' es la intersección de r y α .

ABATIMIENTOS

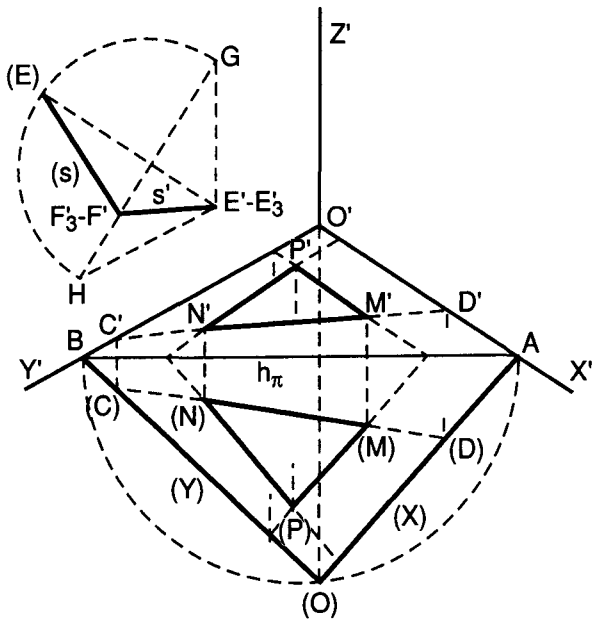


Fig. 27.5. —Abatimiento del plano horizontal.

27.4. Abatimientos de planos coordenados

a) Para abatir el plano horizontal, por ejemplo,

sobre el cuadro o sobre otro paralelo a él (Fig. 27.5), se toma como charnela la traza horizontal $AB \equiv h_\pi$ de éste (normal a Z'). El abatimiento de O' es (núm. 26,2-e) la intersección (O) de la normal $O'(O)$ a AB con la semicircunferencia de diámetro \overline{AB} y determina los abatimientos (X) $\equiv (O)A$ e (Y) $\equiv (O)B$ de X e Y .

La proyección directa y el abatimiento se corresponden en una afinidad ortogonal de eje AB y par de puntos homólogos O' y (O) (núms.2,2 y 2,4-b), siendo X' , (X) e Y' , (Y), rectas homólogas. En esta afinidad, el abatimiento de una recta que corta a los ejes en C' y D' es su homóloga (C)(D); el de los puntos M' y N' son sus homólogos (M) y (N) y el del triángulo $P'M'N'$, el (P)(M)(N).

b) El abatimiento de un punto aislado $E'-E'_3$ del 2^o vertical, por ejemplo, también se obtiene trazando por E' paralelas a Y' y Z' que cortan a la charnela HG (normal a X'), en H y G . El abatimiento de E' es la intersección de la perpendicular $E'(E)$ a HG con la semicircunferencia de diámetro \overline{HG} . Esto permite obtener el abatimiento $\overline{F'}(\overline{E})$ del segmento $\overline{F'E'}$, por ejemplo, tomando como charnela la normal HG a X' , trazada por F' .

c) Este método sirve para abatir segmentos o planos paralelos a los coordenados, como puede verse en el abatimiento del segmento $a' \equiv A'B'$, paralelo al 2º vertical (Fig. 27.6-a), o en el del plano α (Fig. b), paralelo al primer vertical.

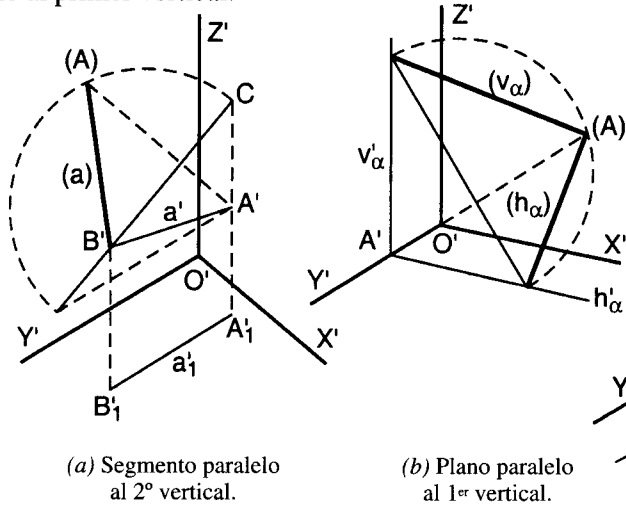


Fig. 27.6. — Abatimiento de planos paralelos a los coordenados.

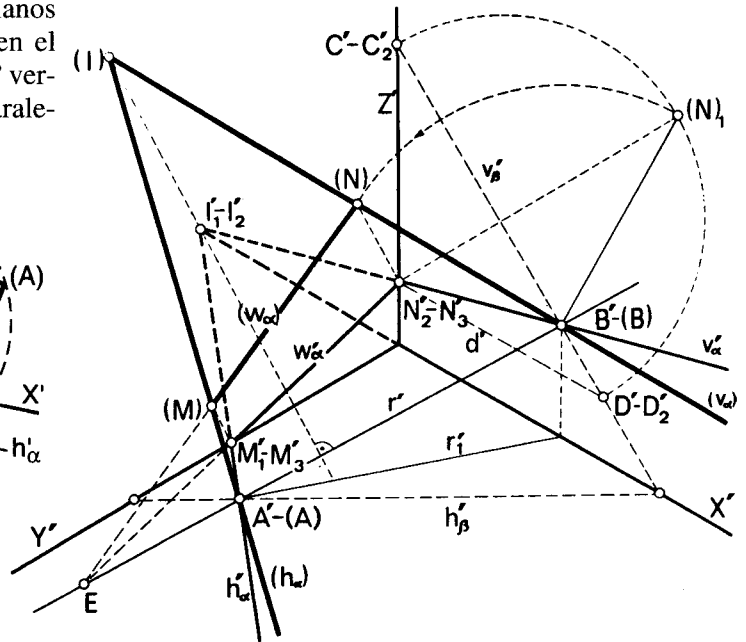


Fig. 27.7. — Abatimiento de un plano cualquiera.

27.5. Abatimiento de un plano cualquiera

En la figura 27.7, se ha abatido el plano $h'_\alpha-w'_\alpha$ sobre un plano frontal $h'_\beta-v'_\beta$ tomando como charnela la intersección $r' \equiv A'B'$ de ambos.

Como ya se dijo, el plano α y su abatimiento (α) se corresponden en una finidad de eje r' . Para hallar un par de puntos homólogos, se ha abatido el vértice N del triángulo de trazas $N'M'I'$ de α , por ejemplo, cuyo abatimiento (N) ha de estar sobre la normal $N'_2(N)$ a r' y ha de distar de B' la longitud \overline{BN} , abatida sobre el primer vertical en $B'(N)$.

El arco de centro B' y radio $\overline{B'(N)}$, corta, por tanto, a $N'_2(N)$, en el abatimiento (N) de N' y determina el abatimiento $(N)(I)(M)$ del triángulo de trazas, como homólogo del $N'I'M'$.

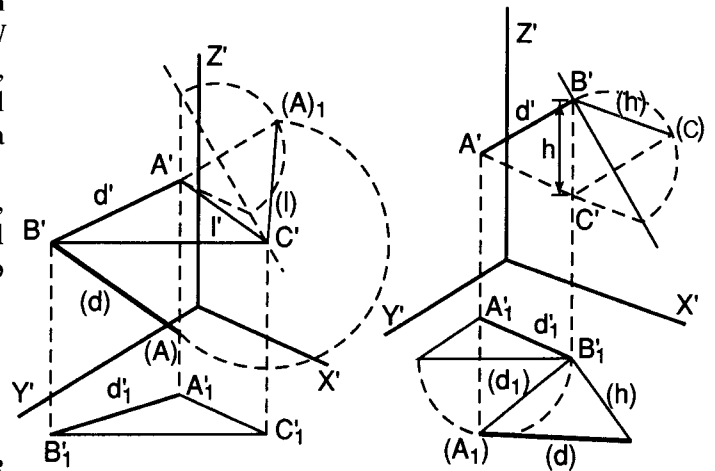
al 1º vertical (núm. 27,3-c). El arco de centro C' y radio $(l) \equiv \overline{C'(A)}$, corta a $A'(A)$ en (A) , siendo $\overline{B'(A)} = (d)$ el abatimiento de d .

También puede hallarse d (Fig. b), como hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: la pro-

27.6. Distancia entre dos puntos

En general, la distancia d entre dos puntos A y B (Fig. 27.8) se halla, abatiendo cualquier plano que contenga a \overline{AB} .

También puede hallarse (Fig. a), trazando por B la frontal BC (siendo $B'C'$ normal a Z') y por A , la paralela AC al 1º vertical (siendo $A'C'$ paralela a X') que corta a BC , en $C'-C'_1$. Si ahora se abate el triángulo ABC alrededor de $\overline{B'C'}$, el abatimiento (A) de A ha de estar en la normal $A'(A)$ a $\overline{B'C'}$ y distar de C la longitud $l = AC$, abatida en (l) fácilmente, por ser paralela



(a) Primer método.

(b) Segundo método.

Fig. 27.8. — Distancia entre dos puntos.

yección horizontal $A_1B_1 = d_1$, abatida en (d_1) , y la diferencia de cotas $h' = B'C'$ entre B y A ($A'C'$ paralela a d'_1), abatida en (h) . Construyendo luego sobre (d_1) como cateto, el otro cateto de longitud (h) , la hipotenusa es la distancia (d) buscada.

PERPENDICULARIDAD

27.7. Recta perpendicular a un plano

Como ya se vió en diédrica (núm. 5,4-b), si una recta r es perpendicular a un plano α , su proyección directa r' es normal a la traza ordinaria de α , y sus proyecciones r_1 , r_2 y r_3 son normales a las respectivas trazas homónimas de α . De aquí, el método para tra

de A (no dibujado) se traza la normal (r_1) a la traza abatida (h_α). Al desabatir, se obtiene r'_1 .

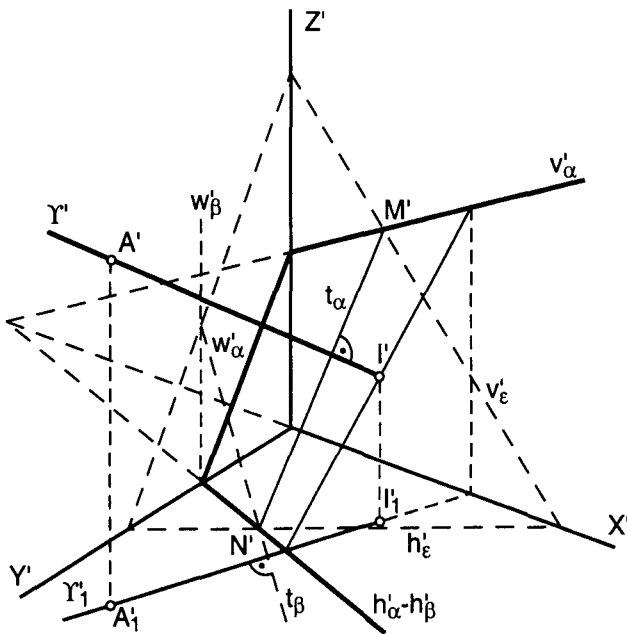


Fig. 27.9.—Recta perpendicular a un plano.

zar por un punto $A'-A'_1$ la perpendicular a un plano α (Fig. 27.9).

Primeramente, se halla la traza ordinaria $t_\alpha \equiv M'N'$ de α con un plano frontal $h'_\epsilon-v'_\epsilon$, siendo r' la perpendicular a t_α , trazada por A' .

Por ser r_1 y h_α perpendiculares entre sí, el plano vertical β (paralelo a Z) trazado por h_α , es perpendicular a r_1 , luego la proyección directa r'_1 de r_1 es normal a la traza ordinaria t_β de β . De aquí, el método: Trazar el plano vertical β , de traza $h'_\beta \equiv h'_\alpha$, y hallar su traza ordinaria t_β , siendo r'_1 la perpendicular a t_β , trazada por A'_1 (ver núm: 27,20 de n/E. de G.D.), que permite hallar la intersección $I'-I'_1$ de r y α .

La proyección r'_1 también se halla, abatiendo el plano $[XY]$ alrededor de h'_ϵ . Desde el abatimiento (A_1)

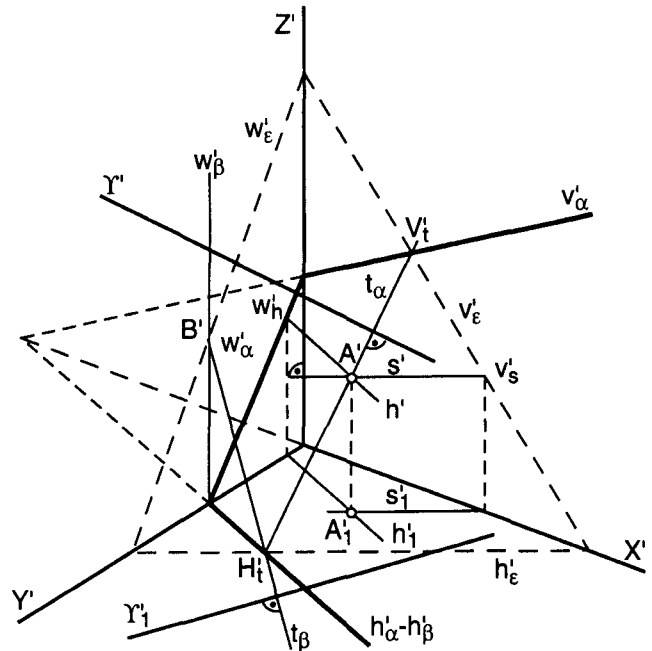


Fig. 27.10.—Plano perpendicular a una recta.

27.8. Plano perpendicular a una recta

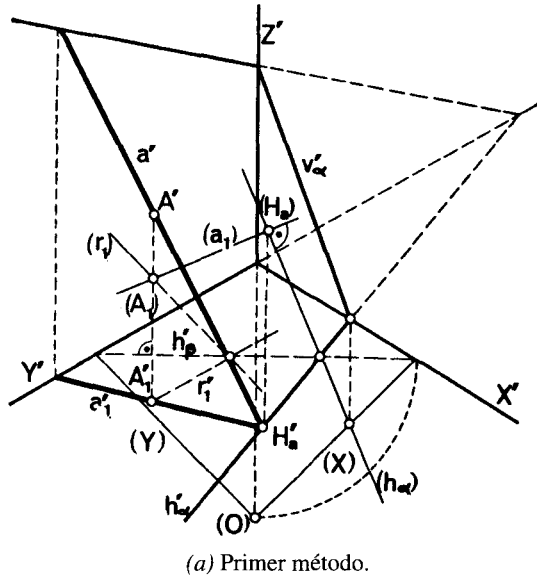
Este caso es el inverso del anterior (Fig. 27.10). El plano α perpendicular a la recta $r'-r'_1$, trazado por un punto $A'-A'_1$ dado, queda determinado por su traza ordinaria $t_\alpha \equiv V'_tH'_t$ y la horizontal $h'-h'_1$ que pasa por $A'-A'_1$.

Para hallar t_α se traza el plano frontal $h'_\epsilon-v'_\epsilon$ que contiene a $A'-A'_1$, por medio de la horizontal s (de proyección s' normal a Z') cuya traza V'_s determina la traza v'_ϵ , normal a Y' . La normal t_α a r' , trazada por A' es la traza ordinaria de α , que corta a h'_ϵ y v'_ϵ , en H'_t y V'_t .

Por ser r_1 perpendicular a h_α , el plano vertical β (paralelo a Z), trazado por h_α es normal a r_1 , luego la proyección directa r'_1 de r_1 es normal a la traza ordinaria t_β de β . De aquí, la construcción: Trazar por H'_t la perpendicular t_β a r'_1 que corta a w'_ϵ , en B' , y determina el plano vertical β , de traza $h'_\beta \equiv h'_\alpha$ y la horizontal $h'-h'_1$, paralela a h'_α , de traza W'_h perteneciente a w'_α .

27.9. Recta perpendicular a otra

Para trazar por un punto A la perpendicular a una recta r , se abate el plano $[A,r]$ y se traza, en el abatimiento, la perpendicular buscada a . Al desabatir, se obtienen las proyecciones $a'-a'_1$.



a (h_α), trazada desde (A_1), es el abatimiento (a_1) de a'_1 y corta a (h_α), en (H_α), desabatido en H'_α , que determina la recta $a'-a'_1$ buscada.

También podía haberse abatido α , alrededor de su traza ordinaria $N'I'$ (Fig. b). El abatimiento (h_α) de h'_α se obtiene, por el abatimiento (M) de M' , situado en la normal $M'(M)$ a la charnela y distante de I la longitud

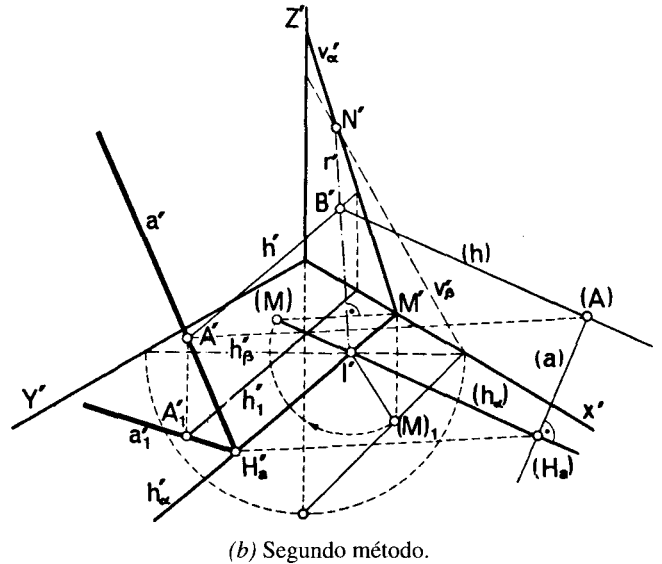


Fig. 27.11.—Recta de máxima pendiente de un plano α , respecto al horizontal.

Como caso particular de éste (Fig. 27.11), vamos a dibujar la recta de máxima pendiente $a'-a'_1$ de un plano $h'_\alpha-v'_\omega$ trazada por un punto $A'-A'_1$ de α (Fig. a).

Para hallar a'_1 se abate el horizontal $[X,Y]$ y con él, h'_α y A'_1 , en $[(X), (Y)], (h_\alpha)$ y (A_1) , respectivamente, tomando como charnela, la normal h'_β a Z' . La normal

IM , obtenida en verdadera magnitud en $\overline{I'(M)}_1 = \overline{I'(M)}$.

Se traza luego por A' la horizontal h' de α , abatida en (h) , paralela a (h_α) , y se refiere a ella A' , en (A) . La perpendicular desde (A) a (h_α) es el abatimiento (a) de a , y su pie (H_α), desabatido en H'_α define la recta $a'-a'_1$ buscada. (Ver núm. 27,19 de n/E. de G.D.).

FORMAS PLANAS

27.10. Método general

Para representar una forma de plano α , se abate éste sobre un plano frontal β , tomando como charnela la traza ordinaria t de α . La proyección directa A' de un punto A de α y su abatimiento (A) se corresponden en una afinidad ortogonal de eje t y par de puntos homólogos A' y (A) . Podemos pues dibujar la figura abatida y hallar su proyección directa (perspectiva), como homóloga de ella en dicha afinidad.

l , prolongado, pasa por la traza N' de Y' con α .

Primeramente se ha trazado el plano frontal $h'_\beta-v'_\beta$ que pasa por N' y corta a α , según la traza ordinaria $t \equiv M'N'$ de α . Se abate luego α , alrededor de t , por medio del abatimiento (I) de I' (traza de Z con α), siendo $(I)N' \equiv (w_\alpha)$ e $(I)M' \equiv (v_\alpha)$ las trazas abatidas. El abatimiento (I) está en la normal $(I)I'$ a t y dista de M' la longitud \overline{MI} , abatida en $\overline{M'(I)}_1 = \overline{M'(I)}$.

27.11. Perspectiva de un cuadrado

En la figura 27.12 se ha dibujado la perspectiva de un cuadrado de plano α y vértice A' , cuyo lado $\overline{AD} =$

La proyección directa $A'B'C'D'$ del cuadrado y su abatimiento $(A)(B)(C)(D)$ se corresponden en una afinidad ortogonal de eje t y par de puntos homólogos I' e (I) .

El abatimiento (A) de A' se ha obtenido, por medio de la paralela $A'E'$ a v'_ω , abatida en $E'(A)$, paralela a

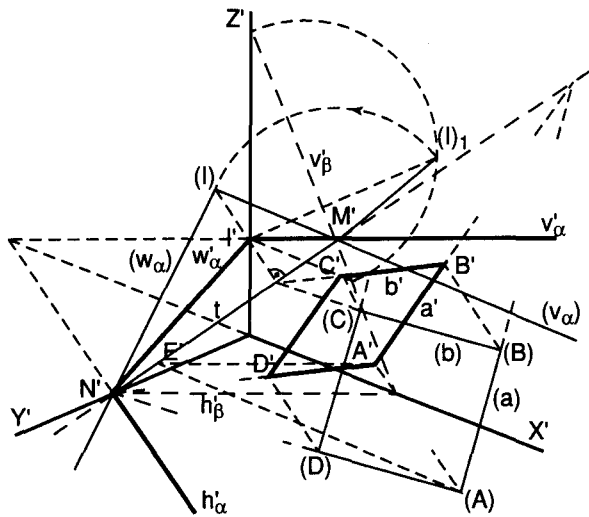


Fig. 27.12. - Cuadro de plano α .

(v_α), siendo $A'(A)$ paralela a $I'(I)$ (normal a t).

Sobre la recta $(A)N'$, se dibuja luego el cuadrado de lado $\overline{(A)(D)}=l$ y a partir de él, la perspectiva $A'B'C'D'$, como homóloga del cuadrado $(A)(B)(C)(D)$, sabiendo que los lados homólogos a' y (a) , b' y (b) , ..., etc., concurren en puntos de t , y los vértices homólogos están alineados en la dirección $I'(I)$.

27.12. Perspectiva de circunferencias

La perspectiva axonométrica ortogonal de una circunferencia ω , de plano α , es su proyección ortogonal sobre el cuadro luego, en general, es una elipse ω' de eje mayor paralelo a la traza ordinaria de α y longitud igual al diámetro de ω .

a) Sea la circunferencia ω de centro C y radio R (Fig. 27.13), situada en el plano horizontal, por ejemplo, (o en otro paralelo a él). El eje mayor de ω' es la perpendicular $A'B'$ a Z' , de longitud $\overline{C'A'} = \overline{C'B'} = R$, y las paralelas $A'M'$ y $B'M'$ a Y' y Z' se cortan en un punto M' de ω' , por ser $AMB = 90^\circ$.

La elipse ω' puede dibujarse, por tanto, como homóloga de la circunferencia (ω) , de diámetro \overline{AB} (circunferencia abatida), en una afinidad ortogonal de eje \overline{AB} y par de puntos homólogos M' y (M) .

Más sencillo resulta trazar el arco de centro M' y radio $\overline{M'F'} = R$ que corta al eje menor en F' . La recta $M'F'$ corta al eje mayor en N' , siendo $M'N'$ la longitud del semieje menor $\overline{C'D'}$ (núm. 10,5-3°).

b) El semieje menor $\overline{C'D'} = \overline{C'E'}$ también puede hallarse, tomando sobre $K(O)$ la longitud $\overline{K(S)} = R$ y proyectandola ortogonalmente sobre Z' , en $\overline{KS'} = \overline{C'D'}$, o trazando el radio $\overline{C'G'}$ de (ω) , paralelo a $K(O)$ y pro-

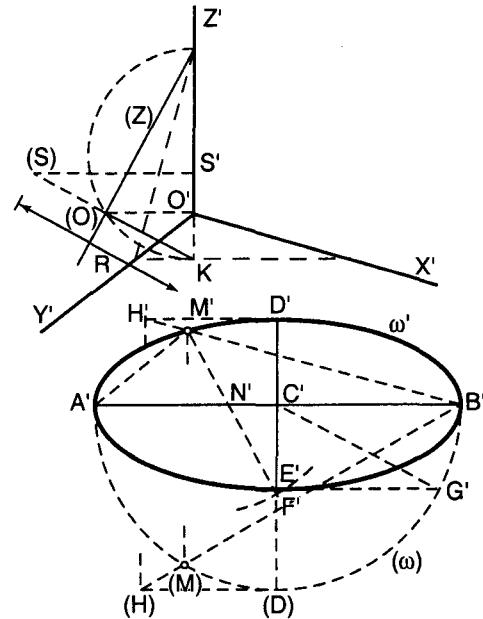


Fig. 27.13. - Circunferencia de plano coordenado.

yectándola ortogonalmente sobre Z' , en $\overline{C'E'}$.

c) Si la circunferencia ω de centro C y radio R (Fig. 27.14) está situada en un plano α , oblicuo respecto a

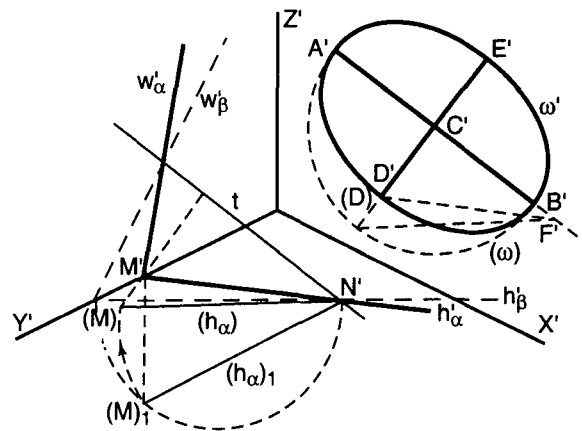


Fig. 27.14. - Circunferencia de plano cualquiera.

los ejes, se halla la traza ordinaria t de α y se traza por C' el semieje mayor, de longitud $\overline{C'A'} = \overline{C'B'} = R$, paralelo a t .

Se abate luego el plano α , alrededor de t , siendo $N'(M) \equiv (h_\alpha)$ el abatimiento de $N'M' \equiv h'_\alpha$, obtenido por el abatimiento $(M)_1$ de M' , alrededor de h'_β .

En la afinidad ortogonal que relaciona ω' con su abatimiento (ω) alrededor de $A'B'$, la paralela $(D)F'$ a $(M)N' \equiv (h_\alpha)$ tiene por homóloga la paralela $F'D'$ a h'_α que corta al semieje menor en el extremo D' del semieje $\overline{C'D'}$.

28. PERSPECTIVA DE CUERPOS

28.1. Sistemas axonométricos ortogonales

a) Como ya dijimos en el núm. 26,3-c, los sistemas axonométricos ortogonales se clasifican en *isométricos*, *dimétricos* y *trimétricos*, según que tengan iguales las tres escalas axonométricas ($u_x = u_y = u_z$), sólo dos ($u_x = u_z$) o ninguna o dicho de otro modo, según que las inclinaciones de los ejes con el cuadro sean las tres iguales ($\alpha = \beta = \gamma$), sólo dos ($\alpha = \gamma$) o ninguna.

En el cuadro de la figura 26.5, pueden verse las unidades axonométricas, los coeficientes de reducción, los ángulos entre ejes y la perspectiva de un cubo de arista unidad u , en los tres sistemas.

b) Sistema dimétrico

Entre los muchos sistemas dimétricos que pueden utilizarse, la norma UNE 1-031-75 B y la DIN-5 recomiendan (sistema dimétrico normalizado) el de escalas:

$$u_x : u_y : u_z = 1 : 1/2 : 1 \quad \text{luego} \quad c_x = c_z = 2c_y$$

y aplicando la fórmula [1] del núm. 26,3-b:

$$c_x^2 + \left(\frac{c_x}{2}\right)^2 + c_x^2 = 2 \quad \text{de donde:}$$

$$c_x = c_z = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,943 \quad \text{y} \quad c_y = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,471$$

La construcción gráfica de los ejes puede hacerse, como ya se explicó (núm. 26,4-2º) o por el método que sigue (Fig. 28.1).

Por ser $u_x = u_z$, $\overline{O'A} = \overline{O'C}$. El triángulo ABC de las trazas es isósceles y el eje Y' es bisectriz del ángulo AOC . Si ahora abatimos el triángulo AOC , alrededor de \overline{AC} , en $A(O)C$, y hacemos $\overline{(O)A} = \overline{(O)C} = 1$, las longitudes de \overline{AC} y $\overline{O'C}$ son:

$$\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \overline{O'C} = \overline{OC} \times c_z = 1 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

De aquí, el método a seguir: Trazar un segmento vertical $\overline{O'C}$ de longitud arbitraria l y con centros en O' y C , sendos arcos de radios l y $3l/2 = 1,5l$ que se cortan en A . Los lados $O'C$ y $O'A$ son los ejes Z' y X' y la normal $O'M'$ a \overline{AC} , el eje Y' .

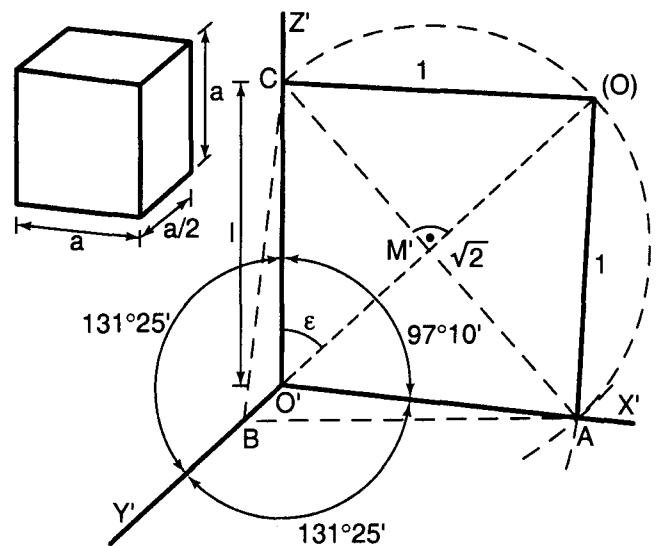


Fig. 28.1.—Sistema dimétrico normalizado.

Los ángulos entre ejes se miden en el dibujo o se deducen de la relación:

$$\text{sen } \varepsilon = \frac{\overline{MC}}{\overline{O'C}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3}{4}$$

$$2\varepsilon = 97^\circ 10' \approx 97,2^\circ$$

En la figura de la izquierda se ha dibujado la perspectiva de un cubo en este sistema. (Ver núm. 29,2 de n/E. de G.D.).

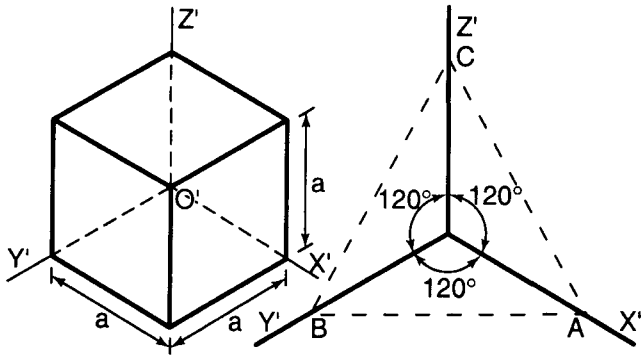


Fig. 28.2. - Sistema isométrico.

c) Sistema isométrico. Por ser $u_x = u_y = u_z$ (Fig. 28.2), el triángulo de las trazas ABC es equilátero y los ejes axonométricos forman entre sí ángulos de 120° .

El coeficiente de reducción se halla, por la fórmula [1] del núm. 26,3 b:

$$\left. \begin{aligned} c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 &= 2 \\ c_x &= c_y = c_z \end{aligned} \right\} 3 c_x^2 = 2 \quad \text{de donde:}$$

$$c_x = c_y = c_z = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816$$

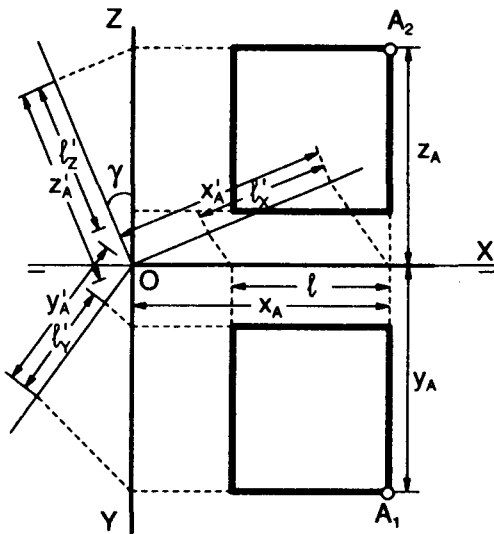


Fig. 28.3. - Coordenadas de un cubo.

En el cubo representado en este sistema, la diagonal que parte de O es proyectante y sus extremos se confunden en O' ; las aristas paralelas opuestas (vista y oculta) están en prolongación y el contorno aparente es un exágono regular. Esto explica que, a pesar de la sencillez del sistema (por la igualdad de escalas y

ángulos), no sea de uso generalizado por carecer de cierta falta de claridad y representatividad.

28.2. Paso del diédrico al axonométrico

Sea el cubo representado en diédrico (Fig. 28.3), de arista l y vértice A , de coordenadas x_A, y_A y z_A referidas al triedro de eje X coincidente con LT y ejes Y y Z , normales a X , situados en H y V , respectivamente. Para representarlo en axonometría ortogonal, en un sistema de ejes dados, se procede como sigue:

1º) Por coordenadas axonométricas (Fig. 28.4). Primeramente se abaten los tres ejes sobre el cuadro, alrededor de \overline{BC} y $\overline{DO'}$, en (X) , (Y) y (Z) y se llevan

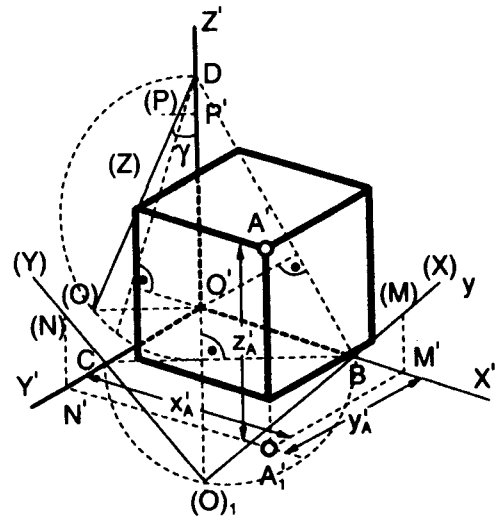


Fig. 28.4. - Método de coordenadas axonométricas.

sobre ellos las coordenadas reales $x_A = \overline{(O)M}$, $y_A = \overline{(O)N}$ y $z_A = \overline{(O)P}$. Refiriendo sus extremos a X' , Y' y Z' , en M' , N' y P' , se obtienen las coordenadas axonométricas $x'_A = \overline{O'M'}$, $y'_A = \overline{O'N'}$ y $z'_A = \overline{O'P'}$ y los coeficientes de reducción:

$$c_x = \frac{x'_A}{x_A} \quad c_y = \frac{y'_A}{y_A} \quad \text{y} \quad c_z = \frac{z'_A}{z_A}$$

Las restantes coordenadas se hallan numéricamente (multiplicándolas por sus respectivos coeficientes de reducción) o por segmentos proporcionales, como se ha hecho en la figura 28.3 con l'_x, l'_y y l'_z .

El vértice $A'-A'_i$ se ha hallado por sus coordenadas x'_A, y'_A y z'_A y los restantes, por paralelas a los ejes, de longitudes l'_x, l'_y y l'_z .

El abatimiento (C) de un punto $C'-C''$ del eje Y' , permite trazar los abatimientos ($Y \equiv O'(C)$ y (X) de los ejes y dibujar la planta del cubo abatida. Al desabatir, se obtienen las proyecciones $A'_i-A''_i$ de A y las $A'-A''$ y $P'-P''$ de los vértices A y P y a partir de éstos, las de los restantes vértices, como se ve en la figura.

El ángulo γ también se obtiene directamente, a partir del coeficiente de reducción c_z , por ser $\cos \gamma = \overline{O'D'} / \overline{(O)D'} = c_z$, luego $\gamma = \arccos c_z$. En el sistema dimétrico normalizado:

$$\gamma = \arccos c_z = \arccos 0.943 \approx 19,5^\circ$$

y en el isométrico: $\alpha = \beta = \gamma = \arccos 0,816 \approx 35,3^\circ$

4° Por paso a diédrico de plano horizontal XY (Fig.

28.7). Se basa en tomar como plano horizontal de diédrico el $[XY]$ y como vertical, el proyectante del eje Z (normal al cuadro) o uno paralelo a él. La intersección de ambos planos (línea de tierra) es la recta OH abatida en $(O)H'$, siendo $(O)D \equiv (Z)$. Si trasladamos el triángulo $D(O)H'$, paralelamente a sí mismo, en dirección $(O)O'$ una longitud arbitraria $(O)Q$, se obtiene el triángulo DQH . La recta QH es ahora la nueva línea de tierra y la paralela d_p a $(O)O'$, el abatimiento de la dirección de proyección (normal al cuadro), contenida en el vertical.

Las proyecciones diédricas de un punto N del eje Y se obtienen, trazando por N' la normal a Z' que corta a

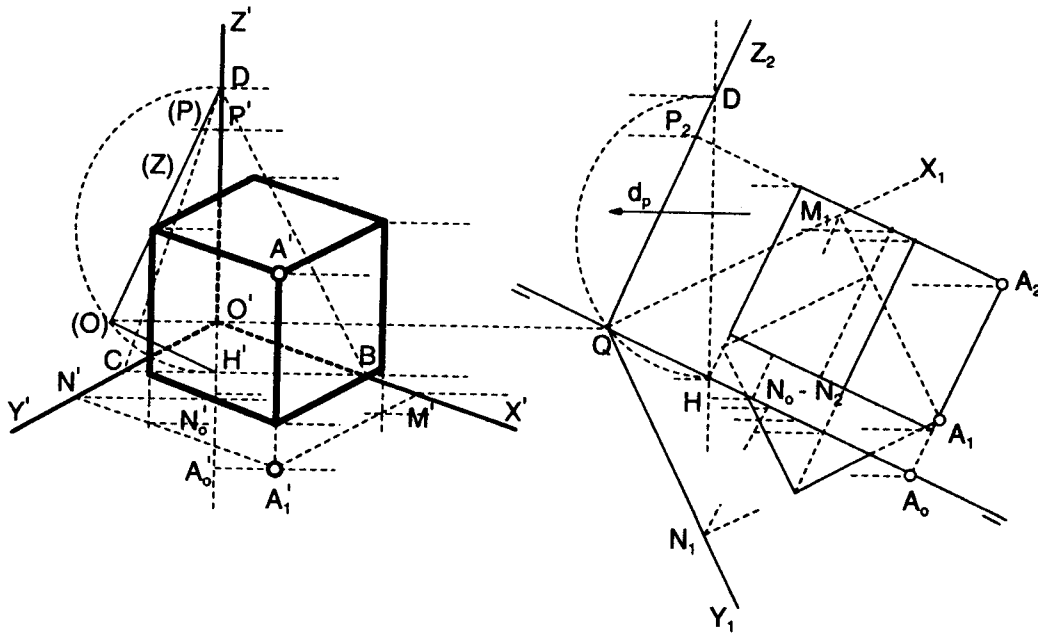
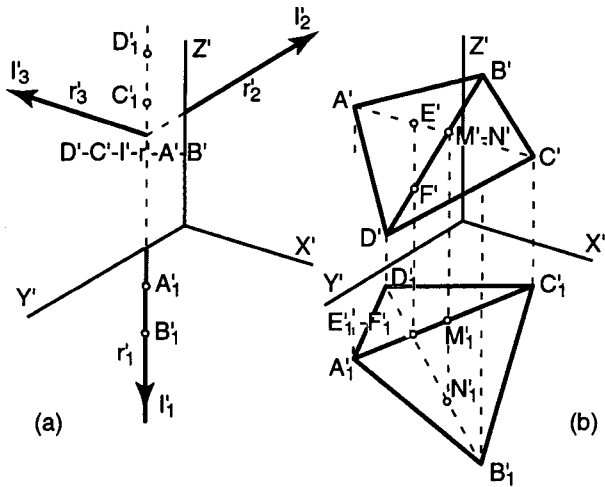


Fig. 28.7.—Método de paso a diédrico de plano horizontal XY .

LT , en N_o , y tomando sobre la normal N_oN_1 a LT , la longitud $\overline{N_oN_1} = \overline{N'_oN'}$, siendo N_1 y $N_2 \equiv N_o$ las nuevas proyecciones de N que permiten trazar el eje $Y_1 \equiv QN_1$, el $X_1 \equiv QX_1$ (normal a Y_1) y el $Z_2 \equiv QD$.

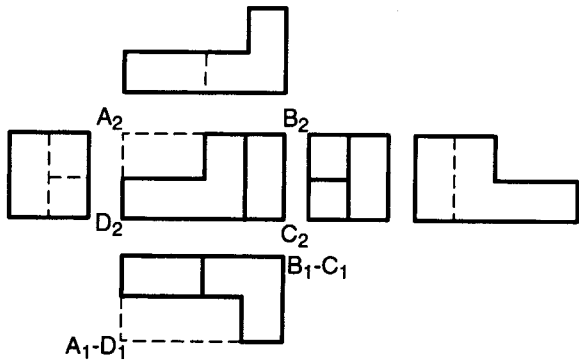
Las proyecciones A_1-A_2 de un punto $A'-A'_i$ se hallan, trazando por A'_i la normal a Z' que corta a LT , en A_o . Sobre la normal A_oA_2 a LT se toma luego $\overline{A_oA_1} = \overline{A'_iA'_i}$ y se prolonga hasta cortar a la normal A'_iA_2 a Z' , en A_2 , siendo $\overline{A_oA_2} = \overline{Q\overline{P}_2} = \overline{(O)(P)} = z_A$. De aquí, la construcción:

Una vez abatido el triángulo DOH en DQH , se dibujan los ejes X, Y y Z , como se ha explicado y luego, la planta y alzado del cubo, dado por sus coordenadas. La proyección A'_i del vértice A se halla, trazando por A_o la normal a Z' , al que corta en A'_o y tomando luego $\overline{A'_oA'_i} = \overline{A_oA_1}$. La perspectiva A' es la intersección de A'_iA' (paralela a Z') con A_2A' (normal a Z'). Los restantes vértices se obtienen de forma análoga.

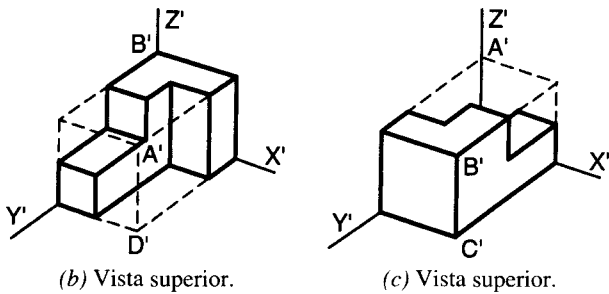


(a) Puntos vistos en recta proyectante. (b) Aristas vistas de un tetraedro.

Fig. 28.8. - Partes vistas y ocultas.

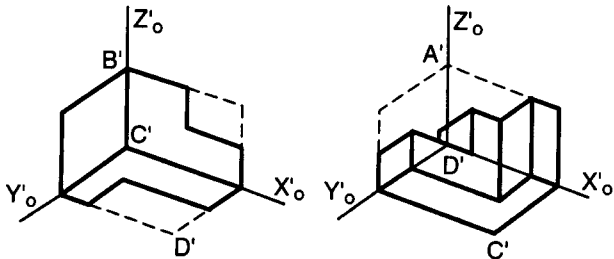


(a) Representación diédrica.



(b) Vista superior.

(c) Vista superior.



(d) Vista inferior.

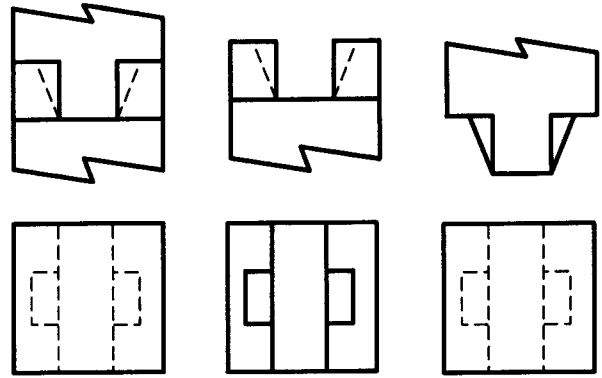
(e) Vista inferior.

Fig. 28.9. - Caras vistas de una pieza.

28.3. Partes vistas y ocultas (Fig. 28.8)

a) Dos puntos $A'-A_1$ y $B'-B_1$, de perspectivas coincidentes $A' \equiv B'$ (Fig. a) determinan la recta proyectante

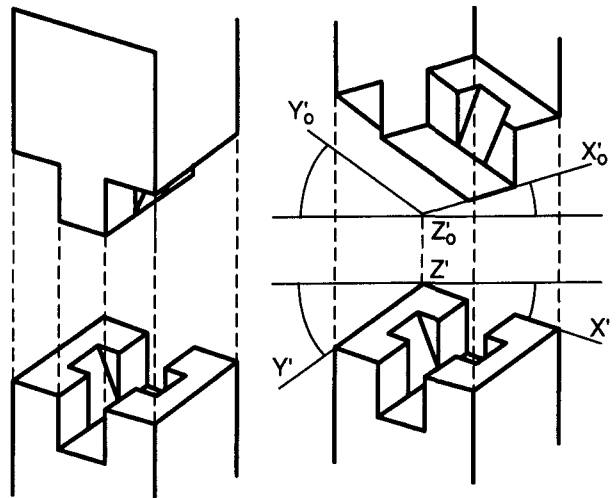
$r \equiv AB$ (normal al cuadro). En proyección ortogonal, para que el triedro $OXYZ$ sea visto en la proyección desde arriba, el observador (centro de proyección) se supone colocado en el punto impropio I de la dirección $r \equiv AB$ y sus proyecciones I_1, I_2 e I_3 son los puntos impropios de r_1, r_2 y r_3 en el sentido de las flechas, o sea, el contrario del sentido positivo de los ejes Z', Y' y X' .



(a) Proyección diédrica.

(b) Pieza inferior.

(c) Pieza superior.



(d) Perspectiva normal.

(e) Perspectiva con las dos caras de acoplamiento vistas.

Fig. 28.10. - Acoplamiento de dos piezas.

Según esto, de los dos puntos A y B , es visto el más próximo al observador, o sea, el B , de proyección B_1 más próxima a I_1 y si las proyecciones C_1 y D_1 de otros dos puntos están al otro lado de Y' , es visto el C' de proyección C_1 más próxima a I_1 .

Esto se aplica para determinar las aristas vistas del tetraedro $A'B'C'D'-A_1B_1C_1D_1$ (Fig. b). El contorno aparente de la perspectiva es el cuadrilátero perimetral $A'B'C'D'$, de aristas vistas. Para ver cuál de las aristas $A'C'$ o $D'B'$ es vista, se traza por su intersección M' la recta proyectante $M'N'$ que corta a éstas, en $M'-M_1$ y $N'-N_1$, respectivamente, siendo visto $N'-N_1$, luego DB es la arista vista.

En proyección horizontal, el contorno aparente es el cuadrilátero $A_1'B_1'C_1'D_1$. La vertical que pasa por la intersección de $A_1'C_1$ y $B_1'D_1$ corta a éstas, en E y F , respectivamente, siendo visto $E'-E_1$ por ser de mayor altura, luego \overline{AC} es vista y \overline{DB} , oculta.

b) En la figura 28.9 se han dibujado cuatro perspectivas dimétricas, de escalas $u_x : u_y : u_z = 1 : 3/4 : 1$ (ver cuadro, Fig. 26.5), de la pieza representada en diédrica (Fig. a) cuyas caras prolongadas determinan un paralelepípedo rectángulo de vértices opuestos A , C y B , D .

Los triedros del paralelepípedo que aparecen vistos en cada perspectiva, son los de vértice A (Fig. b), B (Fig. c), C (Fig. d) y D (Fig. e). De este modo, con dos perspectivas pueden verse "las seis caras" del paralelepípedo, utilizando triedros $[XYZ]$, y $[X_oY_oZ_o]$, simétricos respecto al cuadro de centros O y O_o situados

detrás o delante de π .

c) En los acoplamientos de piezas (Fig. 28.10-a, b y c), las partes salientes de cada una se introducen en los entrantes de la otra, como sucede en las ensambladuras, uniones, tornillos y tuercas, etc.

Para representarlas (Fig. d), suelen dibujarse por separado pero correspondiéndose las partes que han de acoplarse en la dirección del acoplamiento (vertical en este caso).

Para que las superficies de acoplamiento de cada pieza sean vistas, (Fig. e), se dibuja la vista superior de la pieza inferior (b) y la vista inferior de la pieza superior (c), tomando como ejes X'_o , Y'_o y Z'_o los simétricos de X' , Y' y Z' respecto al plano proyectante de traza ordinaria normal a Z' y ambos tienen los mismos coeficientes de reducción, lo cual permite representar el acoplamiento vertical de las piezas.

REPRESENTACIÓN DE CUERPOS

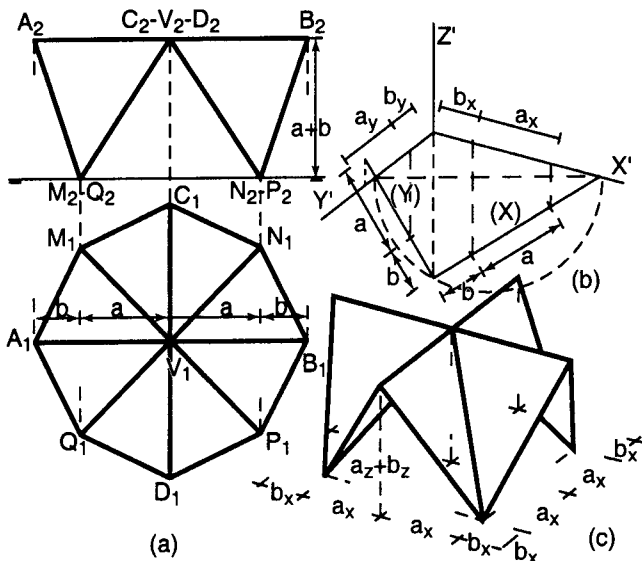


Fig. 28.11. - Perspectiva de cubierta plegada laminar.

En lo que sigue, dibujaremos las perspectivas de varios cuerpos, aplicando los métodos expuestos (núm. 28,2).

28.4. Poliedro

En la figura 28.11 se ha dibujado la perspectiva axonométrica de una cubierta plegada (Fig. a) de espesor despreciable, planta ortogonal y caras triangulares AVQ , QVD , DVP , ..., etc., en un sistema dimétrico de ejes dados X' , Y' , Z' (Fig. b).

Las escalas axonométricas a_x y b_x (Fig. b), obtenidas por abatimiento del plano horizontal $[X,Y]$, en (X) (Y) , permiten dibujar aparte (Fig. c) la planta de la cubierta y luego, los vértices superiores, de altura $a_x + b_x$, por ser un sistema dimétrico, de escalas $a_x = a_z$ y $b_x = b_z$. Solo queda unir los vértices que determinan las aristas de la cubierta.

28.5. Pirámide

En la figura 28.12 se ha dibujado la perspectiva axonométrica de un molde de chapa de espesor despreciable (Fig. a), formado por una superficie tronco piramidal, de vértice V_1-V_2 , altura H y base exagonal regular de centro O_1-O_2 y radio R .

La perspectiva de ejes $X'Y'Z'$ se ha dibujado, a escala doble, por paso a diédrico de plano horizontal $[X, Y]$ (núm. 28.2-4°), abatiendo previamente (Fig. b) el eje Z , en $S'(O) \equiv [Z]$, como ya se sabe.

A continuación, se traza aparte un punto arbitrario O' , como centro del triedro $X'Y'Z'$; la normal $O'O''$ a Z' ; la nueva línea de tierra (paralela a $(O)T'_0$) trazada por un punto O'' de $O'O''$ y la nueva proyección Z''

de Z , paralela a $(O)S'$. La nueva proyección Y'' de Y se determina, tomando $O''T'_0 = (O)T'_0$ y $\overline{T'_0T''_0} = \overline{T'T'_0}$, siendo $Y'' \equiv O''T''_0$ y X'' , perpendicular a Y'' .

Se traza luego el hexágono regular $E''A''B''D''$, de diagonal $\overline{D''E''} = \overline{D'E'} = 2R$. La intersección $A_0 \equiv B_0$ de $\overline{A''B''}$ y LT se refiere a Z' , en A'_0 , que determina la imagen $\overline{A'B'}$ de \overline{AB} , tomando $\overline{A'_0A'} = \overline{A'_0B'} = \overline{A_0B''}$. Los restantes vértices son los simétricos de A' y B' , respecto a O' .

Si ahora se toma sobre $e'' \equiv Z''$, $\overline{O''V''} = 2\overline{O_2V_2}$ y $\overline{O''C''} = 2H$ y se refieren V'' y C'' a Z' , en V' y C' , se obtienen las aristas laterales $V'E'$, $V'A'$, ..., etc., que cortan a las paralelas a las diagonales $O'E'$, $O'A'$, ... de la base, trazadas por C' , en los vértices superiores del molde.

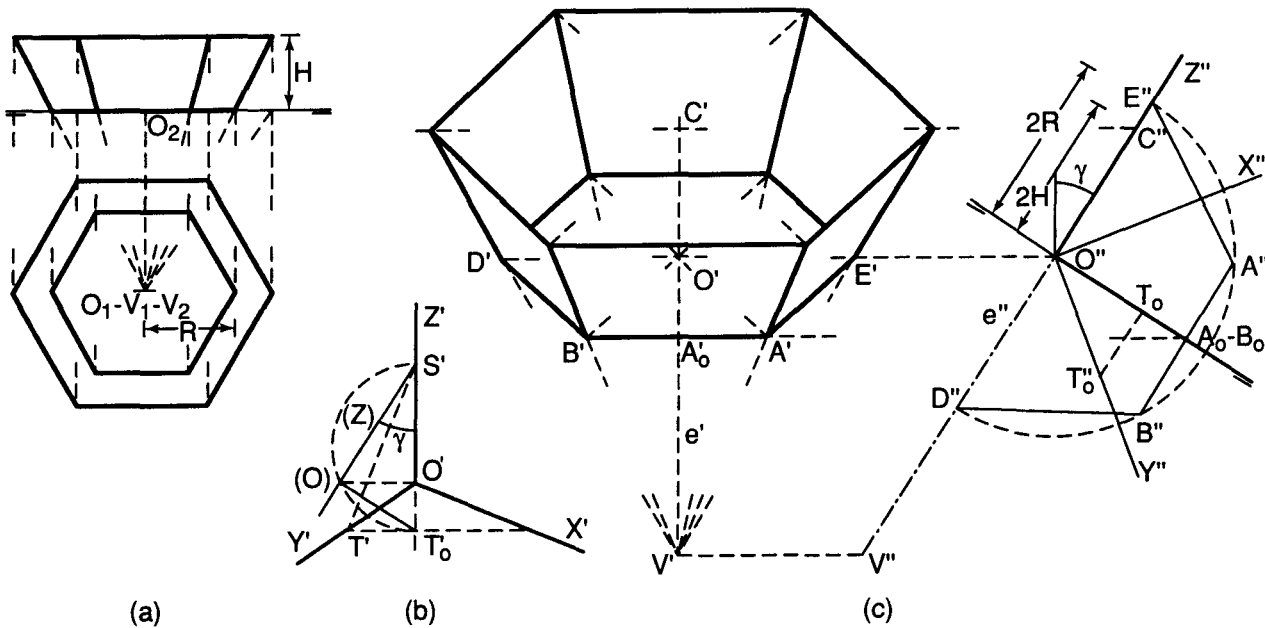


Fig. 28.12.—Perspectiva de molde troncopiramidal.

28.6. Cilindro

La figura 28.13, representa la perspectiva axonométrica de una tubería cilíndrica de revolución, de eje $e'-e'_j$ y radio R , que atraviesa el suelo XY y la pared XZ de una sala de máquinas.

El plano meridiano vertical α de la tubería, normal al $[X, Y]$ corta al cilindro, según las generatrices a y g (distanciadas de e la longitud R) que cortan a h_α en los extremos del eje mayor \overline{AG} de la sección σ de plano $[XY]$. El semieje menor, normal a h_α es $\overline{QB} = R$. De aquí, la construcción (Fig. auxiliar):

Por un punto P' de Y' se traza: el eje $e'-e'_j$, el plano vertical α de traza $h'_\alpha \equiv e'_j$ y el cuadro de traza V_π . Se abate luego α alrededor de su traza r' con el cuadro,

siendo $P'(E_1)$ y $P'(E)$ los abatimientos de h_α y e . El abatimiento (E_1) se obtiene por su distancia $\overline{P'E_1}$ a P' , abatida en $P'(E_1)_1 = P'(E_1)$ o como punto de la semicircunferencia (no dibujada) de diámetro $\overline{P'K}$.

La generatriz abatida es la paralela (g) a (e) , a distancia R de (e) que corta a (h_α) , en (S) , desabatido en S' . Finalmente, se traza la normal $I'(N)$ a $(h_\alpha)_1$ y se toma sobre ella la longitud $\overline{I'(M)} = R$, desabatida en $\overline{I'M'}$.

Los segmentos $\overline{Q'G'}$ y $\overline{Q'B'}$, paralelos e iguales a $\overline{P'S'}$ e $\overline{I'M'}$, respectivamente, son diámetros conjugados de σ que permiten dibujarla.

La sección σ'_0 de plano $[X, Z]$ se corresponde con σ' en una afinidad de eje X' (intersección de los planos

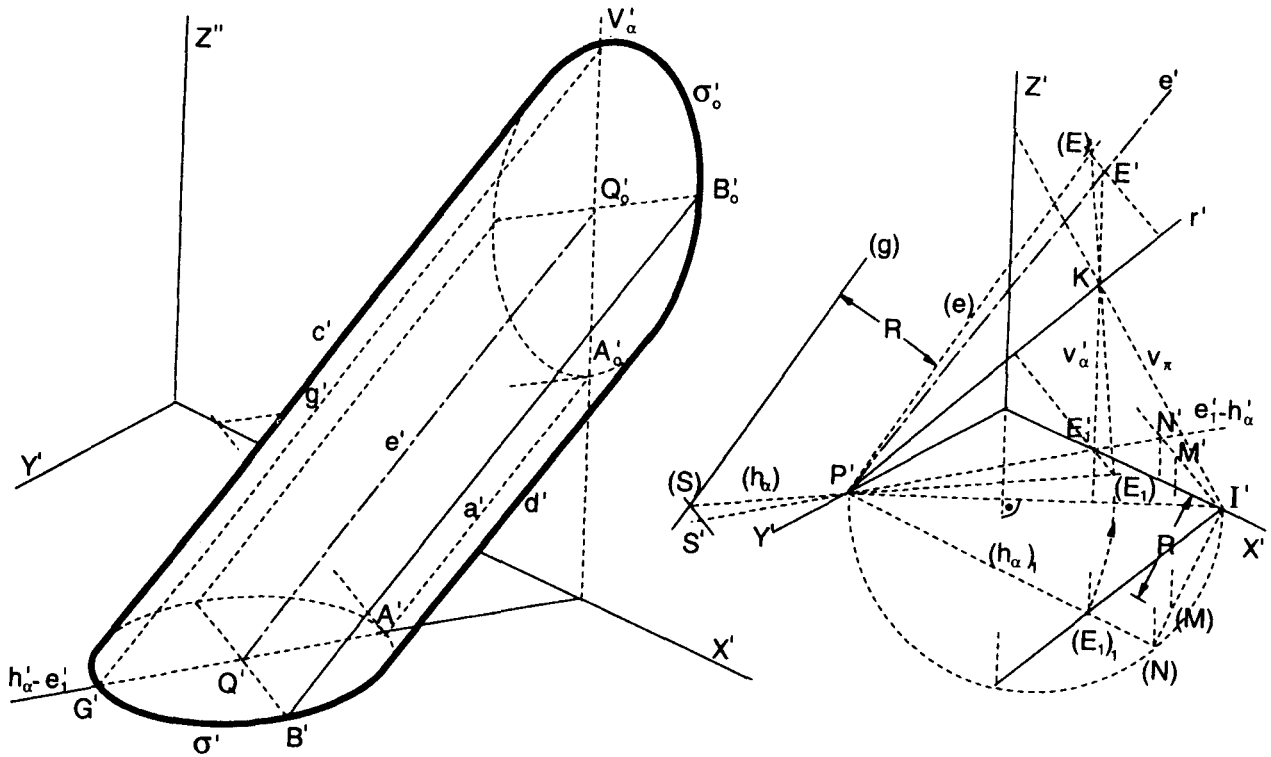


Fig. 28.13. - Perspectiva de tubería cilíndrica de revolución.

de σ y σ_0) y par de puntos homólogos Q' y Q_0 (trazas de e'). Los homólogos de $\overline{Q'A'}$ y $\overline{Q'B'}$ son dos semidiámetros conjugados $\overline{Q'A'_0}$ y $\overline{Q'B'_0}$ de σ'_0 .

28.7. Cono

a) En la figura 28.14, se ha dibujado la perspectiva axonométrica, de ejes X', Y', Z' , de un cono de revolución de altura $H=2h$ y base circular, de centro Q' , y radio R .

La perspectiva ω' de la base ω , abatida en (ω) , puede dibujarse por conocerse el eje mayor $\overline{A'B'} = 2R$, normal a Z' , y el punto M' (intersección de las paralelas $\overline{A'M'}$ y $\overline{B'M'}$ a X' e Y'). La longitud $\overline{Q'C'}$ del otro semieje se obtiene, como proyección ortogonal $\overline{O'D'}$, sobre Z' , del radio $\overline{O'D_0}$ de (ω) , paralelo a $(O)T$, o trazando el arco de centro M' y radio R que corta a Z' , en K y determina la longitud $\overline{M'N'} = \overline{Q'C'}$ del semieje (núm. 27,12).

La altura $\overline{V'Q'} = 2h_z$ se obtiene abatiendo Z , en $(Z) \equiv (O)S$, y las generatrices g' y f' de contorno aparente del cono, trazando desde V' las tangentes a ω' .

Como ya se sabe, ω' se corresponde con (ω) y con la circunferencia ω_0 , de diámetro $\overline{C'D'}$, en dos afinidades ortogonales de ejes $A'B'$ y $C'D'$, lo cual permite hallar el punto T' de tangencia de g' y ω' , trazando la tangente $g'_0 \equiv V'T'_0$ a ω_0 , en T_0 y la perpendicular T_0T' a Z' que corta a ω' en T' o más exactamente, como intersección de las paralelas a $A'B'$ y Z' , trazadas por T_0 y T'_0 respectivamente.

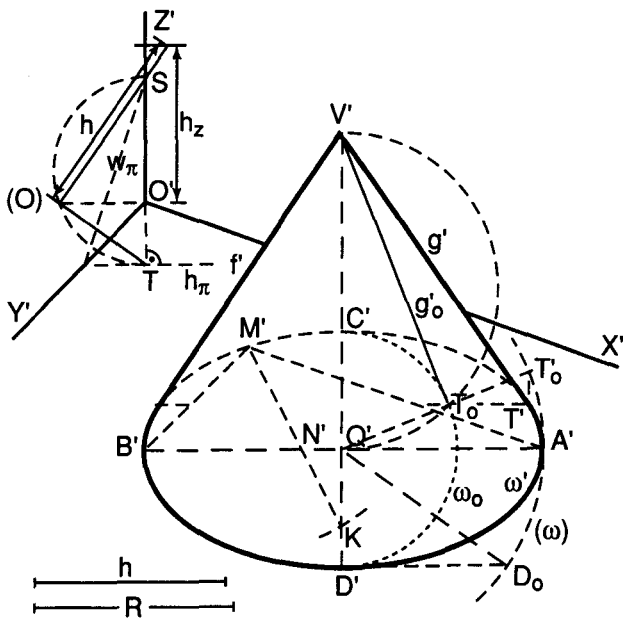


Fig. 28.14. - Perspectiva de cono de revolución.

Finalmente, las generatrices de contorno aparente son las tangentes comunes a σ' y σ'_0 , paralelas a e' y distantes de él la longitud R .

b) La figura 28.15 representa la perspectiva dimétrica normalizada (a escala doble) de un lápiz, de sección cuadrada (Fig. a), y mina de diámetro $2r$, sometido a un afilado cónico de generatriz inclinada el ángulo θ respecto al eje. La superficie cónica del afilado es cortada por las caras del prisma, según hipérbolas y el plano de la base σ corta al prisma, según el cuadrado $ABCD$, inscrito en la circunferencia σ . La altura H del cono se halla, como cateto del triángulo rectángulo de ángulo θ y cateto opuesto $d/2$ y las longitudes axonómicas l'_x , l'_y y H'_x (Fig. b), por abatimiento del plano $[X,Y]$, como ya se sabe.

Cono de afilado. Primeramente se dibuja la perspectiva del cuadrado $ABCD$, de lados $\overline{A'B'} = 2l'_x$ y $\overline{B'C'} = 2l'_y$, paralelos a X' e Y' y luego, la de la circunferencia circunscrita σ que es la elipse σ' , definida por los semidiámetros conjugados $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'B'}$ (núm. 10,6) o por el semieje mayor $\overline{O'E'} = d$, normal a Z' , y por el punto B' como se ha explicado.

La altura del cono es $\overline{V'O'} = 2H'_z = 2H'_x$ y la del cono de afilado de la mina $2h'_z$. Las generatrices de contorno aparente son las tangentes a σ' , trazadas desde V' .

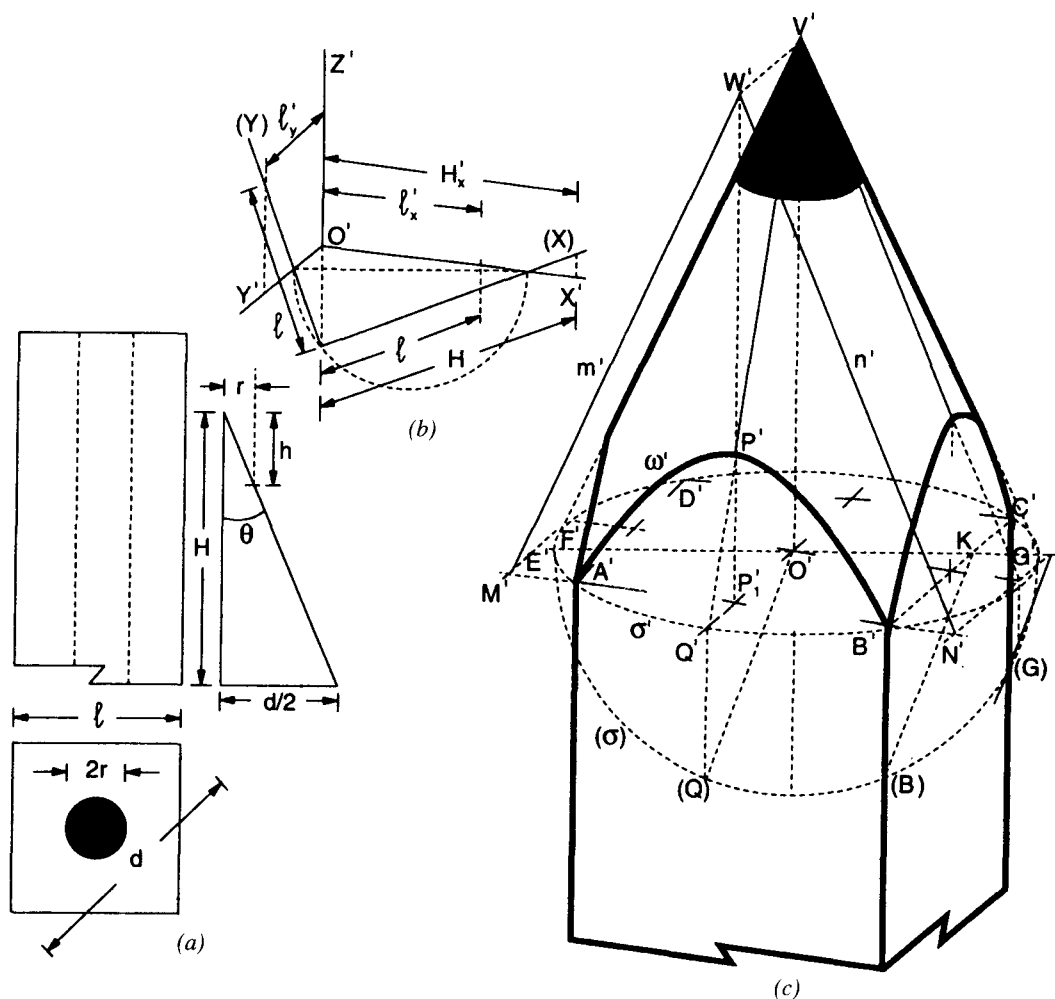


Fig. 28.15.—Perspectiva de afilado cónico.

Secciones planas. La sección ω de la cara que contiene a \overline{AB} es una hipérbola que puede dibujarse, por puntos, por planos secantes que pasen por $\overline{O'V'}$. Así, el de traza $\overline{O'Q'}$, corta al cono, según la generatriz $\overline{V'Q'}$ y a la cara del prisma, según la vertical $\overline{P'P'}$ que corta a $\overline{V'Q'}$, en un punto p' de ω' . También puede hallarse como homóloga de σ' en una homología de eje $\overline{A'B'}$ (intersección de los planos de σ y ω), centro V' y par

de puntos homólogos P' y Q' .

Las asíntotas m' y n' pasan por W' (intersección de $\overline{P'P'}$ con la paralela $\overline{V'W'}$ a $\overline{O'Q'}$) y por las intersecciones M' y N' de $\overline{A'B'}$ con las paralelas a Y' (tangentes a σ'), trazadas por los extremos del diámetro $\overline{F'G'}$ paralelo a X' y han de ser paralelas a las generatrices $\overline{V'F'}$ y $\overline{V'G'}$. Las restantes secciones se hallan de forma análoga.

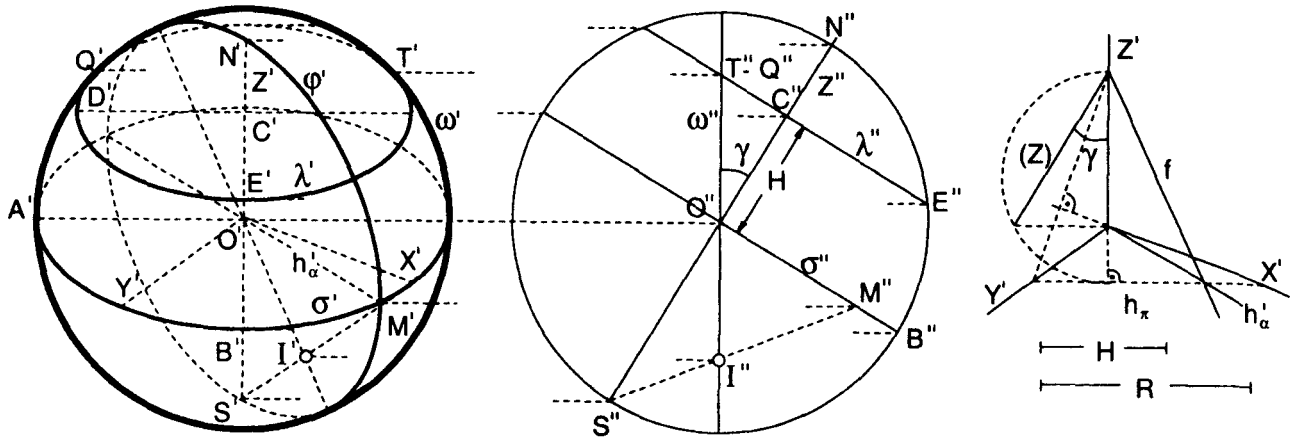


Fig. 28.16.—Perspectiva de la esfera.

28.8. Esfera

En la figura 28.16, se ha dibujado la perspectiva axonométrica, de ejes X' , Y' y Z' (Fig. b), de una esfera de centro O' y radio R , la del ecuador de plano $[X, Y]$, la del paralelo de altura H y la del meridiano de plano α .

La perspectiva se ha hallado, por paso a diédrico de cuadro horizontal (núm. 28,2-3°), hallando previamente la inclinación γ de Z con el cuadro, por abatimiento de Z .

El contorno aparente de la esfera (Fig. a) es la circunferencia $\omega' - \omega''$ situada en el cuadro. El ecuador es la elipse σ' , de semieje mayor $\overline{O'A'} = R$, normal a Z' ,

y semieje menor $\overline{O'B'}$, determinado por la normal $O''B''$ a Z'' (paralelo a (Z)).

El paralelo λ' de altura H se obtiene, trazando la normal λ'' a Z'' (a distancia H de σ'') y refiriendo E'' a Z' , en E' siendo $\overline{C'D'} = \overline{C''E''}$ y $\overline{C'E'}$ los semiejes de λ' . Los puntos de tangencia de λ' y ω' son los de corte $T'-T''$ y $Q'-Q''$ de λ'' con el cuadro ω'' .

El meridiano vertical de traza $O'M' \equiv h'_\alpha$ se proyecta según la elipse ϕ' , de semidiámetros conjugados $O'M'$ y $O'N'$. El eje mayor $O'I'$ es intersección del plano ϕ con el cuadro y puede hallarse, por medio de la recta \overline{MS} , de proyección $M''S''$, que corta al cuadro ω'' , en I'' , o como paralela a la fronta f del plano α (Fig. b). (Ver cáps. 27 a 30 de n/E. de G.D.).

B. AXONOMETRÍA OBLICUA

29. ABATIMIENTOS, PERPENDICULARIDAD. FIGURAS PLANAS

29.1. Axonometría oblicua. Generalidades

Como ya dijimos en el núm. 26,2-a, si la dirección de proyección es oblicua respecto al cuadro, se obtiene la *proyección axonométrica oblicua*.

En esta proyección, las unidades axonométricas o escalas u_x , u_y y u_z no se deducen de los ejes, como en la axonometría ortogonal (núm. 26,3), sino que los ejes y escalas se eligen arbitrariamente, en virtud del teorema de Pohlke que podemos enunciar así:

Tres segmentos coplanarios (no dibujados) $\overline{O'A}$, $\overline{O'B}$ y $\overline{O'C}$, de extremo común O' y longitudes y direcciones arbitrarias, no coincidentes las tres, son proyecciones paralelas de tres aristas \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC} de un cabo de vértice O .

Según ésto, podemos elegir los ejes y escalas que más nos interesen para que la perspectiva resulte clara e intuitiva, en cualquiera de los tres sistemas (trimétrico, dimétrico e isométrico), como se ve en los tres cubos de la figura 29.1, representados con los mismos ejes y distintas escalas.

29.2. Plantas auxiliares semejantes a las reales

Dada la dificultad que existe en axonometría oblicua para hallar la dirección de proyección y abatir for

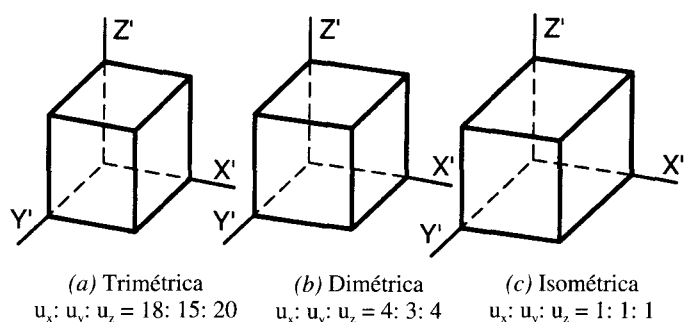


Fig. 29.1.—*Perspectivas axonométricas oblicuas de un cubo.*

mas planas, se prescinde de dicha dirección y de la longitud real del segmento unidad y se recurre a plan

tas (o alzados) semejantes a las reales, llamadas *plantas auxiliares semejantes*, como vamos a ver (núms. 6 y 9 de la "Representación de las Estructuras Constructivas" de A. Chèorghiu y V. Dragomir).

Sea $\Sigma \equiv ABC$ (Fig. 29.2) un triángulo de plano α y $\Sigma' \equiv A'B'C'$, su proyección oblicua sobre el cuadro π . Si trasladamos Σ , paralelamente a sí mismo, en la dirección de proyección $d_p \equiv AA'$, hasta que A coincida con A' y abatimos el nuevo triángulo $\Sigma_o \equiv A'B_oC_o$, de plano β , sobre el cuadro, alrededor de su traza t_β (paralela a t_α), en $(\Sigma_o) \equiv A'(B_o)(C_o)$, la proyección Σ' y el abatimiento (Σ_o) de Σ_o se corresponden (núm. 2,3-b) en una afinidad de eje t_β y par de puntos homólogos ζ

C' y (C_o) .

Si ahora giramos (Σ_o) , en el cuadro, alrededor de A' , hasta la posición $(\Sigma_o)'$, de lado $\overline{A'(B_o)'}'$ coincidente con $\overline{A'B'}$, el triángulo $(\Sigma_o)'$ no es afín de Σ' , pero si trazamos la paralela $B'C''$ a $(B_o)'$ $(C_o)'$ hasta cortar a $A'(C_o)'$, en C'' , el triángulo $\Sigma'' \equiv A'B'C''$ es homotético del $(\Sigma_o)'$ (igual al Σ) y afín del $\Sigma' \equiv A'B'C'$.

Esto demuestra que dada la proyección oblicua Σ' de un triángulo Σ de forma conocida, perteneciente a una figura plana F , si se construye, sobre $A'B'$ como lado, un triángulo Σ'' , semejante a Σ , la afinidad de eje $A'B'$ y puntos homólogos C' y C'' , existente entre Σ' y Σ'' , permite dibujar la proyección oblicua F' de F , como afín de F'' (semejante a F), construida a partir

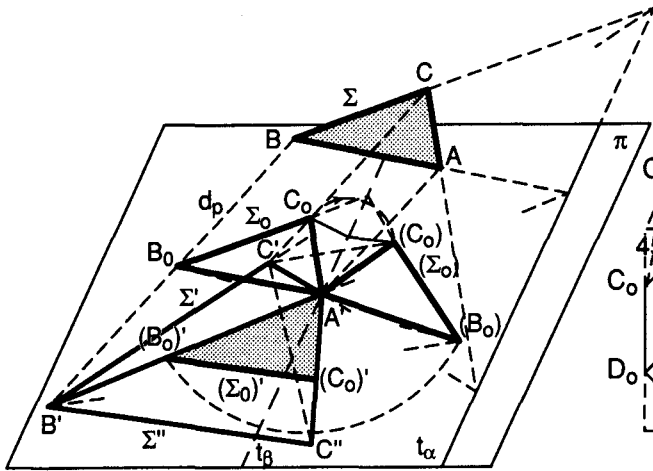
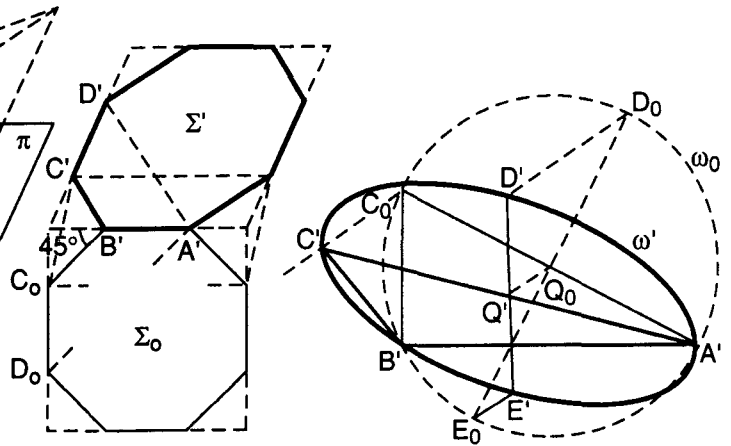


Fig. 29.2.—Planta auxiliar $A'B'C''$ semejante a la real ABC .



(a) Octógono regular.

(b) Circunferencia circunscrita a un triángulo.

Fig. 29.3.—Trazado de perspectivas por plantas auxiliares.

de Σ'' , y lo mismo sucede a la inversa.

Así, la perspectiva oblicua Σ' de un octógono regular de vértices consecutivos A' , B' y C' (Fig. 29.3-a) se halla fácilmente, trazando el octógono regular Σ_o , de lado $\overline{A'B'}$, homólogo de Σ' en una afinidad de eje $A'B'$ y par de puntos homólogos C' y C_o . La perspectiva se halla de forma inmediata por el paralelismo de lados y cuerdas, como se ve en la figura (ver núm. 31.17 de n/E. de G.D.).

Otro ejemplo: si se conoce (Fig. 29.3-b) la proyección oblicua $A'B'C'$ de un triángulo rectángulo ABC (no dibujado), de cateto $\overline{BC} = \overline{AB}/2$, y se quiere dibujar la imagen elíptica de la circunferencia ω circunscrita a él, se construye, sobre $\overline{A'B'}$ como cateto, el

triángulo rectángulo $A'B'C_o$, semejante al ABC , de cateto $\overline{B'C_o} = \overline{A'B'}/2$, y se traza la circunferencia ω_o , de diámetro $A'C_o$. El triángulo $A'B'C_o$ y la circunferencia circunscrita a él, son afines del triángulo $A'B'C'$ y de la elipse buscada ω' , en una afinidad de eje $A'B'$ y par de puntos homólogos C' y C_o . El homólogo del centro Q_o de ω_o es el centro Q' de ω' , y los homólogos de los diámetros $\overline{A'C_o}$ y $\overline{D_oE_o}$ de ω_o , perpendiculares entre sí, son diámetros conjugados $\overline{A'C'}$ y $\overline{D'E'}$ de ω' , que permiten dibujarla.

A continuación, se exponen dos métodos prácticos para dibujar perspectivas y pasar, de la planta dada en axonometría oblicua, a otra auxiliar semejante a la verdadera y a la inversa.

29.3. Método de falso abatimiento

Sean $\overline{O'A'} = u_x$, $\overline{O'B'} = u_y$ y $\overline{O'C'} = u_z$ (Fig. 29.4) las aristas del cubo unidad. Tracemos por O' la perpendicular a X' y tomemos sobre ella los segmentos $\overline{O'B_o} = \overline{O'C_o} = u_x$. Los cuadrados de vértices A' , O' , B_o y A' , O' , C_o son la *planta* y *alzado auxiliares semejantes* del cubo unidad y se corresponden con la planta y alzado axonométrico (paralelógramos de vértices A' , O' , B' y A' , O' , C') en dos afinidades, de eje común X' y par de puntos homólogos B' , B_o y C' , C_o .

Las plantas auxiliares parecen abatimientos de las axonométricas. De aquí el nombre de *falso abatimiento* con que se conoce este método.

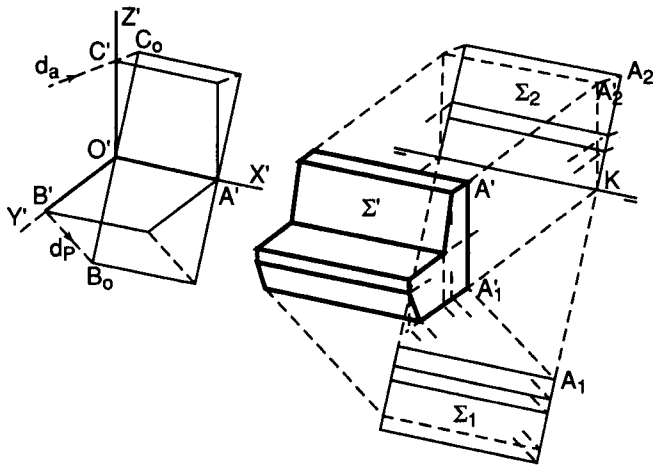


Fig. 29.4.—Método de falso abatimiento.

Para hallar la perspectiva Σ' de ejes X' , Y' y Z' , de una pieza dada por sus proyecciones diédricas Σ_1 y Σ_2 , se coloca la línea de tierra paralela a X' . La perspectiva $A'-A_1$ del vértice A se halla, trazando por la intersección K de A_1A_2 y LT , las paralelas KA_1' y KA_2' a Y' y Z' y refiriendo a ellas A_1 y A_2 , por paralelas a $d_p \equiv B'B_o$ y $d_a \equiv C'C_o$, se obtienen las proyecciones A_1' y A_2' que definen el punto A' y a partir de él, los restantes vértices.

Inversamente, para hallar las plantas auxiliares semejantes de una perspectiva Σ' dada, de ejes X' , Y' y Z' , se traza la línea de tierra paralela a X' y, por la proyección horizontal A_1' de A , paralelas a Y' y d_p que cortan a LT , en K , y a KA_1' (normal a LT), en A_1 . Se traza luego por K , la paralela a Z' y por A_1 , la paralela a Y' que se cortan, en A_2' y por este punto, la paralela a d_a que determina, sobre A_1K , la otra proyección A_2 de A y a partir de éste, los restantes vértices, como se ve en la figura.

29.4. Método de plantas independientes

Sean $\overline{O'B'} = u_x$, $\overline{O'A'} = u_y$ y $\overline{O'C'} = u_z$ las aristas del cubo unidad de ejes X' , Y' y Z' (Fig. 29.5). Para hallar la planta auxiliar de la planta axonométrica Δ'_1 del prisma Δ' (Fig. a), se trazan por A' y B' paralelas a Z' y una normal a Z' que corta a las paralelas y a Z' , en M , N y O_o , respectivamente. Sobre las paralelas se llevan luego los segmentos $\overline{NB_o} = \overline{O_oM} = m$ y $\overline{MA_o} = \overline{O_oN} = n$ que determinan dos triángulos rectángulos A_oMO_o y O_oNB_o , iguales y de hipotenusas O_oA_o y O_oB_o perpendiculares entre sí. Las paralelas a los ejes $X'_o \equiv O_oB_o$ e $Y'_o \equiv O_oA_o$ trazadas por A_o y B_o determinan la planta auxiliar P'_{o1} del vértice P'_1 y a partir de él, los restantes (núm. 38 de la "Geometría Constructiva" de F. Hohenberg).

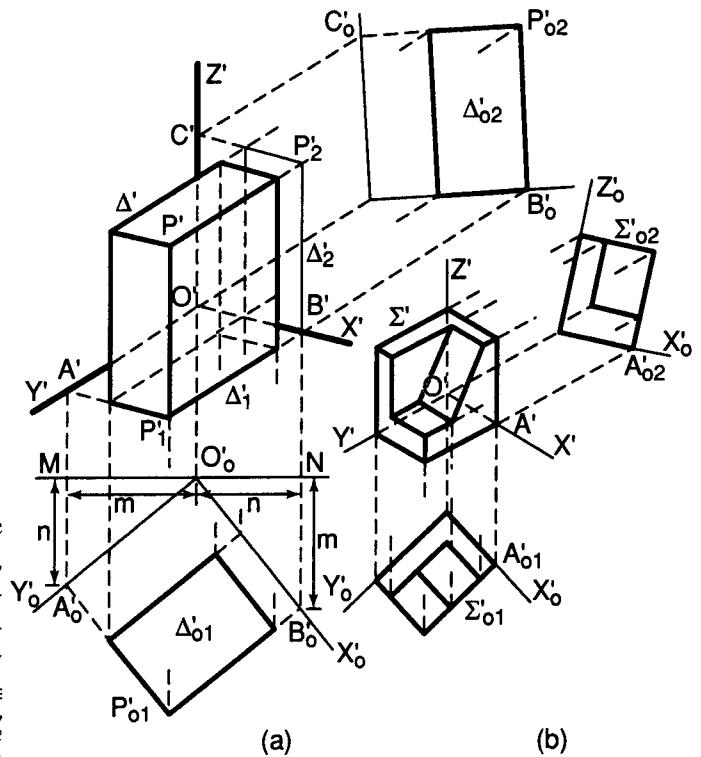


Fig. 29.5.—Método de plantas independientes.

La planta obtenida Δ'_{o1} es semejante a la real Δ_1 del prisma y se corresponde con Δ'_1 en una afinidad de dirección Z' y pares de puntos homólogos O' , O_o ; A' , A_o y B' , B_o que permiten dibujarla.

El azado auxiliar Δ'_{o2} de la proyección vertical Δ'_2 se obtiene de forma análoga, como indica la figura.

Inversamente, si dos proyecciones ortogonales (o axonómicas) de un objeto (dibujadas a la misma o a distinta escala) se colocan en posiciones arbitrarias Σ'_{01} y Σ'_{02} (Fig. b), se obtiene una perspectiva axonómica oblicua, por medio de paralelas a dos direcciones arbi-

trarias Z' e Y' y una vez elegidas éstas, la intersección A' de las paralelas a Z' e Y' , trazadas por un punto A'_{01} - A'_{02} de X , determina la dirección $O'A' \equiv X'$ del tercer eje. (Ver cap. 31 de n/E. de G.D.).

PERSPECTIVA FRONTAL

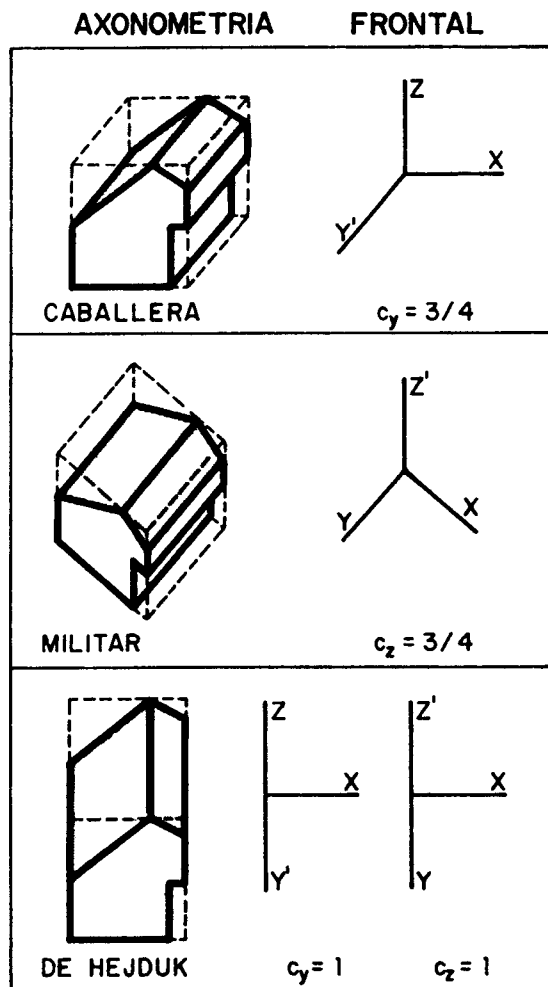


Fig. 29.6.—Perspectivas frontales.

29.5. Generalidades

Axonometría frontal es una axonometría oblicua, con un plano coordenado coincidente o paralelo al cuadro. Según que el cuadro coincida o sea paralelo al $[XZ]$ o al $[XY]$ la perspectiva se llama *caballera* o *militar*.

Los ejes paralelos al cuadro se proyectan en verdadera magnitud por lo que sólo se utiliza el coeficiente de reducción c_y o c_z del tercer eje (perspectiva dimétrica).

La figura 29.6 es un ejemplo de perspectiva caballera y militar de ángulos $ZY' = Z'Y$ y coeficientes $c_y = c_z = 3/4$.

La perspectiva de Hejduk (Fig. inferior) es un caso particular de perspectiva isométrica frontal (caballera o militar) de ángulos $ZY' = Z'Y$, utilizada modernamente en Arquitectura para representación de viviendas. De aquí el nombre de *perspectiva caballera-militar*, dado por el profesor Sánchez-Gallego en su "Geometría Descriptiva para Arquitectos" (tomo 3), publicada por la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona.

29.6. Perspectiva caballera

Se utiliza en el dibujo técnico para representar cuerpos o dispositivos con figuras paralelas al cuadro, por proyectarse éstas en verdadera magnitud. El cuadro se

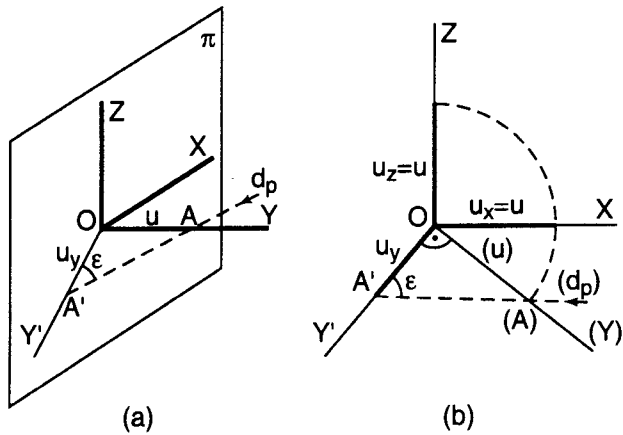


Fig. 29.7. - Perspectiva caballera.

coloca generalmente coincidente (o paralelo) con el primer vertical (Fig. 29.7-a). En esta posición, los ejes

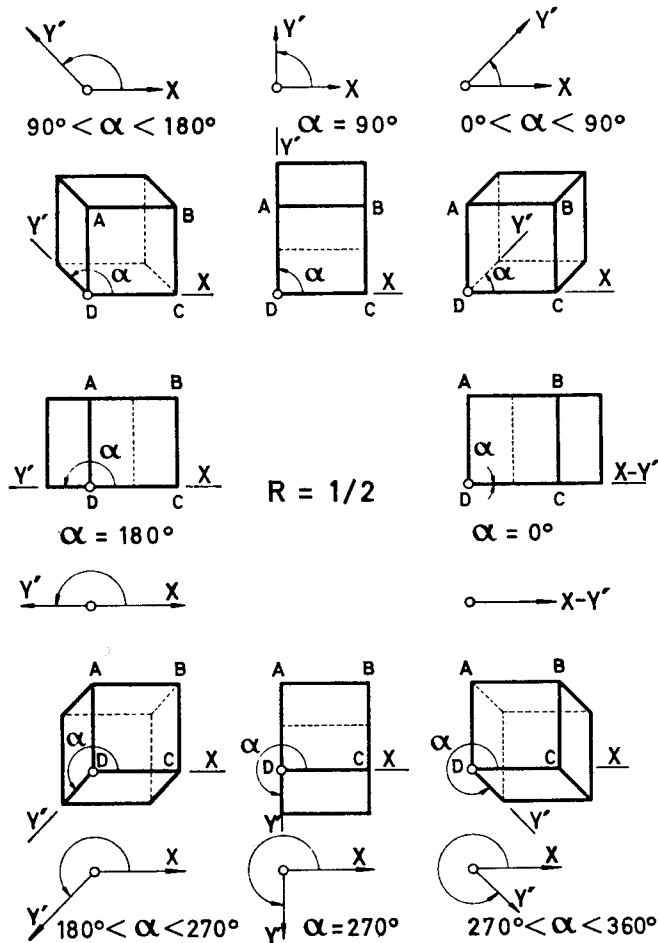


Fig. 29.8. - Perspectiva de un cubo con distintos ángulos $\alpha = \widehat{X'Y'}$.

X' y Z' coincidan con el cuadro, luego:

$$X \equiv X' \text{ y } Z \equiv Z' \quad u_x = u_z = u \quad \text{y} \quad c_x = c_z = 1$$

Como la proyección Y' del eje Y , normal al cuadro,

es arbitraria, para determinar la perspectiva hay que dar la dirección de Y' y el coeficiente de reducción:

$$c_y = \overline{OA'} / \overline{OA} = u_y / u = \cotg \epsilon$$

siendo ϵ el ángulo que la dirección de proyección d_p forma con el cuadro.

Si abatimos el triángulo rectángulo OAA' sobre el cuadro, alrededor de Y' (Fig. b), el abatimiento (A) de A estará en la normal $O(A) \equiv (Y)$ a Y' , a distancia $\overline{O(A)} = u$ de O . El abatimiento $(d_p) \equiv (A)A'$ de la dirección de proyección, determina la inclinación ϵ de ésta con el cuadro.

En la práctica, los coeficientes de reducción más utilizados para que la perspectiva resulte natural y proporcionada, son: $1/2$, $2/3$ y $3/4$ y los ángulos de Y' con los ejes, los que pueden tomarse con la escuadra y cartabón, es decir, 30° , 45° y 60° .

En la figura 29.8, pueden verse las parte vistas y ocultas de las perspectivas de un cubo, dibujadas con distintos ángulos $\alpha = \widehat{X'Y'}$. La perspectiva normalizada utiliza un coeficiente de reducción $R = c_y = 1/2$ y un ángulo $\widehat{X'Y'} = 45^\circ$ (norma UNE 1-031-75).

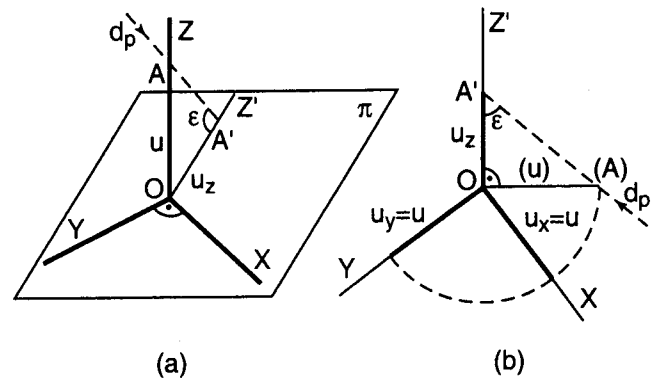


Fig. 29.9. - Perspectiva militar.

29.7. Perspectiva militar

Su nombre se debe a haberse utilizado inicialmente por los ejércitos de Napoleón en el diseño y representación de fortificaciones, habiéndola mantenido celosamente guardada durante años, como secreto militar. Se utiliza pra representar formas de poca altura, en relación con su planta o que tengan muchas figuras horizontales (planos de conducciones y tuberías, industrias, urbanizaciones, planos turísticos, etc.).

El cuadro coincide con el plano $[XY]$ (Fig. 29.9-a) y la proyección Z' de Z se coloca vertical. La perspectiva (Fig. b) queda determinada, dando el ángulo $Z'X$ (o la dirección de X) y el coeficiente de reducción:

$$c_z = \overline{OA'} / \overline{OA} = u_z / u = \cotg \epsilon, \text{ siendo } u_x = u_y = u.$$

Abatiendo el triángulo rectángulo AOA' (Fig. b), se obtiene el abatimiento $\overline{O(A)} = (u)$ del cateto \overline{OA} y el $(A)A' \equiv (d_p)$ de la dirección de proyección d_p que determina la inclinación ε de d_p , respecto al cuadro.

Los valores más usuales del ángulo XZ' son 120° , 135° o 150° y los de c_z : $1/2$, $2/3$ o $3/4$.

En la figura 29.10, se ve claramente la obtención rápida de las perspectivas caballera y militar de la maqueta prismática de un edificio de viviendas, dado por su planta y alzado. El coeficiente de reducción de ambas es $3/4$.

29.8. Representación de punto, recta y plano

Todo lo dicho en axonometría ortogonal, sobre representación de punto, recta y plano, incidencia, intersecciones y paralelismo, sirve también para la axonometría oblicua y frontal, por lo que no insistiremos sobre ello. No sucede lo mismo con las propiedades métricas, abatimientos, perpendicularidad y distancias que a continuación estudiaremos.

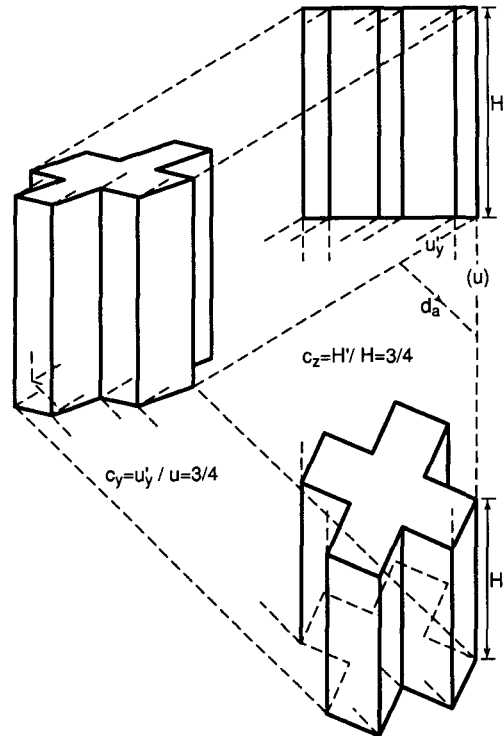
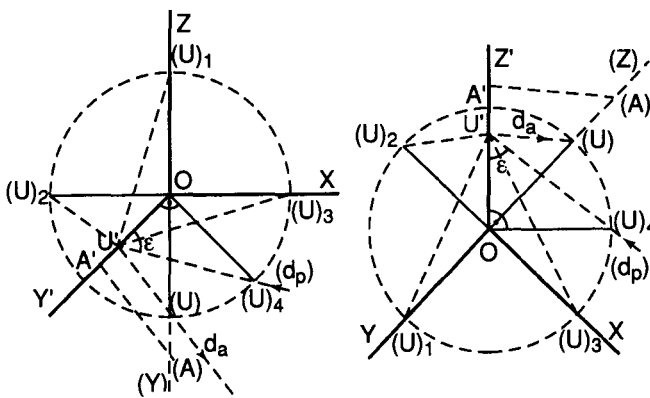


Fig. 29.10.—Perspectiva de una maqueta de edificio.

ABATIMIENTO Y PERPENDICULARIDAD



(a) Perspectiva caballera. (b) Perspectiva militar.

Fig. 29.11.—Abatimientos de ejes.

29.9. Abatimientos

Al abatir del plano horizontal $[XY]$ sobre el cuadro, alrededor del eje X (Fig. 29.11-a), el abatimiento del eje Y , normal al X , coincide con la prolongación de Z y el del segmento unidad $\overline{OU} = u$, de imagen $\overline{OU'} = u_y$, es $\overline{O(U)} = (u)$, quedando así definida una afinidad

oblicua de eje X , dirección de afinidad $d_a = U'(U)$ y par de puntos homólogos U' y (U) . El abatimiento de un punto A' de Y' es la intersección (A) de (Y) con la paralela a d_a , trazada por A' .

El coeficiente de reducción se expresa gráficamente, dando sobre Y' la unidad axonométrica $u_y = \overline{OU'}$ y, sobre (Y) , la unidad $(u) = u$ o numéricamente, por el cociente $c_y = \overline{OU'}/\overline{O(U)} = u_y/u$.

Si $[XY]$ se abate en sentido contrario, la dirección de afinidad es $U'(U)_1$. Si se abate el segundo vertical $[YZ]$, la charnela (eje de afinidad) es Z ; la dirección de afinidad es $U'(U)_2$ y el par de puntos homólogos, U' y $(U)_2$ y si se abate en sentido contrario, $U'(U)_3$.

El abatimiento de la dirección de proyección d_p de la perspectiva es $(d_p) \equiv (U)_4U'$, siendo $O(U)_4$ el segmento unidad normal a Y' y $\varepsilon = \overline{OU'(U)_4}$, la inclinación de d_p , respecto al cuadro.

En perspectiva militar (Fig. b), al abatir el plano $[XZ]$ alrededor de X , el abatimiento de $\overline{OU'} = u_z$ es $\overline{O(U)} = u$; la dirección de afinidad es $d_a = U'(U)$ y, el coeficiente de reducción $c_z = \overline{OU'}/\overline{O(U)} = u_z/u$. Los demás abatimientos y el (dp) de dp , se obtienen de forma análoga.

Se obtiene así una afinidad oblicua de eje v_α (charnela), dirección de afinidad $d_a \equiv A'(A)$ y par de puntos homólogos A' y (A) . Para hallar el abatimiento del punto M de α , se traza por M la recta AN , abatida en $N(A)$ y la paralela a d_a que corta a $N(A)$, en el abatimiento (M) de M . (También puede utilizarse la paralela s' a v_α).

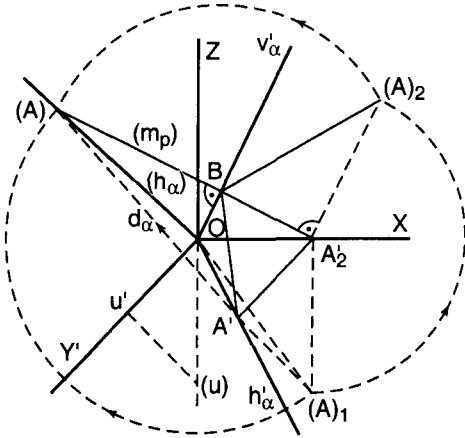


Fig. 29.15.—Abatimiento de un plano que pasa por el origen

d) Plano que pasa por el origen (Fig. 29.15). Se toma un punto arbitrario A' de h'_α y se aplica uno de los dos métodos explicados. La recta de máxima pendiente es la \overline{AB} , abatida en $\overline{B(A)}$.

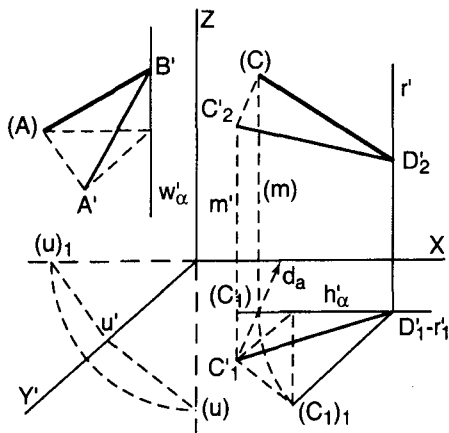


Fig. 29.16.—Distancia entre dos puntos.

29.10. Distancia entre dos puntos

Se obtiene por abatimiento del segmento determinado por los puntos dados. Si el segmento \overline{AB} (Fig. 29.16) está en el plano $[YZ]$, por ejemplo, se abate sobre el plano frontal (paralelo al cuadro), de traza w'_α que pasa por B' . El abatimiento (A) del otro extremo

A' , determina el abatimiento buscado $\overline{B'(A)}$.

La distancia entre C y D se obtiene, abatiendo el plano vertical que contiene el segmento \overline{CD} sobre el plano de frente α que pasa por D , siendo $r'-r'_1$ la charnela. El abatimiento (C_1) de C_1 estará sobre h'_α y distará de D_1 la longitud $\overline{D_1C_1}$, abatida sobre α en $\overline{D'_1(C_1)}$, siendo $\overline{D'_1(C_1)} = \overline{D_1(C_1)}$; $d_a = C_1(C_1)$, la dirección de afinidad, y (m) , el abatimiento de m' . La paralela a d_a , trazada luego por C_2 , corta a (m) , en el abatimiento (C) de C y determina el abatimiento $\overline{D'_2(C)}$ del segmento \overline{CD} .

29.11. Recta perpendicular a un plano

Como ya se sabe, si una recta p es perpendicular a un plano α (Fig. 29.17), sus proyecciones ortogonales p_1, p_2 y p_3 sobre los planos coordenados son perpendiculares a las trazas homónimas $h_\omega, v_\omega, w_\alpha$ del plano. Esto sucede con p_2' y v'_α por coincidir el primer vertical con el cuadro, pero p_1' y h'_α no lo son, por tratarse de una proyección oblicua, luego hay que abatir ambas. Por tanto:

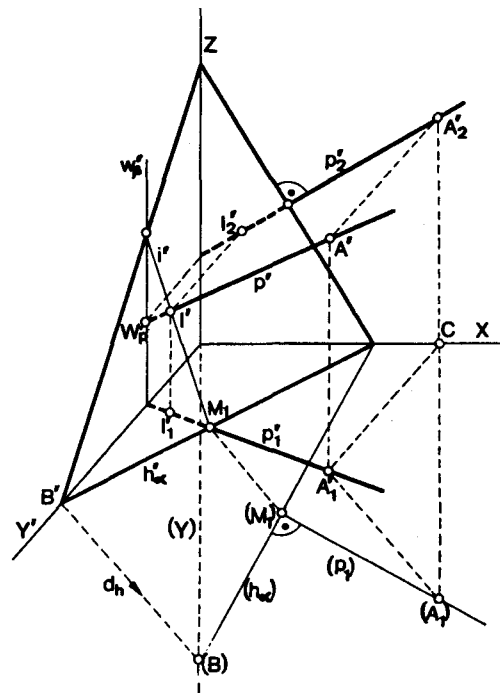


Fig. 29.17.—Recta perpendicular a un plano.

Para trazar por un punto $A'-A_1$ la perpendicular p al plano α , se traza por la proyección A'_2 del punto, la perpendicular p'_2 a v'_α . Se abate luego A_1 y h_α sobre el cuadro, en (A_1) y (h_α) y desde (A_1) se traza la perpendicular $(p_1) \equiv (A_1)(M_1)$ a (h_α) , desabatida en p'_1 , cuya traza W'_p determina la proyección directa p' y la intersección $I'-I'_1$ de p y α .

La normal a α desde O también puede hallarse (Fig. 29.18), trazando por Y el plano perpendicular al α , de traza r'_2 , perpendicular a v'_α siendo $r \equiv AB$ la recta de máxima pendiente de α . El triángulo $OB'A$ se abate luego sobre el cuadro, alrededor de r'_2 , en $OB'(A)$ (siendo $\overline{O(A)} = \overline{O(A)_1}$) y se traza por O la perpendicular (p) a $\overline{B'(A)}$, desabatida en $p' \equiv OI'$, obteniéndose así la perpendicular $p'-p'_1$ a α , su intersección $I'-I'_1$ con α y la verdadera magnitud de $\overline{AB} = \overline{B'(A)}$ y $\overline{OI} = \overline{O(I)}$.

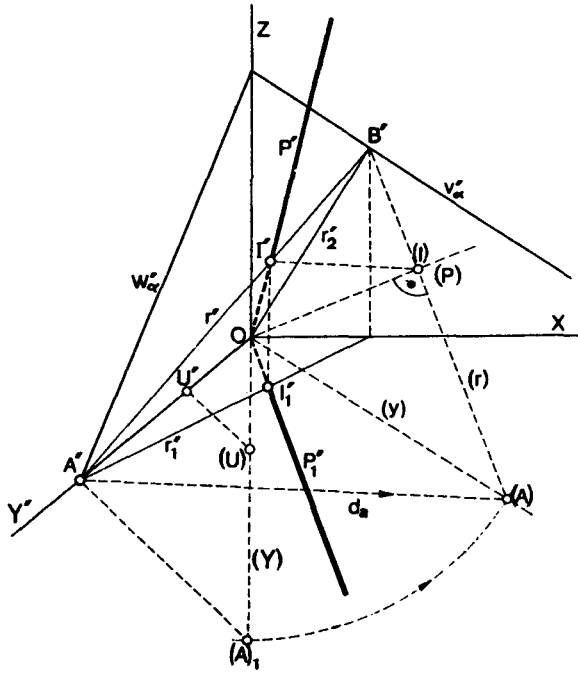


Fig. 29.18.—Perpendicular trazada desde el origen.

29.12. Plano perpendicular a una recta

Para trazar por el punto $M'-M'_1$ (Fig. 29.19-a) el plano α perpendicular a una recta dada $r'_1-r'_2$, se abate r'_1 en (r_1) (abatido un punto A'_1 de r'_1) y se traza la perpendicular (p_1) a (r_1) , desabatida en $p'_1 \equiv B'_1C'_1$ que es la imagen de la dirección normal a (r_1) y por tanto, paralela a h'_α .

Se traza luego por M la horizontal $s'-s'_1$ de α , paralela a p'_1 y por su traza V'_α , la normal v'_α a r'_2 que determina, al cortar a X , la otra traza h'_α de α , paralela a p'_1 .

En perspectiva militar, las construcciones de per-

29.13. Método general

Como ya se dijo en axonometría ortogonal, para representar una forma de plano α se abate éste sobre

pendicularidad y abatimientos son análogas a las explicadas en caballera, como puede comprobarse en el abatimiento $AB(C)$ (Fig. 29.19-b) del plano $\alpha \equiv [ABC']$ y en la perpendicular $r'-r'_1$ a α , trazada desde O , no siendo necesaria explicación alguna.

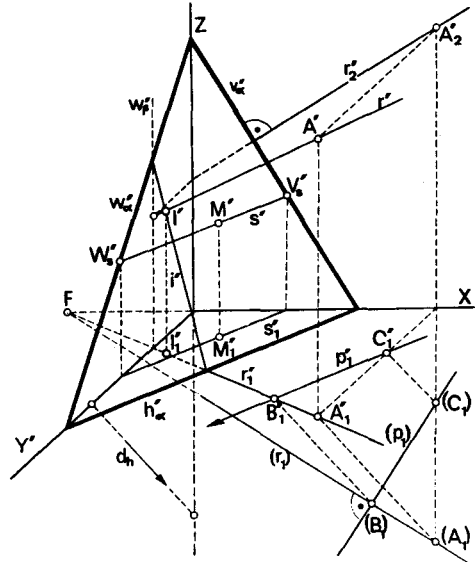


Fig. 29.19a.—Plano perpendicular a una recta.

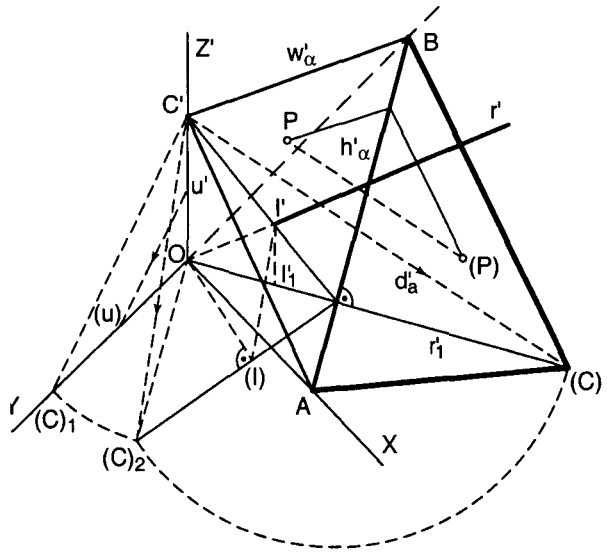


Fig. 29.19b.—Abatimiento y perpendicularidad en perspectiva militar.

FIGURAS PLANAS

el cuadro (o sobre otro paralelo a él). La proyección directa A' y el abatimiento (A) de un punto A de α se corresponden en una afinidad oblicua de eje v'_α y par de puntos homólogos A' y (A) .

En el caso de circunferencias, su imagen es una elipse y la perspectiva de dos diámetros de la circunferencia, perpendiculares entre sí, son diámetros conjugados de la elipse proyección.

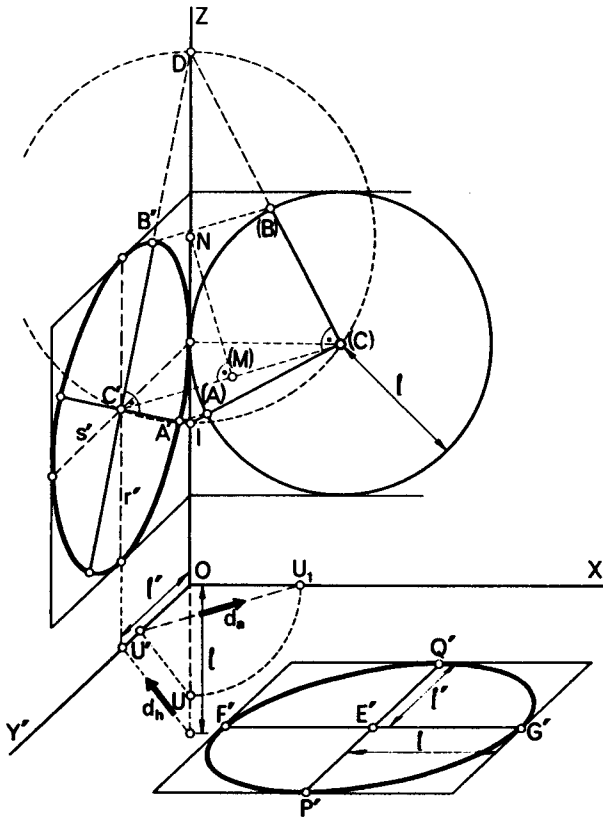


Fig. 29.20. - Circunferencias de plano coordenado.

29.14. Circunferencia de plano coordenado

a) La situada en el cuadro o en un plano frontal (paralelo al cuadro) se proyecta en verdadera magnitud. La de centro E' y radio l , situada en el horizontal (Fig. 29.20), se proyecta, según una elipse de semidiámetros conjugados paralelos a X e Y' , siendo $\overline{E'F'} = \overline{E'G'} = l$ y $\overline{E'P'} = \overline{E'Q'} = l'$ (radio reducido), obtenido directamente por abatimiento de Y .

También puede dibujarse, por afinidad, abatiendo la circunferencia sobre el plano frontal de traza $F'G'$.

b) Los ejes de la elipse pueden hallarse directamente, como se ha hecho en la circunferencia de centro C y radio l , de plano $[YZ]$. Una vez abatido el centro C' , en (C) , se traza la mediatriz $(M)N$ del segmento $\overline{C'(C)}$

que corta a Z en N . La circunferencia de centro N y radio $\overline{NC'} = \overline{N(C)}$ corta a Z en D e I , siendo $\overline{(C)D}$ y $\overline{(C)I}$ los homólogos de los ejes buscados $\overline{C'D}$ y $\overline{C'I}$, por ser $D(\widehat{C})I$ y $D\widehat{C'I}$ ángulos inscritos en la semicircunferencia de diámetro DI . Los vértices A' y B' son los homólogos de (A) y (B) .

29.15. Circunferencia de plano cualquiera

La imagen ω' de la circunferencia ω de centro C' , radio R y plano α (Fig. 29.21), se halla por abatimiento

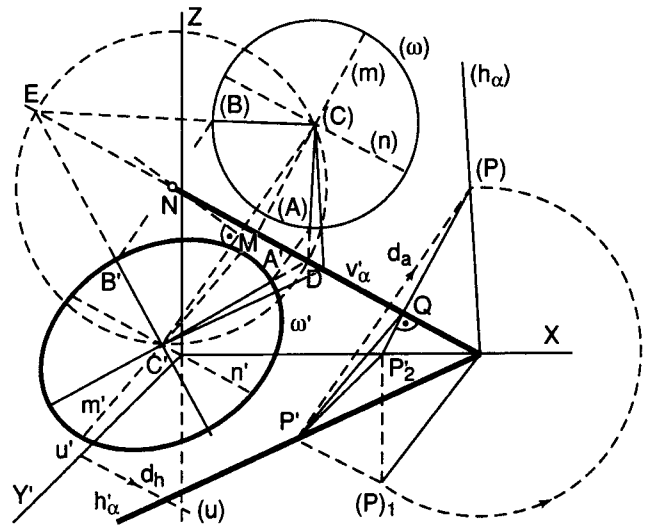


Fig. 29.21. - Circunferencia de plano cualquiera.

to de α , trazando por un punto P' de h'_α la recta $\overline{P'Q}$ de máxima pendiente de α respecto al cuadro, abatida en $\overline{Q(P)}$, (núm. 29.9-c) que determina la traza abatida (h_α) . Se abate luego el centro C' , en (C) , (por medio de la horizontal de α que pasa por él) y se traza la circunferencia abatida (ω) , de centro (C) y radio R y los diámetros (m) y (n) de (ω) , perpendicular y paralelo a la charnela v'_α . Al desabatir, se obtienen los diámetros conjugados m' y n' (paralelo a v'_α) de ω' que permiten dibujar ésta.

En la figura se han hallado directamente los ejes (núm. 29.14-b), trazando la mediatriz MN de $\overline{C'(C)}$ que corta a la charnela en N . La circunferencia de centro N y radio $\overline{N(C)} = \overline{NC'}$, corta a v'_α en D y E y determina dos diámetros perpendiculares $\overline{(C)D}$ y $\overline{(C)E}$ de (ω) cuyos homólogos $\overline{C'D}$ y $\overline{C'E}$ son también perpendiculares, es decir, los ejes de ω' . Los vértices A' y B' son los homólogos de (A) y (B) .

30. PERSPECTIVA DE CUERPOS. SOMBRAS

30.1. Generalidades

La representación de cuerpos en axonometría frontal es análoga a la estudiada en axonometría ortogonal, excepto lo referente a las propiedades métricas, como ya se dijo.

Dado el carácter fundamental representativo de este sistema, en la práctica, sólo se dibuja la perspectiva o imagen directa del cuerpo, prescindiendo incluso de los ejes aunque, como ya se sabe, para definir el cuerpo hay que conocer también una de sus proyecciones axonométricas.

30.2. Perspectiva práctica. Normas de trazado

En los dibujos, se utilizan ciertas simplificaciones para que la perspectiva resulte clara y sobre todo, sencilla. Las más usadas son:

a) *Colocación del cuerpo* (Fig. 30.1). Las tres direcciones principales del cuerpo se hacen coincidir con los ejes. El X suele ser el de anchuras; el Z (colocado verticalmente), el de alturas y el Y, el de longitudes o "eje de profundidad", por materializar la dirección normal al dibujo y dar idea de la profundidad de la figura, respecto al plano del papel. El coeficiente de reducción se designa por c_y o R.

Las caras que contengan curvas o círculos se colocan paralelas al cuadro para que aparezcan en verdadera magnitud.

b) *Supresión de los ejes*. Generalmente, no se dibujan los ejes. Las dimensiones, si es posible, se toman directamente sobre la perspectiva y se prescinde de la proyección horizontal. En el dibujo sólo aparece la perspectiva y en caso necesario, el coeficiente de reducción R y el ángulo α que Y' forma con el eje horizontal X.

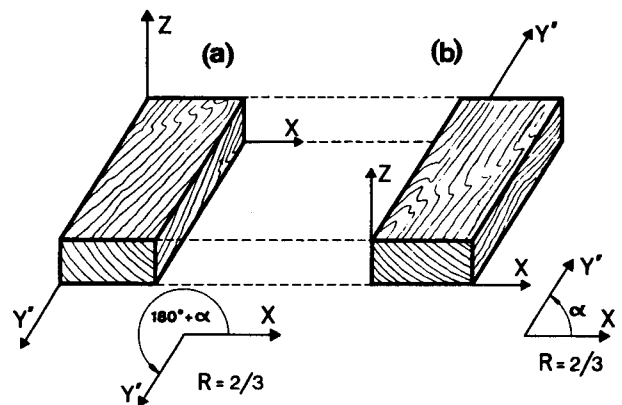


Fig. 30.1.—Perspectiva práctica.

En la figura b), para dibujar un tablón de sección rectangular y longitud l , se dibuja la sección igual a la dada y por sus vértices, se trazan paralelas a Y' , de longitud $l' = 2l/3$, que determinan la perspectiva buscada.

c) *Ángulo de los ejes.* De las dos caras paralelas al cuadro, la más próxima al observador es la vista por eso, en perspectiva rápida (Fig. b), se comienza dibujando dicha cara de trazo continuo y luego, las aristas paralelas a Y' , en sentido contrario al de la figura a).

Una vez fijado el sentido positivo de Y , el ángulo que éste forma con la dirección positiva de X es α (Fig. b) ó $180 + \alpha$ (Fig. a), obteniéndose en ambas la misma perspectiva.

d) *Ángulos combinados.* Para representar acoplamientos de piezas (uniones, ensambladuras, tornillos y tuercas, etc.), suelen dibujarse éstas separadas pero correspondiéndose las partes que se han de acoplar,

para que resulten vistas (ver figura 28.10).

Cada perspectiva se dibuja con el mismo ángulo o con ángulos diferentes cuya suma sea 360° y la dirección de acoplamiento, con línea de trazos (Fig. 30.2). Las direcciones de Y' se eligen simétricas respecto a X o a Z , según que el acoplamiento sea en dirección normal a X o a Z , respectivamente.

30.3. Perspectiva rápida de figura

a) La figura 30.3 representa una estrella, de vértices coincidentes con los del cuadrado $ABCD$ y lados for-

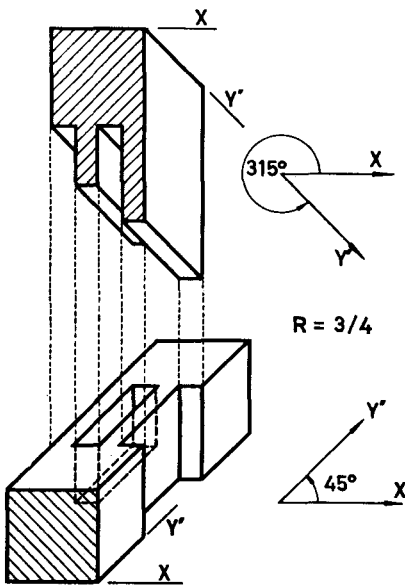


Fig. 30.2. - Unión a caja y espiga.

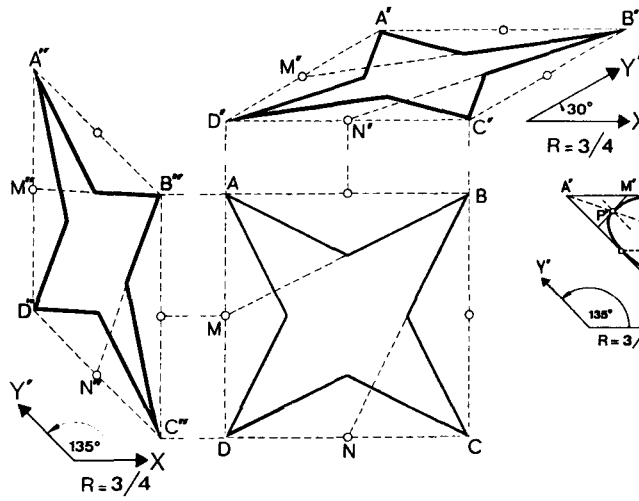
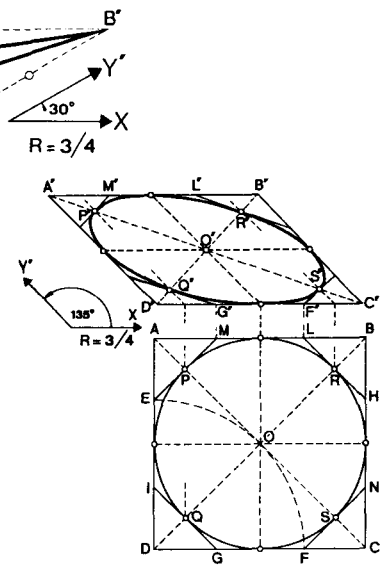


Fig. 30.3. - Figura plana estrellada.



(a) Circunferencia.

Fig. 30.4. - Perspectiva de curvas.

mados por las rectas que unen cada vértice B con los puntos medios M y N de los lados opuestos del cuadrado.

La perspectiva del cuadrado, supuesto horizontal, se halla trazando el lado $\overline{D'C'} = \overline{DC}$ horizontal y por sus extremos D' y C' , paralelas a Y' , de longitud $\overline{D'A'} = \overline{C'B'} = 3\overline{CB}/4$ que definen la perspectiva $A'B'C'D'$. Se hallan luego los puntos medios de los lados y se unen, como se ha dicho. La estrella $A''B''C''D''$ de plano vertical se obtiene de forma análoga.

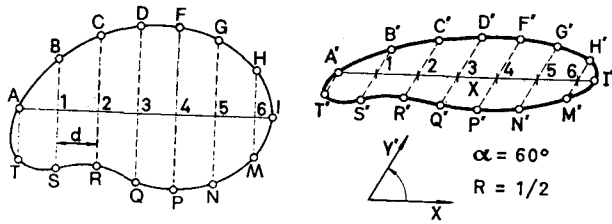
b) La perspectiva de la circunferencia de centro O y radio r (Fig. 30.4-a) se halla fácilmente, dibujando aparte la circunferencia (sólo es necesaria media circunferencia) y el cuadrado circunscrito $ABCD$ (de lado horizontal) y hallando su perspectiva, como antes se ha

dicho, trazando $\overline{C'D'}$ paralelo o coincidente con AB .

Las tangentes a la circunferencia paralelas a las diagonales, determinan un octógono regular $EML...GI$, circunscrito a ella. Los vértices M y L , referidos a $C'D'$, en G' y F' y las paralelas $G'M'$ y $F'L'$ a Y' determinan las tangentes $M'P'$, $L'R'$, ..., paralelas a las diagonales que cortan a éstas en los puntos de tangencia P' , R' , S' y Q' . Se obtienen así ocho puntos y sus tangentes respectivas que permiten dibujar la elipse.

Los vértices $M, L, H, ...$ del octógono son las intersecciones de los lados del cuadrado con los arcos de centros A, B, C y D y radio igual a la semidiagonal $\overline{DO} = \overline{DE} = \overline{DF}$, lo cual permite tomar directamente en la perspectiva $\overline{C'G'} = \overline{D'F'} = \overline{BO} = \overline{BM}$.

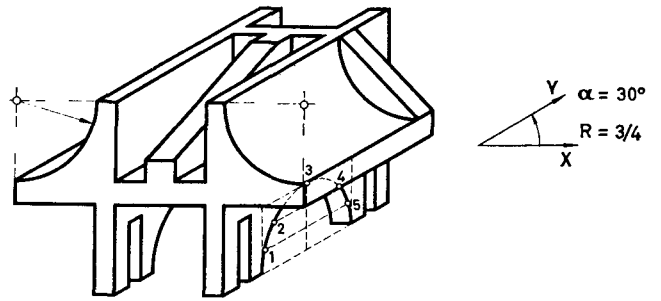
c) En el caso de curvas irregulares $ABC...ST$, de plano horizontal (Fig. b), basta trazar sobre la perspectiva $A'T'$ de una cuerda arbitraria AI , paralela a X , una serie de puntos 1, 2, ..., 6, distanciados entre sí una



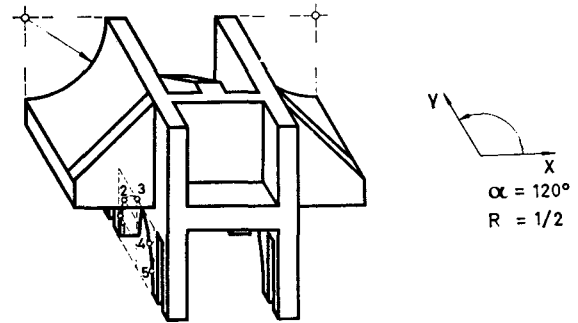
(b) Curva irregular.

Fig. 30.4.—Perspectiva de curvas.

longitud arbitraria d . Sobre las cuerdas paralelas a Y' , trazadas por dichos puntos, se llevan luego longitudes $\overline{TB'} = \overline{TB}/2$, $\overline{TS'} = \overline{TS}/2$, ..., etc., cuyos extremos determinan la perspectiva $A'B'C'...S'T'$ buscada.



(a) Vista anterior.



(b) Vista posterior.

Fig. 3.6.—Perspectivas en proyección desde arriba.

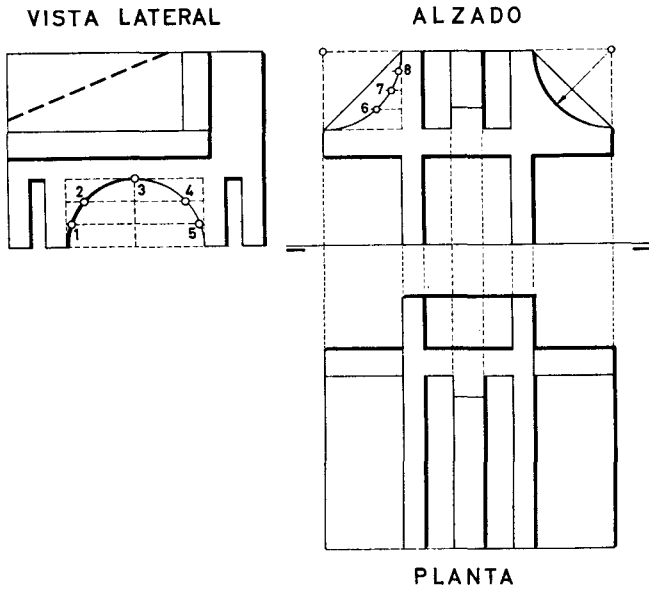
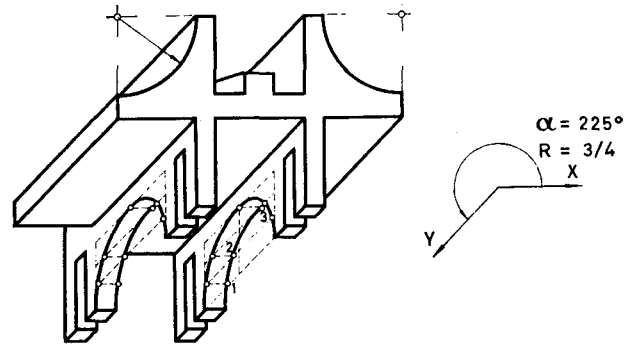
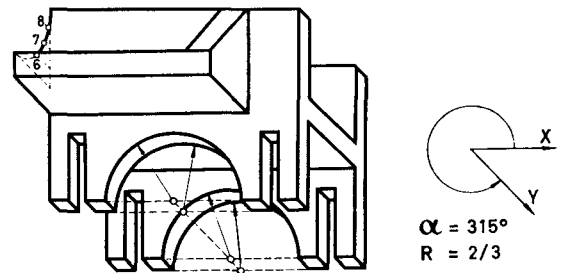


Fig. 30.5.—Pieza de bordes rectos y curvos, representada en diédrica.

d) Como resumen de lo expuesto, en las figuras 30.6 y 30.7, se han dibujado diversas perspectivas de la pieza de bordes rectos y curvos, representada en diédrica (Fig. 30.5), para que pueda apreciarse la influencia de los distintos ángulos y coeficientes de reducción empleados.



(a) Vista anterior.



(b) Vista lateral.

Fig. 30.7.—Perspectivas en proyección desde abajo.

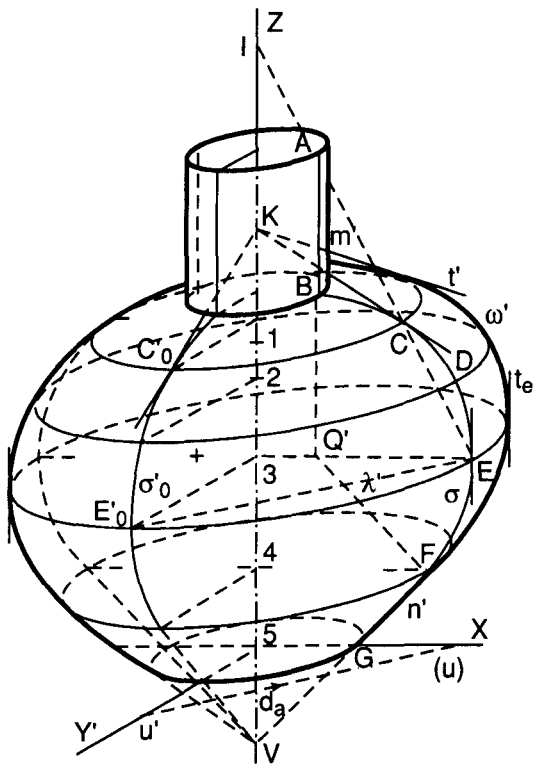
30.4. Superficies de revolución

La figura 30.8-a es la perspectiva caballera de una superficie de revolución de eje vertical Z y meridiano frontal formado por el segmento \overline{AB} , paralelo a Z ; el arco circular $\sigma \equiv BF$, de centro Q y radio \overline{QB} y el segmento \overline{FG} tangente a σ , en F .

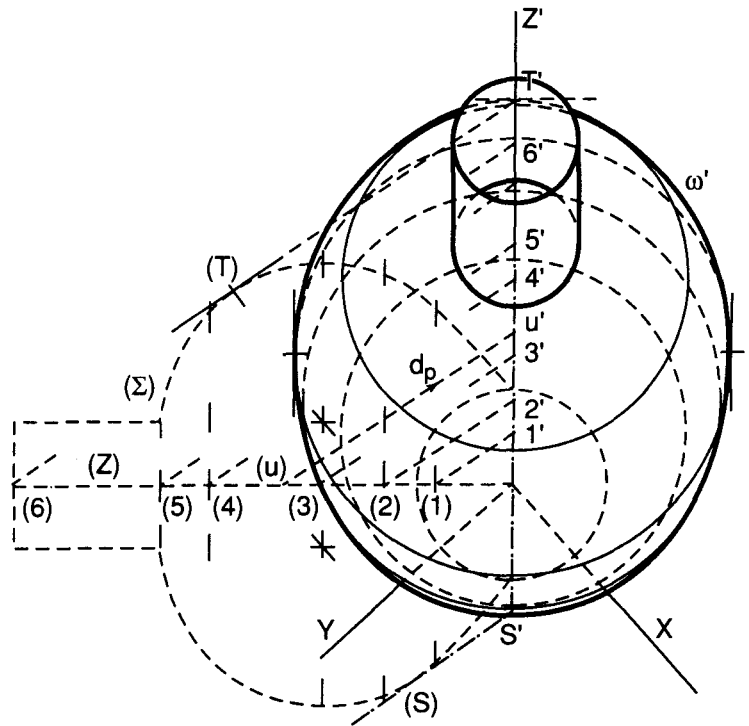
El ecuador λ se proyecta según la elipse λ' de semi-diámetros conjugados $\overline{3E}$ y $\overline{3E'}$, paralelos a los ejes, siendo $EE'o$ paralela a d_u y lo mismo sucede con los demás paralelos, lo cual permite dibujarlos.

Los paralelos que pasan por C y E , por ejemplo, son homotéticos en el espacio, de centro I (intersección de CE con el eje), luego sus imágenes son homotéticas, de centro $I' \equiv I$ y par de puntos homólogos C y E , (núm. 2,5).

El meridiano σ'_o de plano $[YZ]$, por ejemplo, se obtiene por giro del σ , alrededor del eje luego σ'_o y σ' se corresponden (núm. 2,2) en una afinidad de eje Z y par de puntos homólogos E'_o y E . Las tangentes homólogas en C , C'_o concurren en un punto K del eje Z , pudiéndose así trazar cuantos puntos y tangentes se deseen.



(a) Perspectiva caballera.



(b) Perspectiva militar.

Fig. 30.8.—Superficie de revolución.

El contorno aparente ω' es la envolvente de las imágenes de los paralelos. Limitándonos a la mitad de la derecha, la generatriz del contorno aparente del cilindro superior es la vertical m' tangente a las bases y en el cono de vértice V , la generatriz n' tangente a las elipses de centros 4 y 5.

En el cilindro circunscrito a la superficie según el ecuador λ , la generatriz de contorno aparente es la vertical t_e , tangente a λ' y ω' en el mismo punto y en el cono de vértice K , circunscrito según el paralelo de

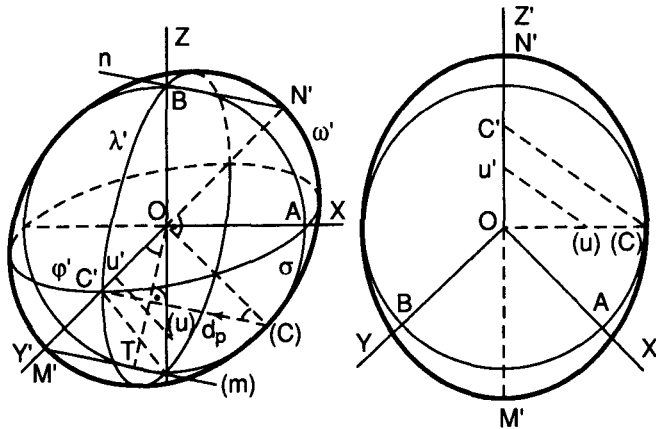
centro 1, la generatriz de contorno t' es tangente a ω' y a la imagen del paralelo en el mismo punto, lo cual permite dibujar ω' con más exactitud.

En perspectiva militar (Fig. b), la perspectiva se obtiene más fácilmente, por abatimiento de la sección Σ de la superficie por el plano $[Z, Z']$, en (Σ) . Al desabatir, se obtienen los centros $1', 2', \dots, 6'$ de los paralelos, de imágenes circulares, de envolvente ω' . Las tangentes a (Σ) , paralelas a d_p , determinan los puntos de corte T' y S' de ω' con Z' .

30.5. Esfera

El contorno aparente ω' de la esfera de centro O y radio $R = \overline{OA}$ (Fig. 30.9-a) es la elipse sección del plano del cuadro con el cilindro proyectante de la esfera, según la dirección de proyección d_p de la perspectiva.

Para hallarla, se abate el plano $[YY']$, proyectante de d_p , que corta a la esfera, según un círculo máximo, abatido en σ y al cilindro, según las generatrices tangentes a dicho círculo, abatidas según las tangentes (m) y (n) a σ , paralelas a d_p , que cortan a Y' en los extremos del eje mayor $M'N'$ de ω' , siendo $\overline{O(C)} = R$ el otro semieje.



(a) Perspectiva caballera. (b) Perspectiva militar.

Fig. 30.9.—Representación de la esfera.

El radio \overline{OT} de σ , perpendicular a (d_p) , determina el triángulo rectángulo OTM' , igual al $O(C)C'$, por tener $\overline{OT} = \overline{O(C)} = R$ y $\widehat{OTM} = \widehat{O(C)C'}$, por ángulos de lados perpendiculares luego $\overline{OM'} = \overline{C'(C)}$. Esto permite hallar directamente el semieje mayor de la elipse, abatiendo el radio \overline{OC} , normal al cuadro, en $\overline{O(C)}$, y tomando sobre Y' el semieje mayor $\overline{OM'} = \overline{C'(C)}$.

Los planos coordenados cortan a la esfera, según círculos máximos cuyas imágenes son: la circunferencia σ de radio R y las elipses ϕ' y λ' que ya sabemos construir.

El efecto real de la perspectiva caballera desaparece en la esfera, al contemplarla según una elipse, y lo mismo sucede en perspectiva militar (Fig. b), siendo $\overline{OM'} = \overline{C'(C)}$. Esto explica que en el dibujo técnico, donde aparecen esferas, se prefiera la axonometría ortogonal de contorno circular (Fig. 28.16).

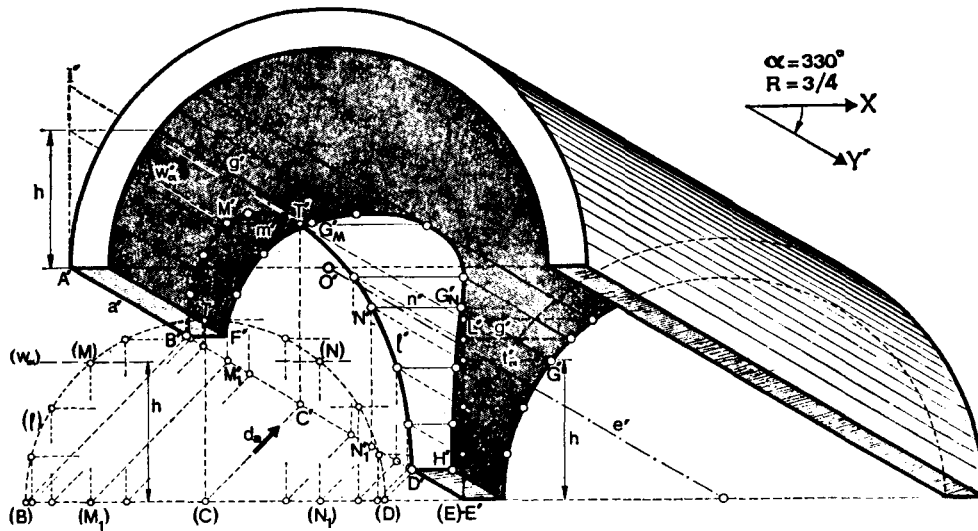


Fig. 30.10.—Perspectiva de luneto cilíndrico recto.

30.6. Intersección de superficies

En la figura 30.10 se ha dibujado la vista inferior, en perspectiva caballera, de un luneto cilíndrico recto, (núm. 18,16-a), practicado en una bóveda semicircular.

Primeramente se dibuja, en verdadera magnitud, la base anterior del semicilindro de la bóveda, coinciden

te con el cuadro y por O' y A' , se trazan paralelas a Y' sobre las que se llevan los $3/4$ de su longitud real que permiten dibujar la base posterior.

El plano $A'I'L'E'$ de la embocadura del luneto es vertical y tangente a la bóveda, según la arista de arranque $A'E'$, siendo $A'I'$ y $E'L'$ sus trazas con los planos de las bases de la bóveda. El abatimiento de la arista $E'B'$ de este plano, sobre la base posterior del

cilindro, es la normal $E'(B)$ a la charnela $E'L'$. Tomando sobre ésta el centro (C) y el diámetro $(B)(D)$ de la embocadura semicircular l del luneto y sobre $E'A'$, la longitud $\overline{E'C'} = \frac{3\overline{E'(C)}}{4}$, se tiene la dirección de abatimiento $d_a \equiv (C)C'$. Al desabatir, se obtienen los semidiámetros conjugados $\overline{C'D'}$ y $\overline{C'T'}$ de la perspectiva elíptica l' de l , que permiten dibujarla.

La intersección del luneto con la superficie interior de la bóveda se halla, por puntos, por planos auxiliares horizontales. Así, el plano de altura h sobre el arranque, corta al plano $A'I'L'E'$ según w'_α y a la base posterior del cilindro, en t'_α . Las intersecciones M' y

N' de w'_α con l' y la G' de t'_α con la embocadura posterior de la bóveda, determinan las generatrices de intersección m' y n' (paralelas a X) de α con el luneto y la g' (paralela a Y') de α con la bóveda, que se cortan en los puntos G'_M y G'_N de la intersección buscada.

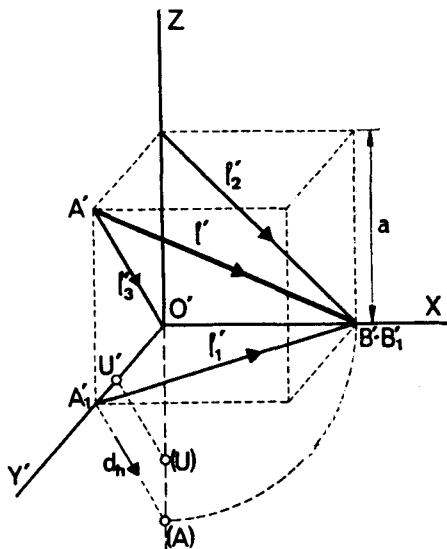
Los puntos M y N pueden deducirse del abatimiento, sin dibujar l' , desabatiendo las intersecciones $(M)-(M)_i$ y $(N)-(N)_i$ de (w_α) con (l) .

Trazando nuevos planos auxiliares, se obtienen nuevos pares de puntos que permiten dibujar la embocadura $l' \equiv B'M'T'N'D'$ y la intersección $F'G'_M G'_N H'$ del luneto con la bóveda.

SOMBRAS

30.7. Dirección de iluminación l

Viene dada (Fig. 30.11) por su proyección directa l' (perspectiva) y por una de sus proyecciones, generalmente la horizontal l'_i . La iluminación a 45° (núm. 19,1) se halla fácilmente, como diagonal $l'-l'_i$ de un cubo de arista arbitraria.



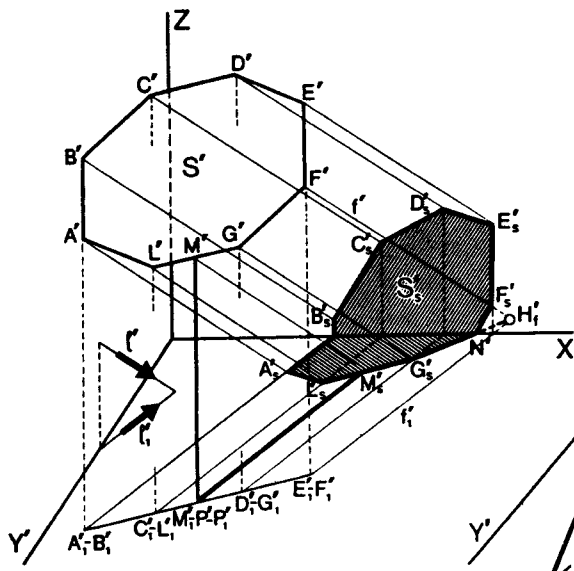


Fig. 30.13. - Sombras de figura plana.

30.9. Sombra de figuras planas

Si se trata de un polígono, por ejemplo, basta hallar las sombras de los vértices y unirlos entre sí. En la figura 30.13, los vértices A , L y G dan sombra sobre el horizontal y los restantes, sobre el primer vertical.

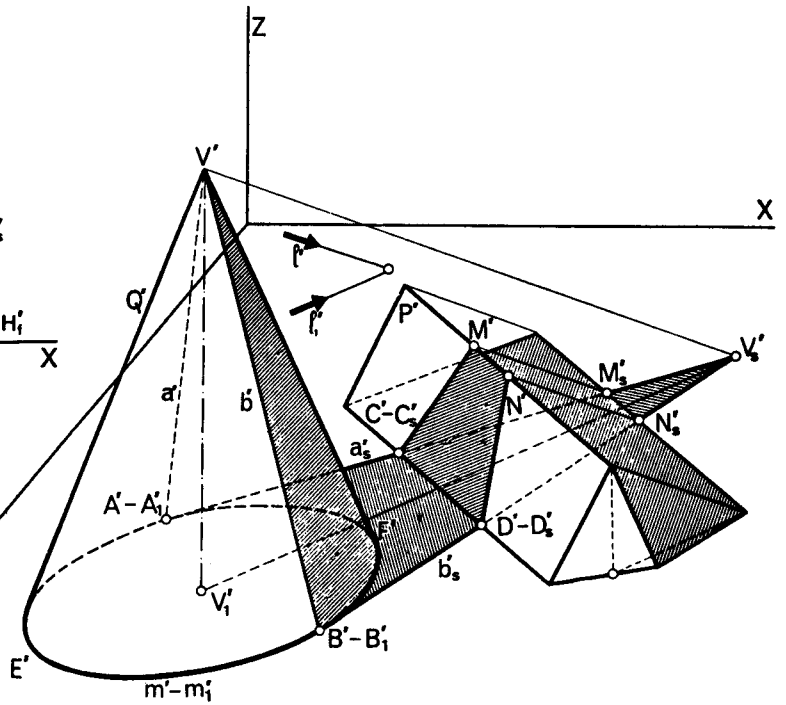


Fig. 30.15. - Sombra de cono sobre prisma.

cuadro y el horizontal. Finalmente, la sombra de M' es la intersección M'_s del rayo de sombra $M'M'_s$ con la paralela $M'_1M'_s$ a l'_1 .

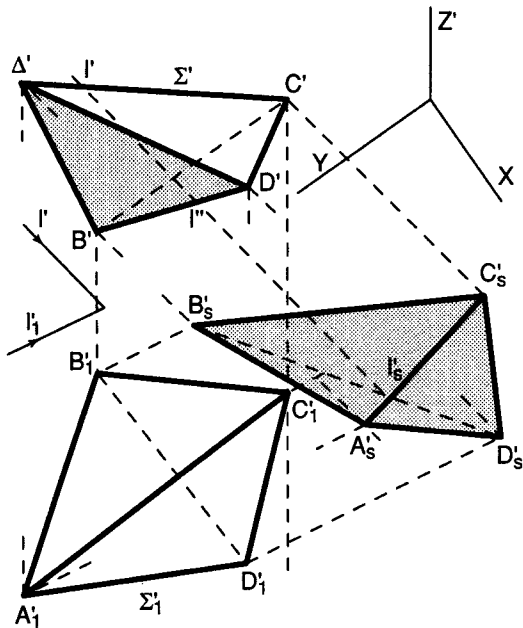


Fig. 30.14. - Sombra de un tetraedro en perspectiva militar.

La sombra del lado vertical AB es la paralela a l'_1 , trazada por A'_s , hasta su intersección con X y desde este punto, la paralela a Z , hasta cortar a $B'B'_s$ en B'_s .

La sombra $G'_1N'_s$ del lado GF se ha hallado, auxiliándonos de las trazas F'_s y H'_1 del rayo $f'-f'_1$ con el

30.10. Sombra de cuerpos

Los métodos utilizados para hallar la sombra propia y arrojada de cuerpos y superficies, en perspectiva axonométrica, son análogos a los explicados en diédrica. Así, para hallar la sombra de un tetraedro $\Sigma'-\Sigma'_1$ dado en perspectiva militar (Fig. 30.14), basta hallar las sombras A'_s , B'_s , C'_s y D'_s de los vértices. El perímetro de sombra $A'_sB'_sC'_sD'_s$, así obtenido, determina los lados del polígono separador $A'B'C'D'$.

El rayo de sombra que pasa por I'_s (intersección de $A'_sC'_s$ y $B'_sD'_s$) corta a las aristas \overline{AC} y \overline{BD} en I' e I'' , siendo I' el más próximo a la luz, luego \overline{AC} está iluminada y \overline{BD} , en sombra.

Las caras iluminadas son, por tanto, las ACB y ACD y las que están en sombra, las BDA y BDC . Como se ve, no son necesarios los ejes.

30.11. Sombra de un cuerpo sobre otro

Para hallar la sombra arrojada por el cono Q' sobre el prisma P' , de base situada en el horizontal (Fig. 30.15) se trazan, desde la sombra V'_s del vértice, las tangentes a'_s y b'_s a la base del cono, en A' y B' .

La separatriz de sombra del cono es la línea mixtilínea $V'A'F'B'A'$ y la sombra arrojada, la $V_s'A'F'B'V_s'$.

Las tangentes a'_s y b'_s cortan a la base del prisma, en C' y D' y al perímetro de sombra de éste, en M'_s y N'_s que referidas a la arista superior, en M' y N' , determinan el trapecio de sombra $M'N'D'C'$ arrojada por el cono y las sombras propias y arrojadas de ambos cuerpos.

30.12. Sombra autoarrojada

En la figura 30.16 se ha dibujado la perspectiva militar y las sombras, con luz de dirección $l'-l'_1$ de una superficie de revolución, de eje vertical, formada por un cilindro de radio r y una tolva tronco cónica, de vértice V y bases horizontales σ y λ , de centros Q y K y radios r y R , respectivamente.

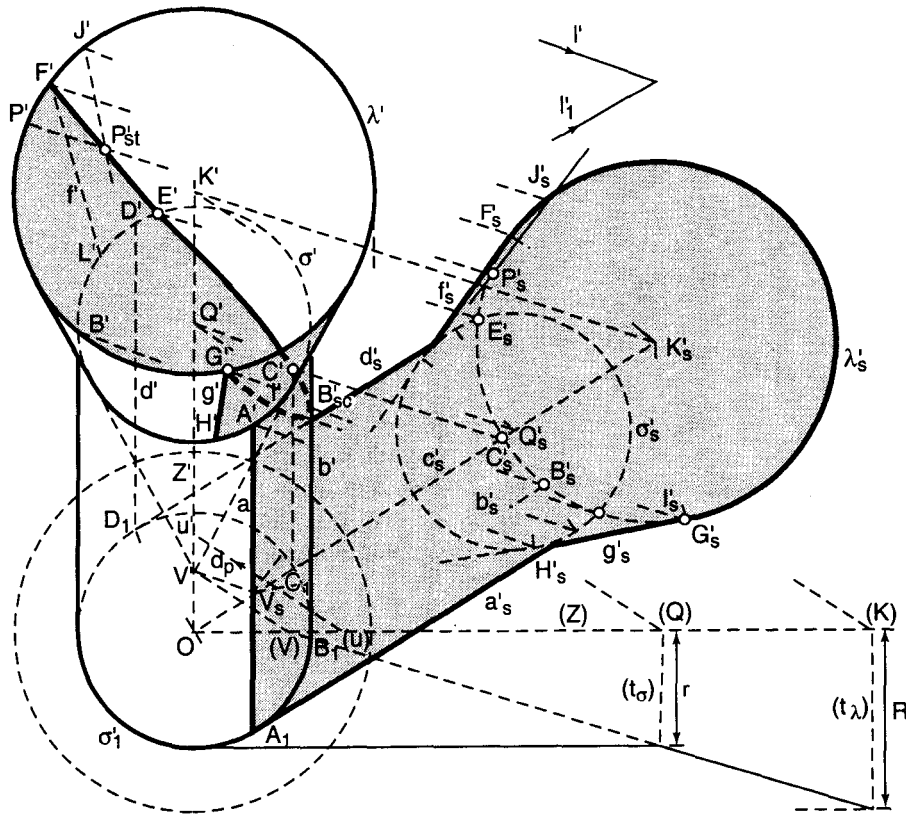


Fig. 30.16. - Sombra autoarrojada.

La perspectiva se ha dibujado, por abatimiento del plano $[Z,Z']$ que corta a σ y λ , según rectas t_σ y t_λ , abatidas en (t_σ) y (t_λ) . Al desabatir, se obtienen las proyecciones V' , σ' y λ' de V , σ , y λ .

Las sombras σ'_s y λ'_s de las bases σ y λ son las circunferencias de centros Q'_s y K'_s y radios perspectivos r y R . Las tangentes comunes g'_s y f'_s a λ'_s y σ'_s (concurrentes en V'_s) y las a'_s y d'_s a σ'_1 y σ'_s (paralelas a l'_1) determinan las generatrices g' y f' de la separatriz de sombra del cono (concurrentes en V') y las a' y d' del cilindro. El contorno perimetral de la sombra arrojada determina, por restitución, la separatriz de sombra $A_1A'H'G'J'F'L'D'D_1$ y las zonas iluminadas y en sombra (sombra propia) de la superficie.

La sombra autoarrojada es la arrojada por el arco $F'_sG'_s$ de λ'_s sobre el interior del cono y del

cilindro. El arco $E'I'_s$ arroja sombra sobre el cilindro, en $E'C'I'$, y los $F'_sE'_s$ e $I'_sG'_s$ sobre el cono, en $F'E'$ e $I'G'$ y se han hallado por restitución, como sigue.

El punto P'_s de λ'_s , por ejemplo, pertenece a las generatrices $V'_sJ'_s$ y $V'_sP'_s$ del cono, luego la intersección P'_s de la generatriz $V'_sJ'_s$ con el rayo de sombra de traza P'_s es la sombra arrojada sobre la tolva por el punto P' de λ' .

Análogamente, el punto B'_s de λ'_s pertenece a la generatriz b'_s del cilindro luego la intersección de b' con el rayo de traza B'_s es la sombra B'_{sc} arrojada por el punto B' de λ' sobre el cilindro, pudiéndose así dibujar los arcos de elipse $F'E'$ y $G'I'$ y la curva $E'B'_sI'$. Las intersecciones E'_s e I'_s de λ'_s y σ'_s son las sombras de E' e I' , respectivamente. (Ver caps. 31 y 32 de n/E. de G.D.).

IV SISTEMA CÓNICO

31. PROYECCIÓN CÓNICA O CENTRAL

31.1. Generalidades

Los elementos fundamentales de este sistema (Fig. 31.1), son: el centro de proyección V (*punto de vista*) y el plano de proyección π (*cuadro*), coincidente con el plano del dibujo.

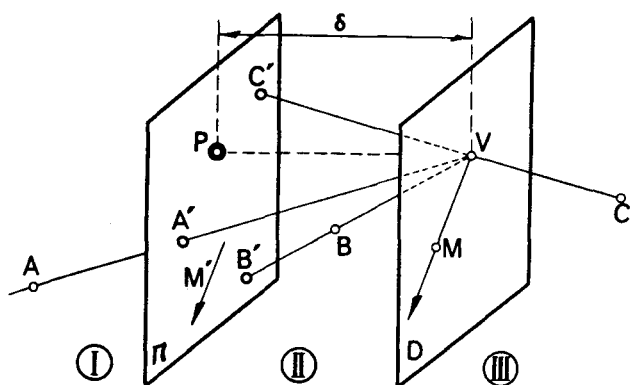


Fig. 31.1.—Proyección cónica o central.

La posición de V respecto a π queda fijada por la proyección ortogonal P de V sobre p , llamada *punto principal* y por su distancia $\delta = \overline{VP}$ al mismo. En el dibujo (Fig. 31.2) no existen más referencias que P y la circunferencia C_d (*círculo distancia*), de centro P y radio δ , que es muy útil para ciertas construcciones y abatimientos de V .

Todo punto A , distinto del V (Fig. 30.1), se proyecta en la traza A' de VA con el cuadro que es también proyección de todos los puntos de la recta VA , luego A no

queda definido por su proyección A' . Para representarlo, hay que situarlo sobre rectas o planos que pasen por él o como intersección de dos rectas o de recta y plano, como más adelante veremos.

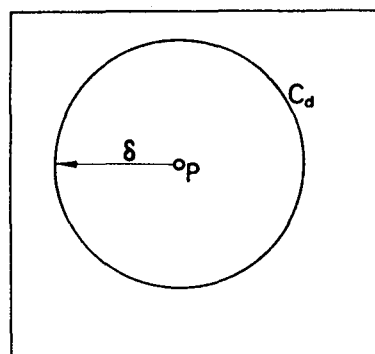


Fig. 31.2.—Elementos de referencia.

El plano D paralelo al cuadro, trazado por V , se llama *plano de desvanecimiento* porque todo punto M , situado en él, determina un rayo proyectante VM , paralelo al cuadro luego su proyección o imagen es impropia, de dirección M' paralela a VM .

Los planos π y D dividen al espacio en las tres regiones I, II y III, indicadas en la figura. En las aplicaciones prácticas, sólo se trabaja con figuras situadas en las regiones I y II, siendo lo más frecuente situarlas detrás del cuadro, en la región I.

31.2. Representación de la recta

Toda recta r no incidente con V (Fig. 31.3) determina con éste un plano $[V,r]$ (plano proyectante de r) cuya intersección con el cuadro es la *proyección, imagen o perspectiva* r' de r .

El punto de corte T_r de r con el cuadro se llama *traza* de r y la proyección L'_r de su punto impropio L_∞ , *punto límite o de fuga* y se designa con la notación L'_r o F'_r , indistintamente. La paralela $r_o \equiv VL'_r$ a r , trazada por V , (*rayo de fuga* de r) corta al cuadro en el punto de fuga L'_r de r .

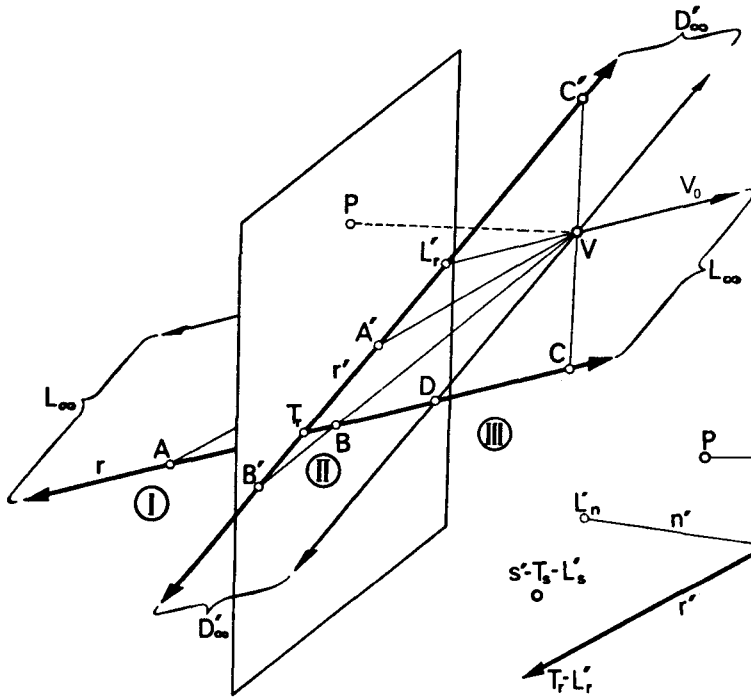
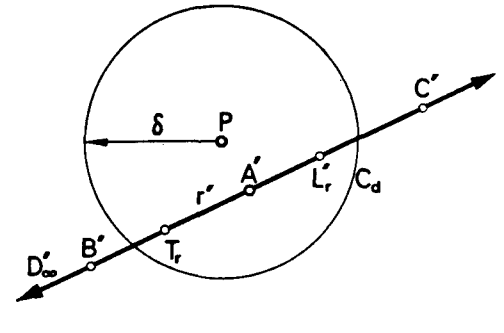
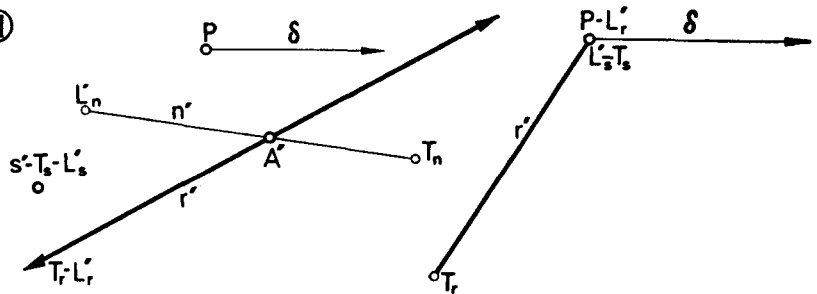


Fig. 31.3.—Representación de la recta.



(a) Caso general.



(b) Recta proyectante s y frontal r .

(c) Rectas normales al cuadro.

Fig. 31.4.—Perspectiva de la recta.

La intersección de r con el plano de desvanecimiento (no dibujado) es el *punto de desvanecimiento* D de r y su imagen D'_∞ (punto de desvanecimiento) es el punto impropio de r' . El cuadrilátero VL_rTrD así formado es, por tanto, un paralelogramo.

La recta queda determinada por su traza T_r y su punto de fuga L'_r . Para situarla en el espacio, basta trazar por T_r la paralela r al rayo de fuga $r_o \equiv VL'_r$.

La porción de recta T_rL_∞ , situada en I (detrás del cuadro), se proyecta en el segmento $T_rL'_r$. La T_rD , situada en II, en $T_rD'_\infty$ y la DL_∞ , situada en III, en $D'_\infty L'_r$, como puede comprobarse con las imágenes A' , B' y C' de A , B y C .

En la figura 31.4-a se ha dibujado la perspectiva de la recta $r' \equiv T_rL'_r$ y la de los puntos A , B , y C de r , situados en cada región. Como casos particulares citaremos:

- a) Si la recta s (Fig. b) pasa por V (recta proyectante) su imagen se reduce al punto s' , coincidente con T_s y L'_s .
- b) Si r es frontal (paralela al cuadro), T_r y L'_r coinciden con el punto impropio de r' , por ser r y r_o paralelas al cuadro. Para determinar r , hay que situar sobre r' un punto A' de otra recta $n \equiv T_n-L'_n$.
- c) Si r es perpendicular al cuadro (Fig. c), L'_r coincide con P .
- d) Si s es proyectante y normal al cuadro, $L'_s \equiv T_s \equiv P$.

31.3. Representación del plano (Fig. 31.5)

Todo plano α no incidente con V ni paralelo al cuadro y el paralelo α_0 a él, trazado por V (plano de fuga de α) cortan al cuadro según las rectas t_α (traza de α) y l'_α (recta límite o recta de fuga de α), paralelas entre sí. La distancia a_p entre t_α y l'_α se llama *ancho perspectivo* de α .

El plano queda determinado por t_α y l'_α . Para situarlo en el espacio, basta trazar por t_α el plano α paralelo al $\alpha_0 \equiv [V, l'_\alpha]$. La recta l'_α suele dibujarse de trazos.

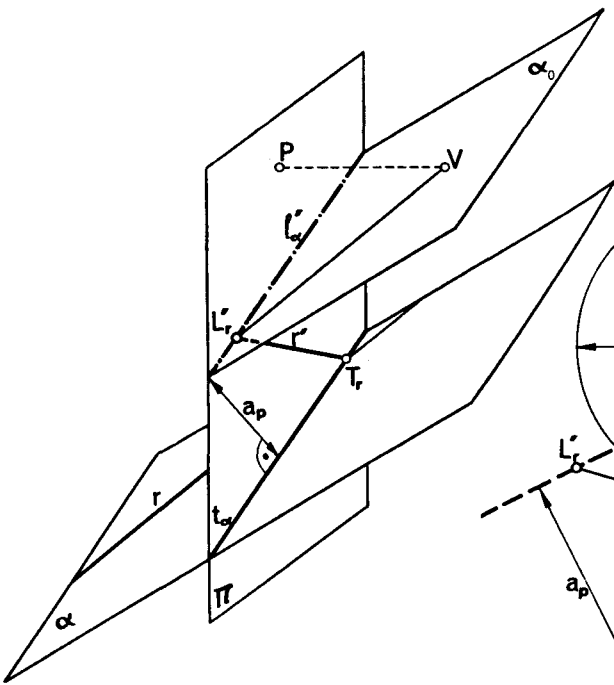


Fig. 31.5.—Representación del plano.

Si una recta r pertenece a α (Fig. 31.6), T_r y L'_r están en t_α y l'_α respectivamente. Recíprocamente, si α contiene a una recta $r \equiv T_r L'_r$, t_α y l'_α pasan por T_r y L'_r respectivamente.

31.4. Casos particulares

a) Si el plano pasa por V (plano proyectante), su traza y recta límite coinciden.

b) Si es frontal (paralelo al cuadro), su traza y recta límite son impropias y se determina (Fig. 31.4-b) por un punto A' de él, perteneciente a una recta $n' \equiv T_n L'_n$, siendo T_n, L'_n una frontal del plano.

c) Si α es normal al cuadro (Fig. 31.7), l'_α pasa por P .

d) Si β es proyectante y normal al cuadro, $t_\beta \equiv l'_\beta$ pasa por P .

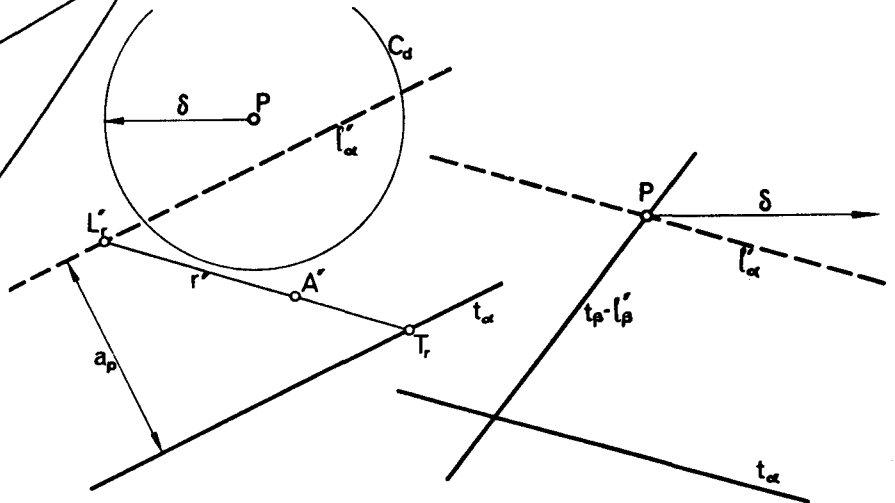


Fig. 31.6.—Recta contenida en un plano.

Fig. 31.7.—Planos normales al cuadro.

31.5. Intersección de rectas

Si dos rectas $r' \equiv T_r L'_r$ y $s' \equiv T_s L'_s$ se cortan (Fig. 31.8-a), determinan un plano β de traza $t_\beta \equiv T_r T_s$ y recta límite $l'_\beta \equiv L'_r L'_s$, paralelas entre sí o coincidentes (plano proyectante). Si esta condición se cumple, su

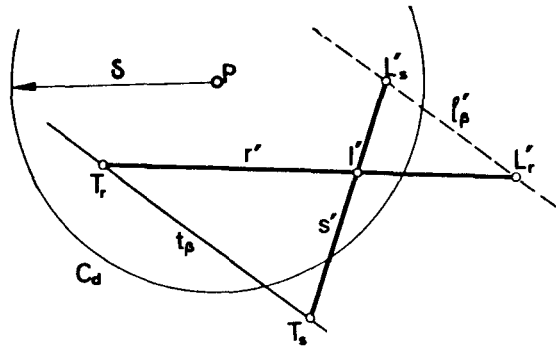
intersección I' es la imagen del punto de corte I de r y s .

Si las rectas tienen común su traza (Fig. b) o su punto límite (Fig. c), se cortan en $T_r \equiv T_s$ o $L'_r \equiv L'_s$ respectivamente. En el segundo caso, r y s son paralelas por cortarse en un punto impropio, de imagen $L'_r \equiv L'_s$.

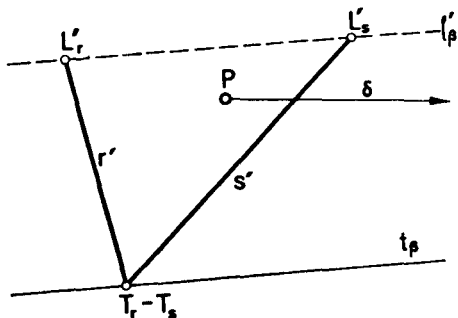
INTERSECCIONES

31.6. Intersección de planos

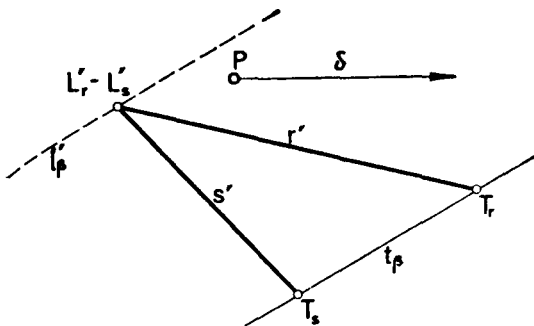
La intersección de dos planos $t_\alpha - l'_\alpha$ y $t_\beta - l'_\beta$ (Fig. 31.9) es una recta i' cuya traza y punto límite son los puntos de corte T_i y L'_i de t_α y t_β y de l'_α y l'_β , respectivamente.



(a) Caso general.



(b) Rectas de traza común.



(c) Rectas paralelas (de un punto límite común).

Fig. 31.8.—Intersecciones de rectas.

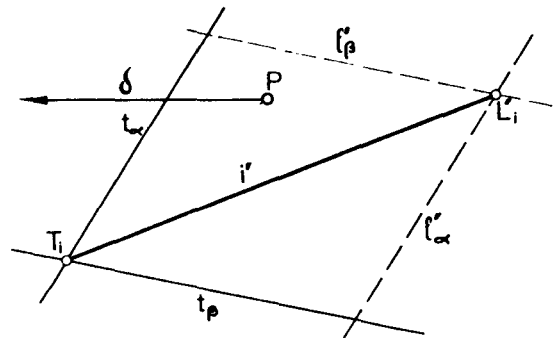


Fig. 31.9.—Intersección de planos.

31.7. Intersección de recta y plano

Siguiendo el método general, para hallar la intersección de la recta $r \equiv T_r-L'_r$ con el plano $\alpha \equiv t_\alpha-l'_\alpha$ (Fig.

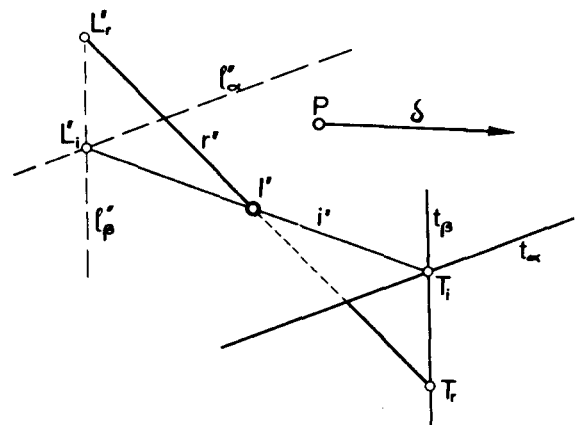


Fig. 31.10.—Intersección de recta y plano.

31.10), se traza un plano $t_\beta-l'_\beta$ que pasa por r y corta al α , según la recta $i' \equiv T_i L'_i$, siendo $T_i \equiv [t_\alpha, t_\beta]$ y $L'_i \equiv [l'_\alpha, l'_\beta]$. El punto de corte de i' y r' es la intersección I' buscada.

PARALELISMO

31.8. Condición general de paralelismo

De lo expuesto sobre elementos límites o de fuga de rectas y planos se deduce: las rectas paralelas entre sí tienen común su punto de fuga y análogamente, los

planos paralelos entre sí, tienen común su recta límite. Por tanto:

La condición general de paralelismo entre rectas o planos o rectas y planos es que sus elementos límites o de fuga coincidan o se pertenezcan.

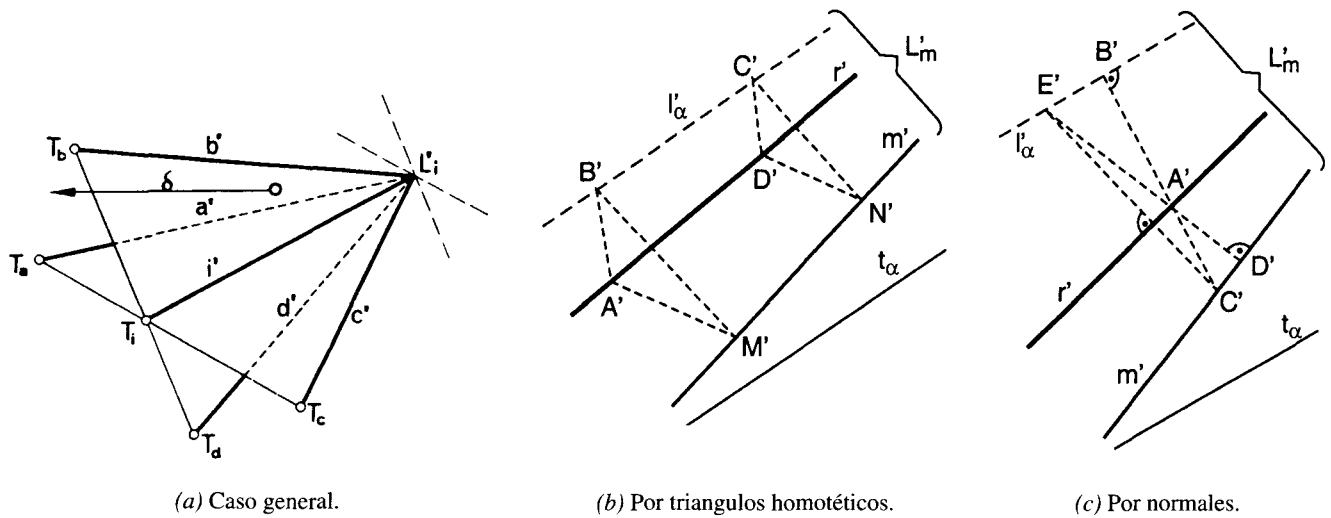


Fig. 31.11. - Paralelismo de rectas.

31.9. Paralelismo de rectas

a) En la figura 31.11-a, las rectas a, b, c y d , paralelas entre sí tienen común su punto de fuga L'_i . Los planos $[a, c]$ y $[b, d]$, por ejemplo, de trazas $T_a T_c$ y $T_b T_d$, se cortan según la recta $i \equiv T_i L'_i$, paralela a las rectas, por fugar en L'_i .

b) Si el punto límite L'_m de una recta m , situada en un plano $t_\alpha - l'_\alpha$ cae fuera del dibujo (Fig. b), la paralela r a m , trazada por un punto A de α , se obtiene fácilmente por medio de un papel auxiliar que permita prolongar l'_α y m' , hasta su intersección L'_m . Si esto no es posible, se utilizan los métodos que siguen.

l'_α en C' y E' , respectivamente. El punto A' es el ortocentro del triángulo $L'_m C' E'$, luego la perpendicular r' a $E' C'$, trazada por A' , pasa por L'_m por ser la tercera altura.

Si las fugantes en L'_m son numerosas, lo más práctico es utilizar la triple regla perspectiva (núm. 35,7 de n/E. de G.D.).

c) Ambos métodos sirven también para trazar por un punto A' una paralela r' a dos rectas dadas m' y n' , paralelas entre sí, cuyo punto de fuga L'_m es inaccesible.

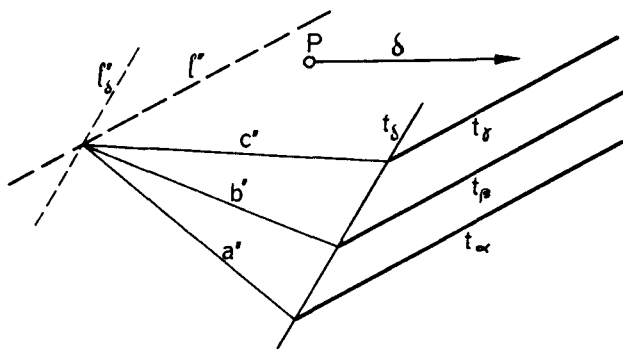


Fig. 31.12. - Planos paralelos.

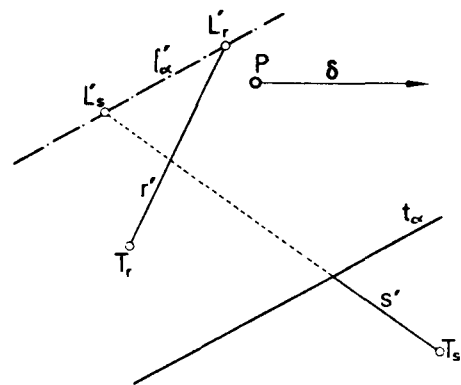


Fig. 31.13. - Plano paralelo a dos rectas.

1º *Por triángulos homotéticos.* Por A' se trazan dos rectas $A'B'$ y $A'M'$ que determinan el triángulo $A'B'M'$. Se traza luego una paralela $C'N'$ a $B'M'$ y por los puntos de corte C' y N' con l'_α y m' , las paralelas a $B'A'$ y $M'A'$ que se cortan en D' , siendo $r' \equiv A'D'$.

2º *Por normales* (Fig. c). Por A' se trazan las perpendiculares $A'B'$ y $A'D'$ a l'_α y m' que cortan a m' y

31.10. Paralelismo de planos

En la figura 31.12 los planos α, β y γ , paralelos entre sí, tienen común su recta límite l' y sus trazas, paralelas entre sí y a l' .

El plano secante $t_\delta - l'_\delta$ corta a los dados, según rectas a', b' y c' , paralelas entre sí, que ayudan a "ver" mejor la figura.

31.11. Paralelismo de recta y plano

En la figura 31-13, las rectas r' y s' paralelas al plano α tienen sus puntos de fuga L'_r y L'_s incidentes

con l'_α . Inversamente, si α es paralelo a r , l'_α debe pasar por L'_r

Si un plano es paralelo a dos rectas r y s , su recta límite es $l'_\alpha \equiv L'_r L'_s$.

ABATIMIENTOS

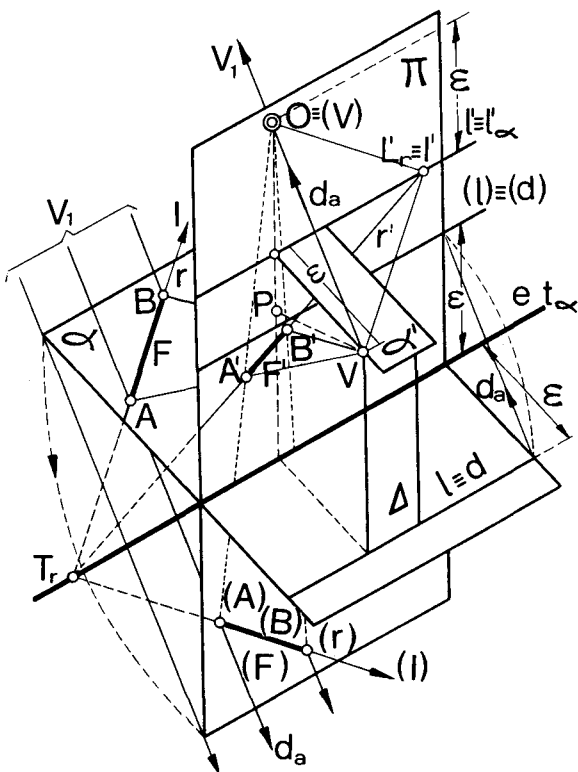


Fig. 31.14.—Homología entre proyección y abatimiento de formas planas.

31.12. Generalidades (Fig. 31.14)

Como ya dijimos en el núm. 2,4, si proyectamos una forma F de plano α desde V , sobre el cuadro π , en

F' , y abatimos luego F sobre π , en (F) , F' y (F) se corresponden en la homología producto de dos homología conocidas, de eje común $t_\alpha \equiv [\alpha, \pi]$: la de F y F' , de centro V (núm. 2,1) y la de F y (F) de centro impropio V_1 de dirección d_a , normal al bisector del diedro $\alpha\pi$ (núm. 2,2).

El centro de la homología producto es (núm. 2,3) la traza O de VV_1 (paralela a d_a) con π y coincide con el abatimiento (V) de V , alrededor de l'_α sobre π , en el mismo sentido que α , por ser α' paralelo a α y VV_1 paralela a d_a . Por tanto:

En proyección cónica, la imagen F' y el abatimiento (F) de una forma F de plano α , sobre el cuadro π , se corresponden en una homología de plano π , eje $t_\alpha \equiv [\alpha, \pi]$ y centro $O \equiv (V)$ (abatimiento de V sobre el cuadro, alrededor de l'_α). Las rectas límites de F' y (F) son l'_α y el abatimiento $l \equiv (d)$ de la línea de desvanecimiento $l \equiv d$ de α , respectivamente.

El abatimiento (V) de V ha de encontrarse sobre la perpendicular $P(V)$ a l'_α y a igual distancia que V , respecto a l'_α

Aplicando las propiedades de la homología al abatimiento, podemos enunciar:

- a) Los pares de puntos homólogos $A' (A); B' (B); \dots$ etc., están alineados con el centro $O \equiv (V)$ de la homología.
- b) Las rectas homólogas r' y (r) concurren en un punto T_r del eje t_α
- c) Los abatimientos (r) y $(r') \equiv (V)L'_r$ de r y de su rayo de fuga r' son paralelos.

**31.13. Abatimiento de un plano.
Distancia entre dos puntos**

a) Para abatir el cuadrilátero $A'B'C'D'$, de plano α (Fig. 31.15-a) se abate el punto de vista V sobre el cuadro, alrededor de l'_α en (V) , como ya se sabe (núm. 8,2), trazando la perpendicular PN y la paralela $P(V)_1$ a l'_α hasta su intersección con el círculo distancia, siendo $P(V)_1 = \delta$. El arco de centro N y radio $\overline{N(V)}$, corta a PN , en el abatimiento (V) de V .

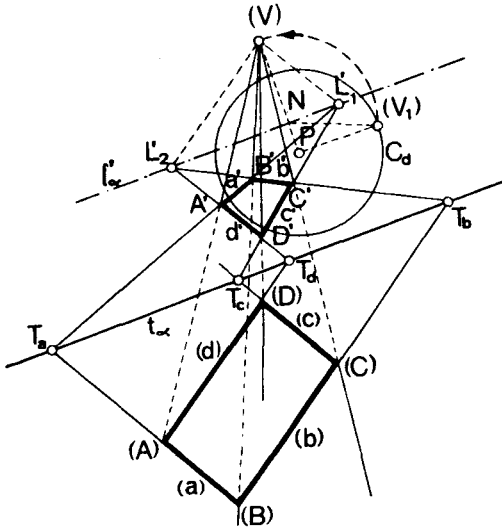


Fig. 31.15a.—Abatimiento de un cuadrilatero.

La proyección $A'B'C'D'$ y el abatimiento $(A)(B)(C)(D)$ del cuadrilátero se corresponden, como antes se ha dicho, en una homología de centro (V) , eje t_α y recta límite l'_α de $A'B'C'D'$. Los homólogos (a) y (c) de a' y c' son las paralelas a $(V)L'_1$, trazadas por T_a y T_c (núm. 31,11-b y c) y los (b) y (d) de b' y d' , las paralelas a VL'_2 , trazadas por T_b y T_d que cortan a las anteriores en (B) , (C) , (A) y (D) . Como comprobación, las proyecciones A' , B' , C' y D' de los vértices y sus abatimientos (A) , (B) , (C) y (D) han de estar alineados con (V) (núm. 31,11-a).

31.14. Generalidades

Como ya se sabe, el punto de fuga de la perpendicular r al plano α (Fig. 31.16) es la traza L'_r con π del

b) Si el plano $t_\alpha-l'_\alpha$ es proyectante (Fig. b), el abatimiento de la recta $m \equiv T_m L'_m$ situada en él, es la paralela (m) a $(V)L'_m$ trazada por T_m .

Esto sirve para hallar la distancia entre dos puntos $A' \equiv T_a L'_a$ y $B' \equiv T_b L'_b$, abatiendo el plano proyectante $t_\alpha-l'_\alpha$ de la recta AB , utilizando un sencillo artificio (núm. 7,18 de la “Geometría Descriptiva” de J.M. Ruiz Aizpiri) que consiste en trazar por la recta $T_a-L'_a$ el plano β , de recta límite $l'_\beta \equiv (V)L'_a$. La intersección $m \equiv T_m L'_m$ de α y β pasa por A y pertenece a α luego el

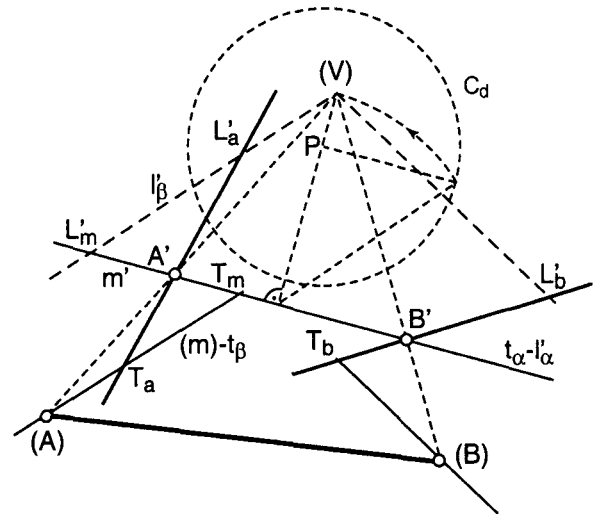


Fig. 31.15b.—Distancia entre dos puntos.

abatimiento de A es la intersección (A) del rayo $(V)A'$ con la paralela a $(V)L'_a$, trazada por T_a (abatimiento (m) de m).

Análogamente, el abatimiento de B es la intersección (B) de $(V)B'$ con la paralela a $(V)L'_b$, trazada por T_b , siendo $(A)(B)$ la distancia abatida.

Como se ve, los abatimientos (A) y (B) se obtienen como si las rectas dadas $T_a-L'_a$ y $T_b-L'_b$ pertenecieran al plano α .

PERPENDICULARIDAD

rayo de fuga VL'_r de r . El plano $[V,P,L'_r]$ es normal a π (por serlo \overline{VP}) y al plano de fuga α_0 de α (por serlo VL'_r) luego también lo es a su intersección $l'_\alpha \equiv [\pi, \alpha_0]$ que es, por tanto, perpendicular a $L'_r N$.

Por otra parte, VL_r' es perpendicular a α_0 y, por tanto, a VN luego en el triángulo rectángulo NVL_r' , así formado, la altura $\overline{VP} = \delta$ es media proporcional entre \overline{PN} y $\overline{PL_r'}$, lo cual permite enunciar:

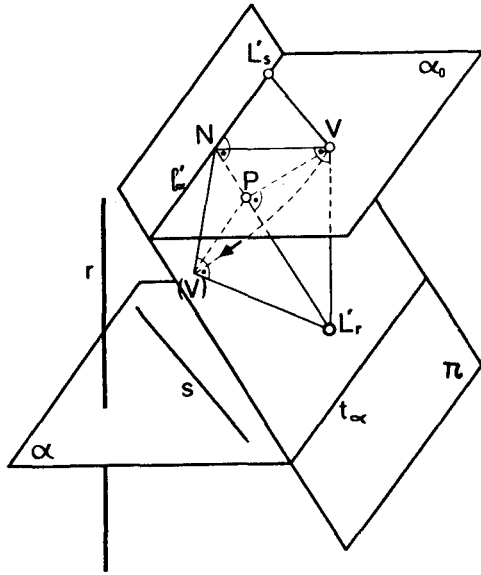


Fig. 31.16.—Perpendicularidad entre recta y plano.

- 1º. El punto de fuga L'_r de r está en la perpendicular PN a l'_α y a distinto lado de su pie N , respecto a P .
- 2º. La distancia $\delta = VP$ es media proporcional entre \overline{PN} y $\overline{PL'_r}$. Según esto, para hallar L'_r se traza por P la

perpendicular PN y la paralela $\overline{P(V)} = \delta$ a l'_α . La perpendicular a $N(V)$, trazada por (V) , corta a NP , en L'_r . Inversamente, si se conoce L'_r se traza L'_rP y la normal $\overline{P(V)} = \delta$ a ella. La normal a $L'_r(V)$, trazada por (V) , corta a L'_rP , en el punto N por donde pasa la normal l'_α a L'_rN .

A toda recta límite l'_α corresponde un solo punto L'_r y a la inversa. Esta correspondencia biunívoca entre elementos límites de recta y plano puede ampliarse a la perpendicularidad entre rectas o entre planos, como a continuación veremos.

31.15. Recta perpendicular a otra

Toda perpendicular s a r (Fig. 31.16) está contenida en α o es paralela a él, luego su punto de fuga L'_s pertenece a l'_α .

La condición de perpendicularidad entre rectas es, por tanto, que el punto de fuga L'_s de una de ellas pertenezca a la recta límite l'_α de los planos normales a la otra.

31.16. Planos perpendiculares

Si un plano es normal al α , contendrá a la dirección normal a él (a r o a su paralela), luego su recta límite debe pasar por el punto de fuga L'_α de las normales a α .

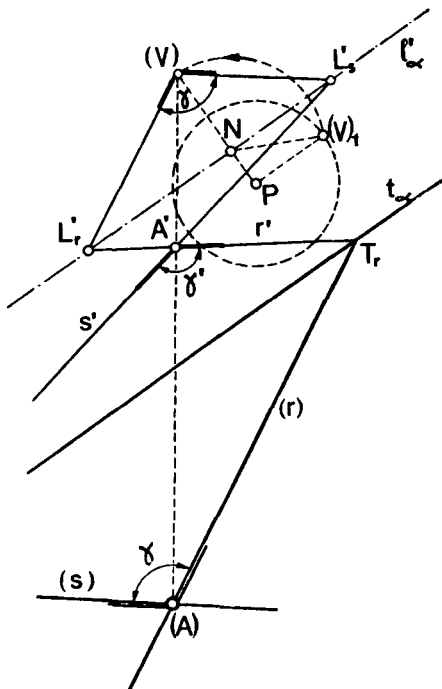


Fig. 31.17.—Ángulo de dos rectas.

31.17. Ángulo de dos rectas

Para obtener el ángulo γ de dos rectas r y s (Fig. 31.17), se abaten sus rayos de fuga r_o y s_o , paralelos a r y s , abatiendo previamente el punto de vista, en (V) , (núm. 31.12). El ángulo γ es el formado por los abatimientos $(r_o) \equiv (V)L'_r$ y $(s_o) \equiv (V)L'_s$ de r_o y s_o .

Si r y s se cortan, también puede abatirse el plano $\alpha \equiv [r, s]$, siendo (r) la paralela a $(V)L'_r$, trazada por T_r ; (s) , la paralela a $(V)L'_s$ trazada por (A) (punto de corte de $(V)A'$ con (r)) y $\gamma = (r)(s)$ el ángulo buscado. Si r y s se cruzan, se traza por un punto de r la paralela m a s y se abate el plano $[r, m]$.

ÁNGULOS

31.18. Ángulo de dos planos

Se determina, trazando por un punto interior del diedro, las normales a sus caras. El ángulo formado por éstas es el suplementario del buscado.

También puede hallarse, trazando el plano del rectilíneo y sus intersecciones r y s con las caras (lados del rectilíneo). Abatiendo éstas, se obtiene el ángulo buscado $\gamma \equiv rs$.

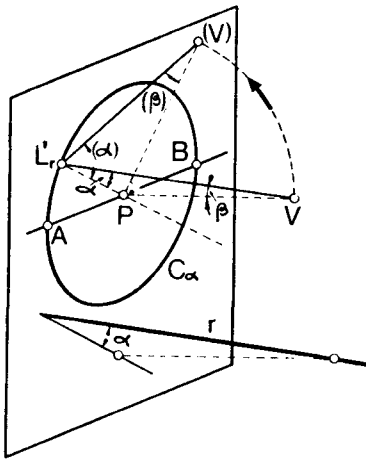


Fig. 31.18.—Ángulo de recta y cuadro.

31.19. Ángulo de una recta con el cuadro. Círculo de inclinación

Si una recta r (Fig. 31.18) forma con el cuadro un ángulo α , su rayo de fuga $r_o \equiv VL_r'$ forma con el cuadro el ángulo $\alpha = VL_r'P$ y con VP , el ángulo β , complementario del α . Por tanto:

El lugar geométrico de los rayos de fuga de las rectas inclinadas un ángulo α , respecto al cuadro, es la superficie cónica de revolución, de vértice V y eje \overline{VP} , cuya generatriz forma con éste el ángulo $\beta = 90^\circ - \alpha$ y el lugar geométrico de sus puntos de fuga L_r' es la circunferencia de centro P y radio $\overline{PL_r'}$, obtenido como cateto del triángulo rectángulo VPL_r' , de cateto \overline{VP} y ángulo α , opuesto a éste.

La circunferencia lugar se llama *círculo de inclinación* α y la designaremos por C_α . Si $\alpha = 45^\circ$, $\overline{PL_r'} = \overline{PV} = \delta$ (C_α coincide con C_d) y si $\alpha = 90^\circ$, C_α se reduce al punto P (punto de fuga de las normales al cuadro).

Para hallar C_α , se traza un radio cualquiera $\overline{P(V)}$ del círculo distancia C_d y la perpendicular PL_r' a él. Se traza luego el ángulo $P(V)L_r' = \beta = 90^\circ - \alpha$, cuya lado $(V)L_r'$ corta a PL_r' , en el extremo L_r' del radio PL_r' de C_α .

Si se conoce L_r' , se procede a la inversa, siendo $PL_r'(V) = \alpha$.

31.20. Círculo de medida de una recta. Punto de medida

Es de gran aplicación para llevar longitudes dadas sobre la perspectiva o para medir segmentos perspectivos. De aquí, los nombres de *círculo* y *punto de medida*.

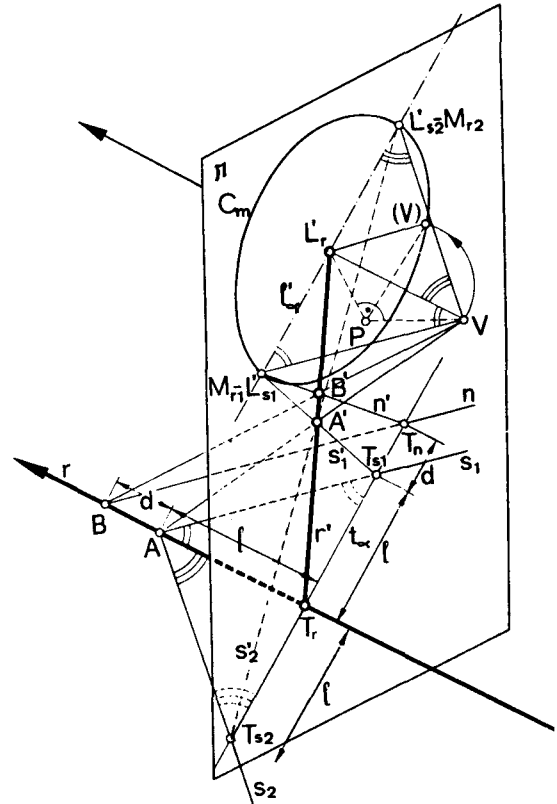


Fig. 31.19.—Punto de medida de una recta.

Por una recta dada $r \equiv TL_r'$ (Fig. 31.19), tracemos un plano $\alpha \equiv t_\alpha - l'_\alpha$ y tomemos sobre t_α , a partir de T_r , la longitud $\overline{T_r T_{s_1}} = \overline{T_r A} = l$. La recta $s_1 \equiv AT_{s_1}$ forma con r y t_α el triángulo isósceles $AT_r T_{s_1}$ y su rayo de fuga VL_{s_1}' , el triángulo $VL_r' L_{s_1}'$, también isósceles y semejante al anterior por el paralelismo de los lados, luego $L_r'V = L_r' L_{s_1}'$. Como esta igualdad se verifica para cualquier dirección de t_α y $L_r'V$ es constante, podemos enunciar:

*El lugar geométrico de los puntos de fuga de las rectas que forman ángulos iguales con una dada r y con la traza t_α de cualquier plano que la contenga, es la circunferencia de centro L_r' (punto de fuga de r) y radio, la distancia $\overline{L_r'V}$ de éste al punto de vista. Esta circunferencia se llama *círculo de medida* y la designaremos por C_m .*

Como s_1 ha de fugar en C_m y en l'_α (por pertenecer a α), su punto de fuga es la intersección L'_s de l'_α y C_m y

su imagen $s'_i \equiv T_{s_i}L'_{s_i}$ corta a r' en A' , siendo $\overline{T_r A'}$ la imagen del segmento $T_r A = l$.

Para facilitar la nomenclatura, llamaremos *rectas o rayos de medida* a las rectas como las s_i ; *punto de medida*, a su punto de fuga L'_{s_i} que designaremos por M_r , y *plano de medida*, al α , determinado por la recta y su rayo de medida.

Una vez elegido el plano α , su recta límite l'_α determina sobre C_m dos puntos de medida: el M_{r_1} , del rayo s_1 y el M_{r_2} , del s_2 , cuya perspectiva s'_2 corta a r' en el mismo punto A' .

Para llevar una longitud $AB = d$, a partir del punto A' de r' , se traza por A' el rayo de medida $s'_1 \equiv M_{r_1}A'$ y a partir de su traza T_{s_1} , se lleva sobre t_α la longitud $T_{s_1}T_n = d$. El rayo de medida $n' \equiv T_n M_{r_1}$ corta a r' en el extremo B' del segmento $\overline{A'B'}$ buscado.

El radio $L'L_{s_1} = L_r V$ de C_m se obtiene, por abatimiento del triángulo VPL_r , trazando el radio $\overline{P(V)}$ del círculo distancia, perpendicular a PL_r , siendo $(V)L_r = VL_r$; el radio buscado. De lo expuesto, se deduce:

a) Las paralelas a r tienen el mismo círculo de medida.

b) Las paralelas a r situadas en α o en planos paralelos a él, tienen el mismo punto de medida.

c) Si r es normal al cuadro, el círculo de medida C_m coincide con el círculo de distancia C_d .

EJEMPLO: A partir de un punto A' de una recta dada $r \equiv T_r L_r$, llevar sucesivamente tres segmentos, de longitudes respectivas a, b y c (Fig. 31.20).

Solución: Una vez elegido el plano de medida $t_\alpha - l'_\alpha$ que contiene a r , se traza el radio $\overline{P(V)}$ de C_d , normal a PL_r , cuyo extremo determina el radio $\overline{L_r(V)}$ del círculo de medida C_m de r . El punto de corte de l'_α y C_m es el punto de medida M_r de r , (no es necesario el otro punto de medida M_r).

A partir de la traza A_0 del rayo de medida $M_r A'$, se llevan sobre t_α las longitudes dadas $\overline{A_0 B_0} = a$, $\overline{B_0 C_0} = b$ y $\overline{C_0 D_0} = c$. Los rayos de medida, trazados por B_0, C_0 y D_0 , determinan sobre r' las imágenes $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{C'D'}$ de los segmentos buscados. (Ver cap. 34 de n/E. de G.D.).

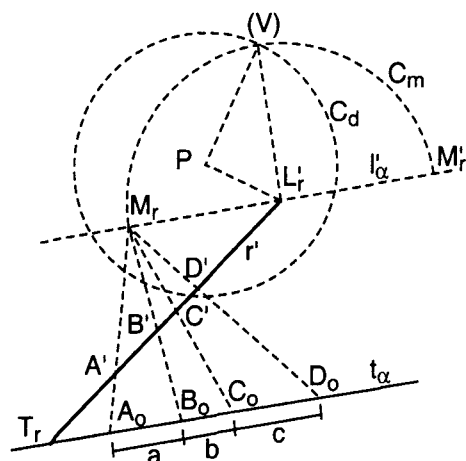
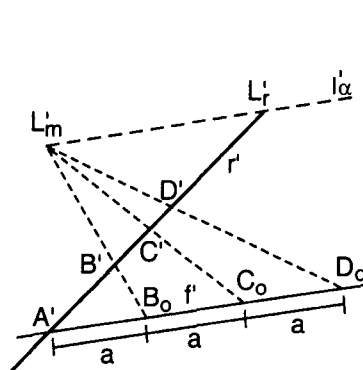
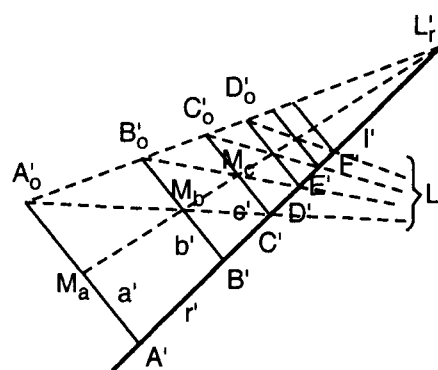


Fig. 31.20.—Imágenes de segmentos de longitud dada.



(a) Por haz de paralelas.



(b) Por paralelogramos iguales.

Fig. 31.21.—Segmentos iguales a uno dado en perspectiva.

31.21. Construcciones auxiliares

Sirven para llevar sobre una recta segmentos iguales o proporcionales a otros, dados en perspectiva, sin utilizar el punto de medida, como puede verse en los ejercicios que siguen:

1º) *Sobre una recta r' , de punto de fuga L'_r* (Fig. 31.21) *se da un segmento $\overline{A'B'}$. Llevar sucesivamente sobre r' , a partir de B' , dos segmentos iguales a AB .*

Solución: a) *Por haz de paralelas.* Basta trazar por r un plano arbitrario, de recta límite l'_α (Fig. a) y por A' , la frontal del plano de imagen f' paralela a l'_α . Sobre f' se llevan luego, a partir de A' , tres segmentos iguales $\overline{A'B_0} = \overline{B_0 C_0} = \overline{C_0 D_0}$ (de longitud arbitraria a) y se traza la recta $B_0 B'$ que corta a l'_α en L'_m . Las

rectas $L'_m C_0$ y $L'_m D_0$ son imágenes de paralelas, igualmente distanciadas, que determinan sobre r' , segmentos $\overline{B'C} = \overline{C'D} = \overline{AB}$.

b) *Por paralelogramos iguales* (Fig. b). Resulta más práctico si hay que llevar sobre r varios segmentos iguales. Consiste en trazar por A' un segmento $a' \equiv A'A_0$ de dirección y longitud arbitraria y por A_0 y M_a (punto medio de a'), paralelas a r , fugantes en L'_r , que cortan a la paralela $B'_0 B'$ a a' , en B'_0 y M_b .

Si por la intersección C' de $A_0 M_b$ y r' se traza la paralela $c' \equiv C' C_0$ a a' , la recta $A_0 C'$ es diagonal del paralelogramo $AA_0 C' C$ y determina dos paralelogramos iguales $AA_0 B'_0 B$ y $BB'_0 C' C$, siendo $\overline{AB} = \overline{B'C}$. Repitiendo la operación se obtienen nuevas diagonales $B'_0 D'$, $C'_0 E'$, $D'_0 F'$, ..., paralelas entre sí, que determinan segmentos iguales $\overline{AB} = \overline{B'C} = \overline{C'D} \dots = \text{etc.}$

2º) Dados dos segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$, situados en un plano de recta límite l'_α (Fig. 31.22) y un punto E' , en $A'B'$, hallar un punto F' en $\overline{C'D'}$ que divida a éste en la proporción $\overline{CF}/\overline{FD} = \overline{AE}/\overline{EB}$.

Solución: Si proyectamos los puntos dados desde dos puntos arbitrarios L'_a y L'_c de l'_α , las intersecciones de los rayos extremos determinan la recta $r' \equiv M'N'$ que corta al rayo L'_aE' , en Q' . El rayo L'_cQ' divide al segmento \overline{CD} en segmentos proporcionales a \overline{AE} y \overline{EB} .

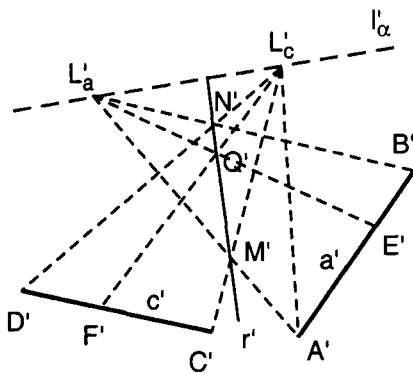


Fig. 31.22.—Segmentos proporcionales a otros dos.

En efecto, las paralelas fugantes en L'_a cortan a r y a en segmentos proporcionales y lo mismo sucede con las fugantes en L'_c respecto a r y c , luego $\overline{CF}/\overline{FD} = \overline{AE}/\overline{EB}$.

3º) Dada la perspectiva $A'B'M'N'$ del hueco de una puerta de garaje abierta en un muro vertical (Fig.

31.23), dibujar otros tres huecos sucesivos, iguales al dado, separados entre sí la distancia perspectiva $\overline{B'C'}$.

Solución: El problema se reduce a llevar sobre r' segmentos sucesivos iguales a \overline{AB} y \overline{BC} . Para ello, se

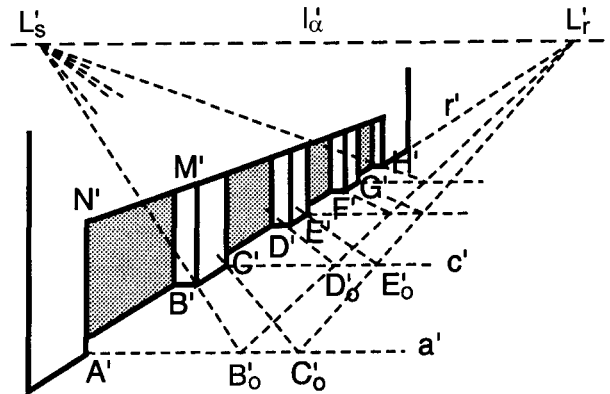


Fig. 31.23.—Puertas de garaje igualmente separadas.

traza por A' la paralela a' a l'_α y desde un punto arbitrario L'_s de l'_α se proyectan $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ sobre a' , en A'_0 y B'_0 y $B'_0C'_0$. Por B'_0 y C'_0 se trazan luego paralelas a r , fugantes en L'_s , que cortan a la paralela c' a l'_α trazada por C' , en D'_0 y E'_0 y estos puntos se proyectan desde L'_s sobre r' , en D' y E' . Los huecos restantes se obtienen de forma análoga.

En efecto, los segmentos \overline{CD}_0 y \overline{D}_0E_0 son iguales a \overline{AB}_0 y \overline{B}_0C_0 por paralelas comprendidas entre paralelas, luego las paralelas fugantes en L'_s trazadas por sus extremos, determinan sobre r segmentos $\overline{CD} = \overline{AB}$ y $\overline{DE} = \overline{BC}$. (Ver cap. 35 de n/E. de G.D.).

32. PERSPECTIVA LINEAL

32.1. Generalidades

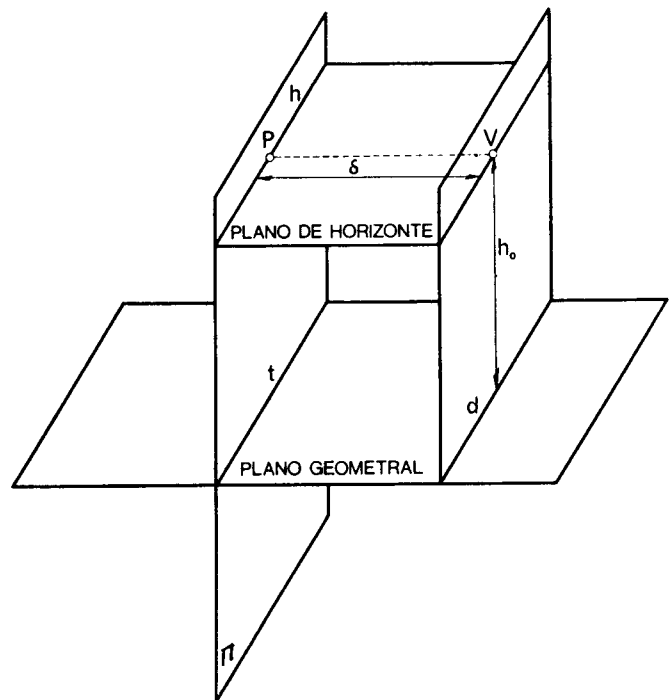
Si a través de un cristal (cuadro) miramos un objeto con un solo ojo (centro de proyección), manteniendo el otro cerrado, y dibujamos sobre el cristal el objeto, tal y como lo vemos, se obtiene la *perspectiva cónica* o *central* del mismo pero en tales perspectivas resulta difícil determinar a primera vista: la horizontalidad o verticalidad de planos y líneas, el tamaño de la figura y su distancia al cuadro, la posición (vertical o inclinada) del cuadro, ..., etc.

Tales inconvenientes desaparecen, utilizando ciertas condiciones y planos auxiliares horizontales de referencia que, sin modificar las propiedades características de la proyección central, ayudan a “ver” en el espacio la forma, posición y situación del objeto.

Esta es la llamada *perspectiva lineal*. Sus elementos fundamentales son, lo mismo que en cónica, el punto de vista V (ojo del observador) y el cuadro π (Fig. 32.1) y sus elementos auxiliares o de referencia, los siguientes:

El plano de horizonte u horizonte del observador. Es el plano horizontal, trazado por V , que corta al cuadro, según una horizontal h (línea de horizonte).

El plano geometral. Es un plano horizontal arbitrario (coincidente, por lo general, con el suelo o base de las edificaciones u objetos) que corta al cuadro y al plano de desvanecimiento, según las horizontales t y d , llamadas *línea de tierra* y *de desvanecimiento*, respectivamente.



(a) Elementos auxiliares.

Fig. 32.1.—*Perspectiva lineal.*

El *cuadro* es vertical (normal a los planos geometral y de horizonte) y el punto principal P incide en h .

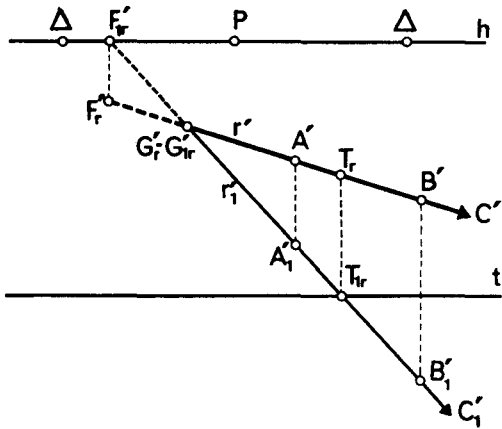


Fig. 32.3.—Representación de la recta.

Los puntos A, B y C , situados en (I), en el cuadro o en (II), tienen sus proyecciones horizontales A', B' y C' , en π_1, t o π_2 . Si pertenece al plano de desvanecimiento (punto D), su imagen es impropia y si es un punto impropio $I_\infty \equiv I_{i\infty}$ del plano geometral, $I' \equiv I'_i$, está en h .

En las regiones vistas I y II, según que el punto esté encima, en o debajo del geometral, la proyección directa está encima, confundida, o debajo de la proyección horizontal respectiva, sucediendo a la inversa en la región III.

32.3. Representación de la recta

Las proyecciones de una recta (Fig. 32.3) se determinan uniendo las proyecciones homónimas de dos

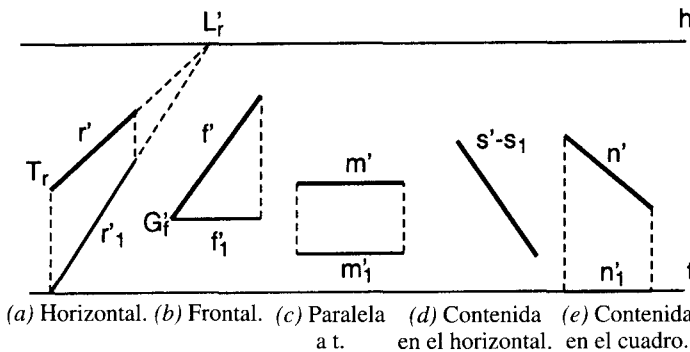


Fig. 32.4.—Rectas paralelas o contenidas en el geometral o en el cuadro.

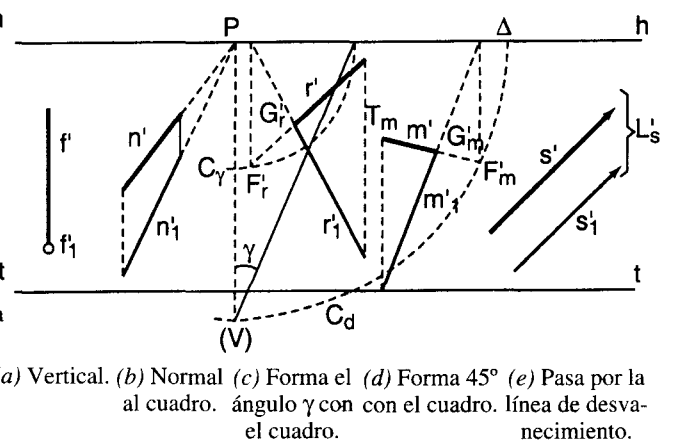


Fig. 32.5.—Otras posiciones de la recta.

puntos A y B de ella, siendo $r' \equiv A'B'$ la proyección directa y $r_1' \equiv A_1B_1'$, la horizontal. Generalmente viene dada por su traza T_r-T_{1r} y su punto límite o de fuga $F_r'-F_{1r}'$, de proyecciones T_r y F_{1r}' , situadas en t y h , respectivamente. Para hallar éstas, se prolonga r_1' y por sus intersecciones T_{1r} y F_{1r}' con t y h , se trazan las verticales de referencia que cortan a r' , en T_r y F_r' .

La traza de r con el geometral es la intersección $G_r'-G_{1r}'$ de r' y r_1' . Para simplificar las notaciones, los tres puntos notables de la recta se representan sólo por sus perspectivas T_r, F_r' y G_r' , prescindiéndose de sus proyecciones horizontales que han de estar en t, h y r_1' .

El cuadro se considera transparente y el geometral,

opaco. La traza geometral separa, por tanto, la parte vista y oculta de la recta y T_r , las partes situadas delante y detrás del cuadro. La parte vista de la recta (situada delante del observador) es la semirecta $G_r'C_r'-G_r'C_r'$.

Como ejercicio, en las figuras 32.4 y 5 se han representado distintas posiciones de una recta. La recta r (Fig. 32.5) forma el ángulo γ con el cuadro, por fugar en el círculo de inclinación C_γ (núm. 31,19); la m forma 45° con el cuadro, por fugar en el círculo distancia C_d , y la s , de proyecciones paralelas, corta al geometral en la línea de desvanecimiento, por ser impropia su traza geometral.

32.4. Representación del plano

El plano α (Fig. 32.6) se representa por su traza t_α y su recta límite l'_α . La traza con el geometral se halla, como intersección $g_\alpha \equiv T_g F'_g$ de α con el plano geometral $[t, h]$, siendo $T_g \equiv [t, t_\alpha]$ y $F'_g \equiv [h, l'_\alpha]$, lo cual permite hallar una de las tres rectas, conociendo las otras dos.

Toda recta de un plano tiene su traza y punto de fuga en la traza y recta límite del plano. Recíprocamente, si un plano contiene a una recta, su traza y recta límite pasan por la traza y recta límite de la recta.

La horizontal $h'-h'_i$ de α fuga en $F'_h \equiv F'$ y tiene su traza T_h , en t_α . La frontal f tiene sus proyecciones f' y

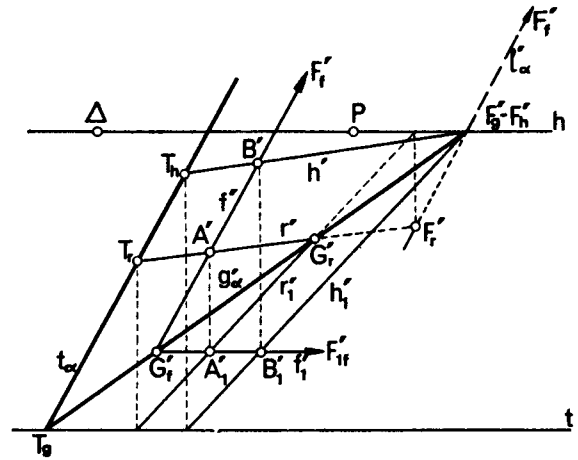


Fig. 32.6.—Representación del plano.

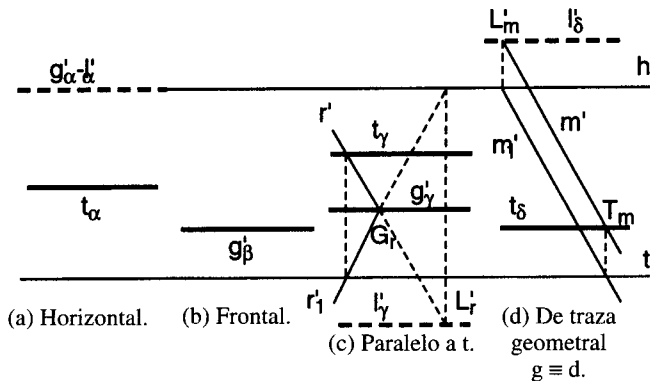


Fig. 32.7.—Plano paralelos al geometral, al cuadro y a t.

f'_i paralelas a t_α y t , respectivamente, y corta a $h'-h'_i$, en $B'-B'_i$.

Para que un punto A pertenezca a un plano, ha de pertenecer a una recta r de éste. Recíprocamente, para trazar un plano que pase por un punto A , se traza por A una recta r y se hallan su traza T_r y punto de fuga F'_r que determinan la traza y recta límite, de dirección arbitraria, t_α y l'_α de α .

En las figura 32.7 y 8 se han representado diversas posiciones del plano. El plano δ (Fig. 32.7) es paralelo a la línea de tierra y de traza geometral coincidente con la línea de desvanecimiento.

32.5. Intersecciones y paralelismo

Todo lo dicho en proyección central sobre intersecciones y paralelismo (núms. 31,5 a 31,12) es válido en perspectiva lineal, por lo que no insistiremos sobre ello.

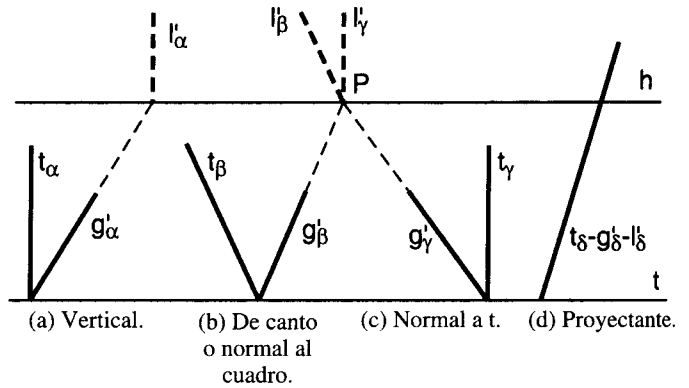


Fig. 32.8.—Otras posiciones del plano.

32.6. Abatimientos

El método general de abatimiento de un plano es idéntico al explicado en proyección central, como veremos en los ejercicios que siguen:

a) Dibujar la perspectiva de un cuadrado de plano $t_\alpha-l'_\alpha$ y lado $a \equiv \overline{AB}$, dado (Fig. 32.9).

Primeramente se abate V sobre el cuadro, trazando por P la perpendicular PN y la paralela $\overline{P(V)}_i = \overline{P\Delta}$ y luego, el arco de centro N y radio $\overline{N(V)}_i$, que corta a NP , en (V) . El abatimiento (a) de $a \equiv T_\alpha F'_\alpha$ es la paralela a $(V)F'_\alpha$, trazada por T_α , que corta a los rayos $(V)A'$ y $(V)B'$ en los abatimientos (A) y (B) de A y B .

Se construye luego el cuadrado $(A)(B)(C)(D)$, de lado $\overline{(A)}\overline{(B)}$, y se desabate en $A'B'C'D'$, por medio de sus trazas T_b y T_c y del punto de fuga F'_b de b' , siendo $(V)F'_b$ paralela a (b) .

b) Abatimiento de un triángulo $A'B'C'$, de plano vertical $t_\alpha-l'_\alpha$ (Fig. 32.10)

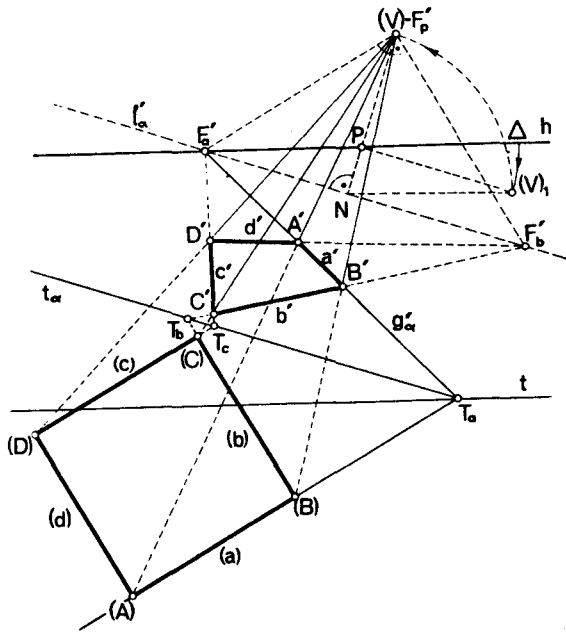


Fig. 32.9. - Abatimiento de un plano cualquiera.

El abatimiento (g_α) de g'_α coincide con t y el (V) de V , situado sobre h , coincide con el punto de medida M_g de g_α (tomando el geometral como plano de medida).

El lado \overline{BC} se ha abatido por medio de la paralela (a) a $(V)F'_a$ que corta a $(V)B'$ y $(V)C'$, en (B) y (C) y el $c \equiv \overline{BA}$, por medio de su traza T_c .

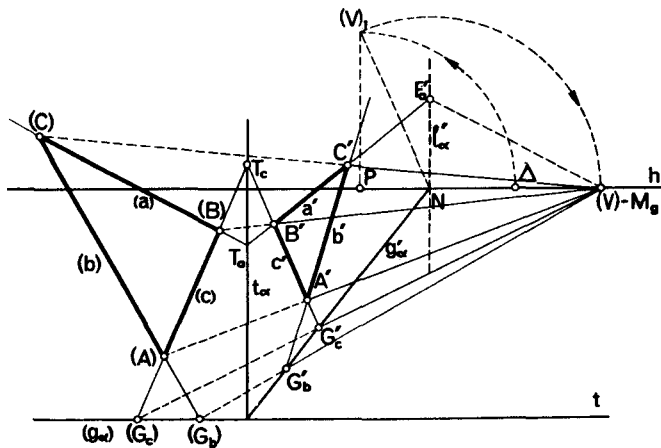


Fig. 32.10. - Abatimiento de un plano vertical.

c) Abatimiento del cuadrilátero $A'B'C'D'$ del plano geometral (Fig. 32.11-a)

El método general se simplifica mucho por ser t y h la traza y recta límite del plano geometral.

El abatimiento (V) de V es la intersección del arco de centro P y radio \overline{PA} con la perpendicular $P(V)$ a h , y el (d) del lado d , por ejemplo, es la paralela a $(V)F'_d$ trazada por T_d .

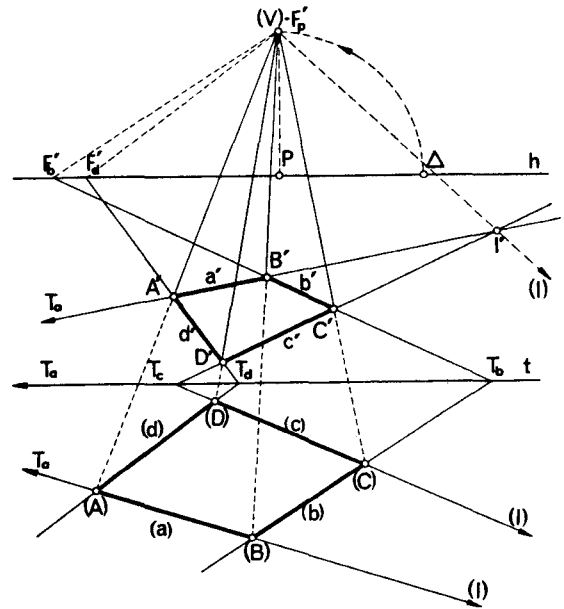


Fig. 32.11a. - Abatimiento del plano geometral.

d) Abatimiento sobre un plano frontal. A veces interesa abatir figuras de plano horizontal, sobre un plano frontal (paralelo al cuadro).

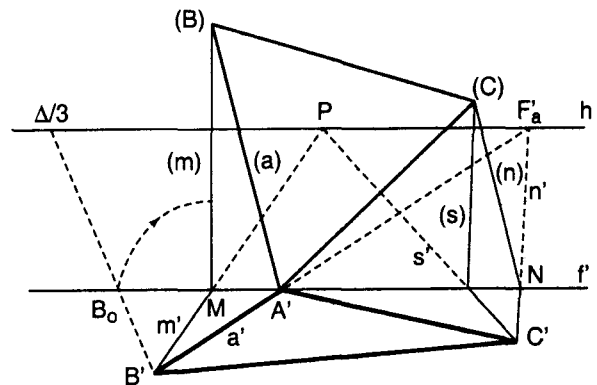


Fig. 32.11b. - Abatimiento sobre un plano frontal.

En la figura 32.11-b, para dibujar la perspectiva del triángulo equilátero de lado $\overline{A'B'}$, dado, se traza por el extremo A' , por ejemplo, la frontal f' , paralela a h , y por B' , la normal m al cuadro (fugante en P), abatida sobre el plano frontal de charnela f' , en la normal (m) a f . La longitud $\overline{M(B)}$ de \overline{MB} se obtiene, por medio del punto de medida reducido de m' , siendo $\overline{M(B)} = 3\overline{MB_0}$ y $(a) \equiv \overline{A'(B)}$, el abatimiento de $a' \equiv \overline{A'B'}$.

Se construye luego el triángulo equilátero $A'(B)(C)$ y por (C) , se trazan la perpendicular (s) a f y la paralela (n) a (a) , desabatidas en s' y n' (fugante en F'_a) que se cortan en el vértice C' del triángulo buscado $A'B'C'$.

32.7. Perpendicularidad

Los problemas de perpendicularidad entre recta y plano se resuelven (núms. 31,14 a 21,17), hallando el punto de fuga de la dirección normal al plano o a la inversa, hallando la recta límite de los planos normales de la recta.

Así, para trazar por un punto $A'-A'_1$ (Fig. 32.12) la perpendicular r a un plano $t_\alpha-l'_\alpha$, se halla el punto de fuga F'_r de las normales a α , trazando por P (núm. 31,14) la perpendicular PN y la paralela $P(V) = P\Delta$ y luego, por (V) , la perpendicular a $N(V)$ que corta a NP , en F'_r , siendo $r \equiv A'F'_r-A'_1F'_r$, la perpendicular buscada.

La intersección $I'-I'_1$ de r y α se ha hallado, por medio del plano vertical $t_\beta-g'_\beta$ que contiene a r y corta a α , según la recta $i \equiv T_iG'_\beta$, siendo I' la intersección de i' y r' .

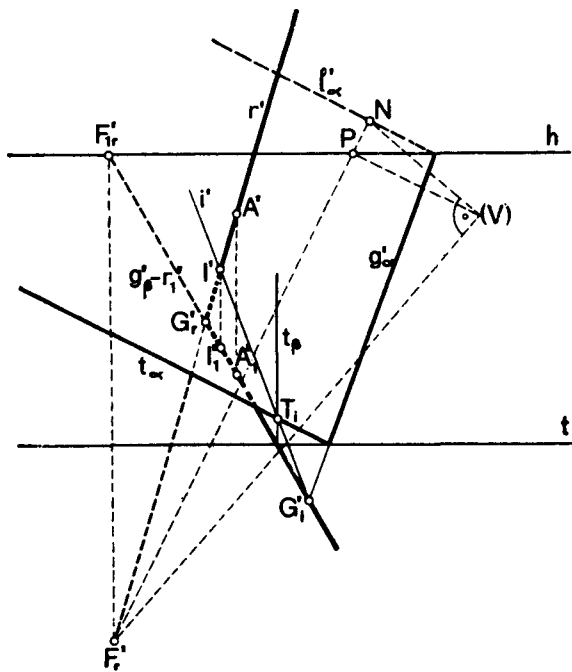


Fig. 32.12.—Recta perpendicular a un plano.

32.8. Ángulos. Círculo de inclinación

Como ejemplo de lo dicho en los núms. 31,17 a 31,19, para dibujar una recta contenida en un plano vertical $t_\gamma-l'_\gamma$ que pase por el punto G de g'_γ (Fig. 32.13) y forme con el cuadro un ángulo α , se traza el círculo de inclinación C_α , de centro P y radio PF' , obtenido como cateto del triángulo rectángulo $P(V)F'$ de cateto conocido $\overline{P(V)} = \overline{P\Delta}$ y ángulo $P(\widehat{V})F' = \beta = 90^\circ - \alpha$.

Los puntos de corte de l'_γ y C_α son los puntos de fuga F'_a y F'_b de las rectas buscadas $a' \equiv G'F'_a$ y $b' \equiv G'F'_b$.

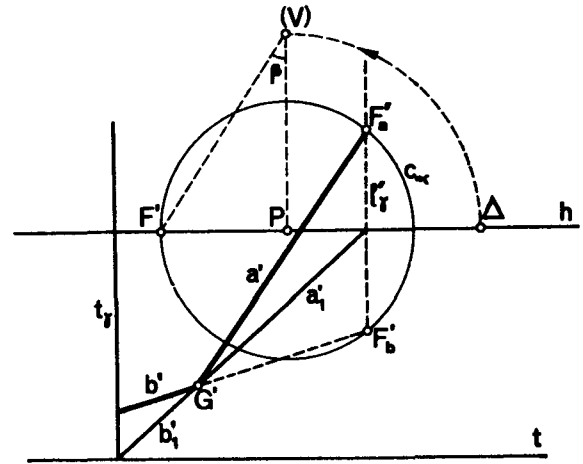


Fig. 32.13.—Recta que forma un ángulo α con el cuadro.

32.9. Círculo y punto de medida

a) Lo dicho en proyección central (núm. 31,20) sirve también para la perspectiva lineal. Como plano de medida suele tomarse uno de traza horizontal, o sea, paralelo a t . Así, para llevar sobre una recta $r'-r'_1$ (Fig. 32.14) una serie de segmentos de longitud l , (graduación de la recta), se toma como plano de medida el $t_\alpha-l'_\alpha$ paralelo a t .

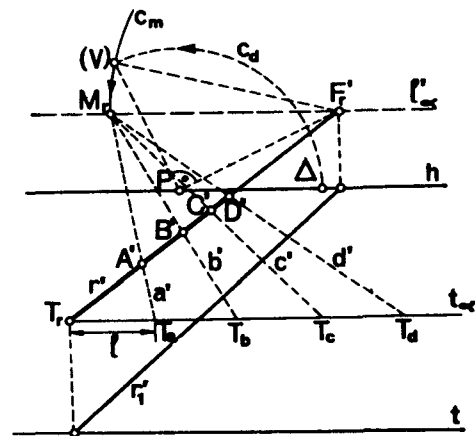


Fig. 32.14.—Graduación de una recta.

Para hallar el punto de medida M'_r de r , se traza $\overline{P(V)}$ = $\overline{P\Delta}$ normal a $\overline{PF'_r}$, siendo $\overline{F'_r(V)}$ el radio del círculo de medida C_m de r que corta a l'_α en M'_r . Se toma luego sobre t_α a partir de T_r , los segmentos $\overline{T_rT_a} = \overline{T_aT_b} = \dots = l$ y se trazan los rayos de medida M'_rT_a, M'_rT_b, \dots , que determinan los puntos de división $A'B', \dots$ de r' .

b) Si la recta s es horizontal (Fig. 32.15), el plano de medida es el horizontal de traza t_α y el círculo de medida, el C_m , de radio $F'_r(V)$, que corta a $l'_\alpha \equiv h$, en M_s , y lo mismo se haría si r está en el geometral que sería, en este caso, el plano de medida.

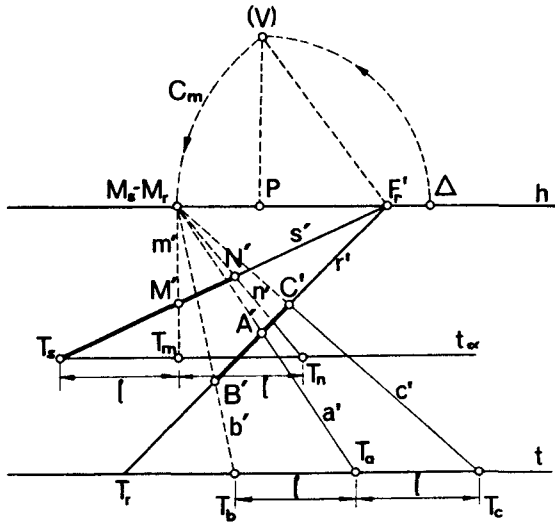


Fig. 32.15.—Graduación de horizontales.

El punto de medida de las normales al cuadro situadas en el geometral (rectas de profundidad) es el punto de distancia Δ . Para dibujar la perspectiva del

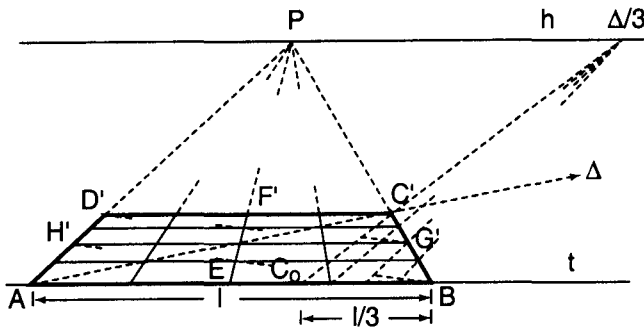


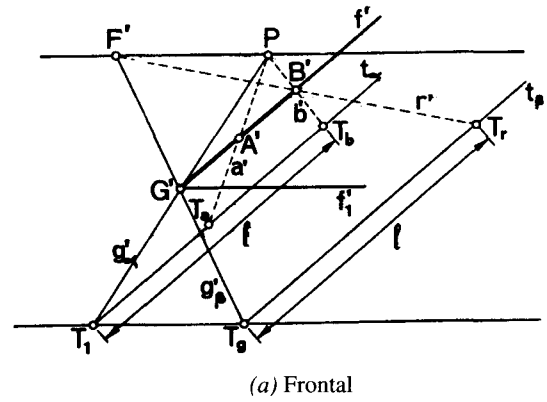
Fig. 32.16.—Efecto de profundidad por cuadrulado.

cuadrado de lado $\overline{AB} = l$, por ejemplo, (Fig. 32.16), se ha utilizado el punto de medida reducido $\Delta/3$ y el rayo de medida reducido que pasa por C_0 y corta al lado \overline{BC} , en C' , siendo $\overline{BC}_0 = l/3$.

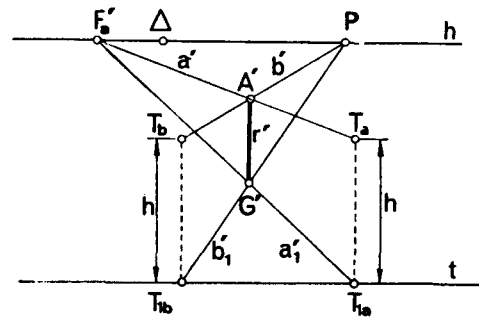
Para acentuar el efecto de profundidad de la perspectiva $ABC'D'$, los lados \overline{AB} y \overline{BC} se han dividido en cuatro partes iguales y por los puntos de división, se han trazado perpendiculares y paralelas a t . Los

puntos de división del lado \overline{BC} se obtienen por rayos de medida reducidos. También puede dividirse la mediatriz EF de \overline{AB} por sus intersecciones con las diagonales BD , BH y GD del cuadrado y de los dos semicuadrados $ABGH$ y $HGCD$.

c) Como las frontales tienen su traza y punto límite impropios (Fig. 32.17), para medir el segmento GB de



(a) Frontal



(b) Vertical.

Fig. 32.17.—Puntos de medida de frontales.

$f'-f'_i$ (Fig. a), basta trazar dos normales al cuadro o dos horizontales que pasen por G y B . Las trazas de estas rectas determinan los segmentos $\overline{T_1T_b} = \overline{T_gT_r} = \overline{GB} = l$ por ser GBT_bT_1 un rectángulo y GBT_rT_g , un paralelogramo. El punto medio A de \overline{GB} se halla directamente o por medio del rayo de medida $T_\alpha P$.

En el caso de verticales o paralelas a t , se emplea el mismo artificio (Fig. b).

d) Para llevar segmentos proporcionales a otro, dado en perspectiva, no es necesario el punto de medi-

da. Así, dada la perspectiva $A'B'C'D'$ de la fachada representada en alzado (Fig. 32.18) se pueden dibujar directamente sobre ella, los huecos de puerta y ventana, tomando sobre la paralela r_o a h segmentos a, b, c, \dots , iguales o proporcionales a los del alzado y trazando

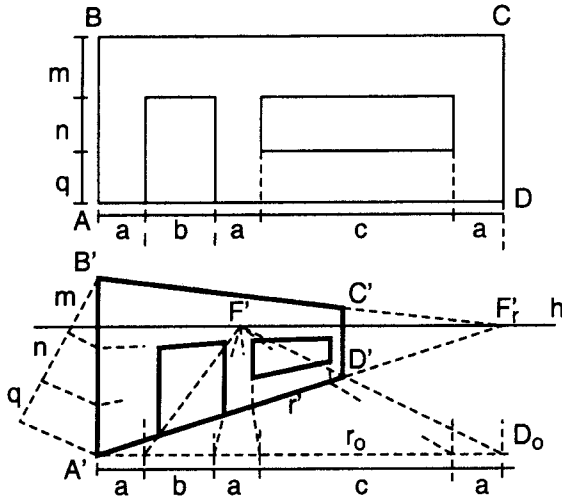


Fig. 32.18. - Trazado práctico de distancias.

por los puntos de división, paralelas fugantes en F' (intersección de D_oD' con h) que determinan sobre r' los bordes verticales de los huecos.

Las alturas se obtienen, dividiendo la arista vertical $A'B'$ en partes proporcionales a m, n y q , como se ve en la figura.

32.10. Coordenadas perspectivas del punto

Sirven para hallar la perspectiva de un punto A (Fig. 32.19), por medio de sus coordenadas, referidas

a tres ejes coordenados. El eje X se hace coincidir con la línea de tierra t y el Z , normal a ella y contenido en el cuadro. El eje Y , normal al cuadro, fuga en P y el centro O se coloca a un lado (generalmente, a la izquierda de la figura).

En este sistema, análogo al de caballera, los ejes X y Z están en verdadera magnitud y el Y' , en perspectiva. Para determinar y' se toma sobre t , a partir de O , $OY = y_a$, en verdadera magnitud. El rayo ΔY corta al eje Y' en el extremo Y' de $OY' = y'_a$.

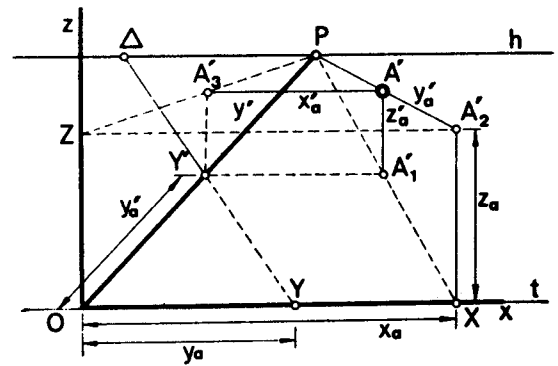


Fig. 32.19. - Coordenadas perspectivas de un punto A .

Para hallar la perspectiva A' del punto de coordenadas x_a, y_a y z_a , se toma luego $OY = y_a$ y por la intersección Y' de ΔY con y' , se traza la paralela a t que corta a PX en la proyección horizontal A'_1 . La perspectiva A' es la intersección de la vertical A'_1A' con la perpendicular PA'_2 al cuadro, trazada por A'_2 , siendo $XA'_2 = z_a$.

El eje y' se llama de profundidad y el Z , de altura, como así se denominan sus coordenadas respectivas.

CONSTRUCCIONES AUXILIARES

32.11. Punto de fuga reducido

a) Sirve para trazar por un punto, de imagen A' (Fig. 32.20), la perspectiva a' de una horizontal cuyo

punto de fuga F' se sale del dibujo pero se conoce su distancia PF' a P como sucede, por ejemplo, al dibujar la perspectiva, partiendo de sus proyecciones diédricas.

En este caso, se traza el segmento $\overline{PA'}$ y se divide en tres partes iguales, por ejemplo. Si por el primer punto de división M , se traza la paralela a a' , cortará a h en un punto F'_r tal que $PF'_r = PF'/3$, por ser homotéticos los triángulos PMF'_r y $PA'F'$ y de razón $1/3$. El punto F'_r se llama *punto de fuga reducido* y se designa con el subíndice r o con la notación $F'/3, F'/4, \dots$, etc., según la fracción que represente de \overline{PF} . De aquí, la construcción:

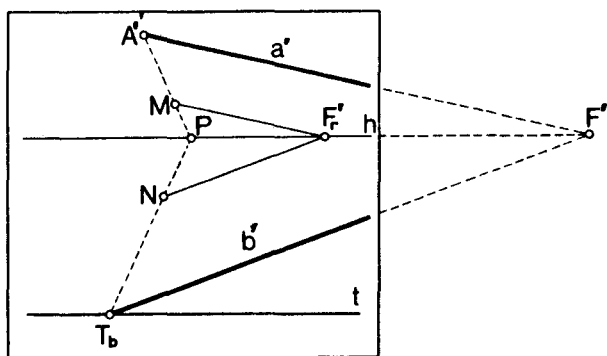


Fig. 32.20. - Punto de fuga reducido.

Elegir el punto de fuga reducido $F'_r \equiv F'/3$; dividir el segmento $\overline{PA'}$ en tres partes iguales y trazar por A' la paralela a' a MF'_r , siendo M el primer punto de división de $\overline{PA'}$. Lo mismo se haría si, en vez de A' , se conoce la traza T_b de la recta b' .

b) *Punto de fuga inaccesible.* (Ver núm. 31.9-b y c).

32.12. Punto de medida reducido

a) sea la horizontal $a \equiv T_a F'_a$ (Fig. 32.21) sobre la que se ha llevado la longitud $\overline{T_a A} = \overline{T_a M} = l$, por medio del rayo de medida $M_a M$. Si doble t se lleva $\overline{T_a N} = l/3$, la recta NA' cortará a h en un punto M_{ar} y se verificará (por ser h y t paralelas): $\overline{F'_a M_{ar}} = \overline{F'_a M_d}/3$.

El punto M_{ar} es el *punto de medida reducido* y se designa con el subíndice r o con la notación $M_d/3$ (por ser $1/3$ la reducción efectuada); NM_{ar} es el *rayo de medida reducido* y corta a a' , en el extremo A' del segmento $\overline{T_a A} = l$. De aquí, la construcción:

Una vez elegido sobre h el punto de medida reducido $M_{ar} \equiv M_d/3$, se toma sobre t la longitud $\overline{T_a N} = l/3$. El rayo de medida reducido $M_{ar}N$ corta a a' en el extremo A' del segmento buscado $\overline{T_a A} = l$.

Si el punto de fuga o el de medida son inaccesibles, se toma una distancia de visión reducida ($1/3$, por ejemplo) y se abaten los dos puntos de vista, el real y el reducido, en (V) y (V_r) , siendo $\overline{P(V_r)} = \overline{P(V)}/3$. Con centro en el punto de fuga reducido $F'_{ar} \equiv F'_a/3$ y radio $F'_{ar}(V_r)$, se traza luego un arco que corta a h , en m_a y determina el triángulo $F'_{ar}(V_r)m_a$ semejante al real $F'_a(V)M_a$, de razón $1/3$, y se procede como sigue:

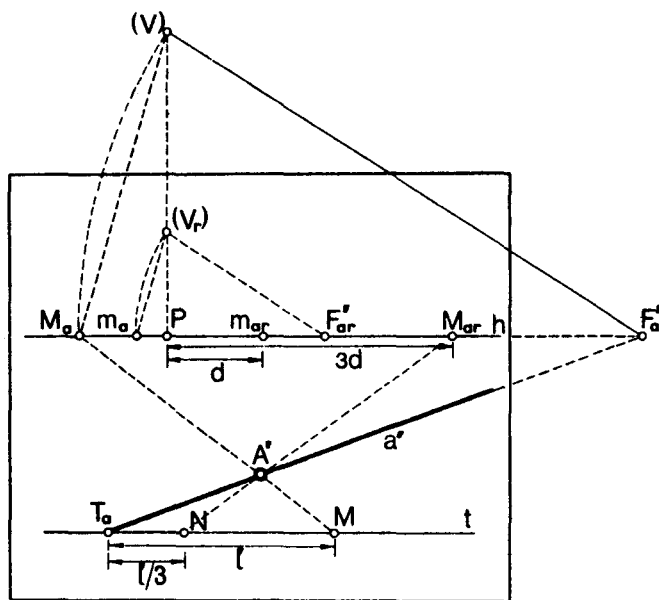


Fig. 32.21. - Punto de medida reducido.

b) *Punto de medida M_a inaccesible.* Basta tomar $\overline{F'_a M_{ar}} = \overline{F'_a m_a}$ lo cual exige conocer F'_a .

c) *Punto de fuga F'_a inaccesible.* Se determina por su distancia $\overline{PM_{ar}} = 3\overline{Pm_{ar}}$ siendo m_{ar} un punto que dista de F'_{ar} la longitud $\overline{F'_{ar} m_{ar}} = \overline{F'_a m_d}/3$. En efecto, de la construcción efectuada se deduce:

$$\frac{\overline{PF'_{ar}}}{\overline{PF'_a}} = \frac{\overline{m_a F'_{ar}}}{\overline{m_a F'_a}} = \frac{\overline{M_{ar} F'_{ar}}}{\overline{M_{ar} F'_a}}$$

de donde:

$$\frac{\overline{PF'_{ar}} - \overline{M_{ar} F'_{ar}}}{\overline{PF'_a} - \overline{M_{ar} F'_a}} = \frac{\overline{PM_{ar}}}{\overline{PM_{ar}}} = \frac{1}{3}$$

Los puntos m_a y m_{ar} son auxiliares, sin ningún otro significado.

d) Como ejemplo de lo expuesto, en la figura 32.22, se ha dibujado la perspectiva de cinco postes vertica-

les, de altura igual a la de uno dado $\overline{A'B'}$, alineados en dirección $a \equiv T_a F'_a$ a distancia igual a cinco veces su altura, habiéndose utilizado el punto de vista reducido $(V_r) \equiv (V)/3$ y el punto de medida reducido $M_r \equiv M_d/3$, distante de F'_a la longitud $\overline{F'_a M_r} = \overline{F'_a N}$.

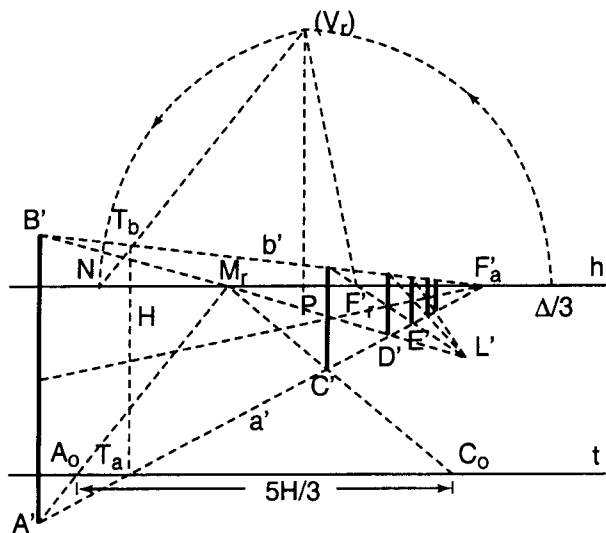


Fig. 32.22.—Postes distanciados cinco veces su altura.

Las trazas T_a y T_b de a y de la paralela b a ella, determinan la altura $H = \overline{T_a T_b}$ de los postes. La separación AC del segundo poste se ha hallado, trazando el rayo de medida MA' de A' y tomando sobre t la longitud $A_o C_o = 5H/3$ que determina el rayo de medida

$M_r C_o$ de C' . Las separaciones restantes $C'D', D'E', \dots$ se han hallado, por paralelogramos iguales (núm. 31,21-1° b).

c) El punto de medida reducido de las normales al cuadro coincide con el punto de distancia reducido Δ_r , como se ve (Figura 32.23) en la perspectiva de la calle

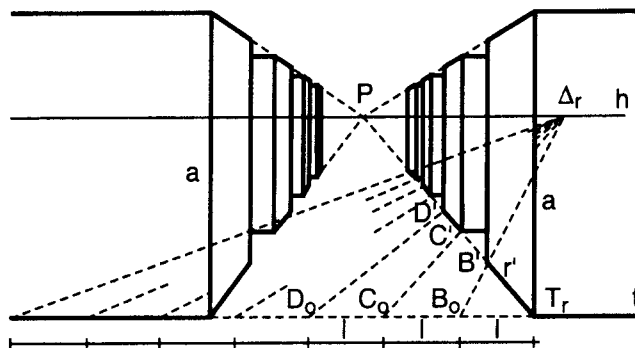


Fig. 32.23.—Punto de medida reducido de normales al cuadro.

formada por cuatro pilas de paja de forma paralelepípedica, de altura a y base cuadrada de arista $2a$, alineadas en dirección r , normal al cuadro, y distanciadas entre sí la longitud $2a$.

Para llevar sobre r las distancias $\overline{T_r B} = \overline{B C} = \overline{C D} = \dots = 2a$, se ha tomado sobre h el punto de medida $\Delta_r \equiv \Delta/8$ y, sobre t , los segmentos $\overline{T_r B_o} = \overline{B_o C_o} = \overline{C_o D_o} = \dots = \text{etc.}$, de longitud $l = 2a/8 = a/4$.

33. PERSPECTIVA DE LÍNEAS Y SUPERFICIES. PERSPECTIVA PRÁCTICA

33.1. Perspectiva de la circunferencia

Los rayos proyectantes de una circunferencia σ (Fig. 33.1) determinan una superficie cónica de vértice V que corta al cuadro, según la perspectiva σ' de σ . Si σ es exterior, tangente o secante a la línea de desvanecimiento d , σ' es elipse, parábola o hipérbola, respectivamente. Si el plano de σ es paralelo al cuadro o pasa por V , σ' es una circunferencia o un segmento, respectivamente.

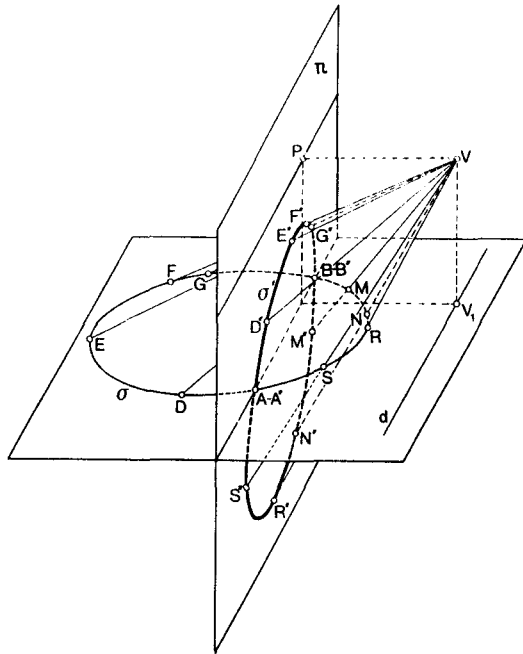


Fig. 33.1.—Perspectiva de circunferencia exterior a d .

33.2. Circunferencia de plano α

La perspectiva se halla, por abatimiento de α sobre el cuadro o sobre un plano frontal, por los métodos que siguen:

1º *Abatimiento sobre el cuadro* (Fig. 33.2). La perspectiva σ' y el abatimiento (σ) de la circunferencia σ de centro O' y radio R , se corresponden (núm. 31,12) en una homología, de eje t_α y centro (V) (abatimiento de V , alrededor de l'_α).

El cuadrado circunscrito a σ , de imagen $E'F'C'D'$, se determina trazando por O' la normal $n \equiv T_n L'_n$ a t_α ,

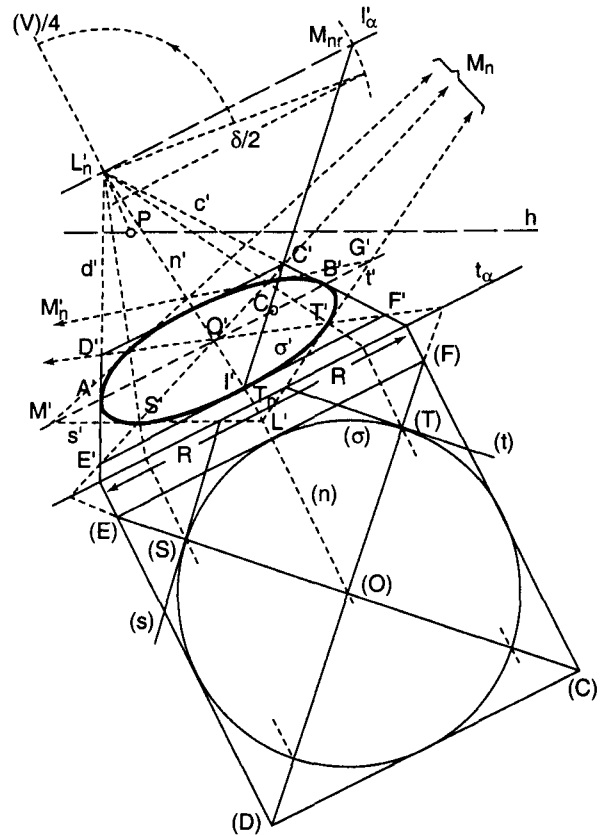


Fig. 33.2.—Por puntos y tangentes.

abatida en (n) , y las paralelas c y d a n , a distancia R de ella, que cortan al diámetro frontal de σ , en A' y B' . El vértice C' se halla por medio del punto de medida reducido $M_{nr} \equiv M_n/2$ de n y del rayo de medida reducido $M_{nr}C_o$ (siendo $B'C_o = B'O'/2$) que corta a c' y n' , en C' e I' , y determina los lados $C'D'$ y $E'F'$ paralelos a t_α .

Las diagonales abatidas $(E)(C)$ y $(F)(D)$ forman 45° con t_α ; se cortan en el abatimiento (O) del centro de (σ) y cortan a ésta en los puntos (S) y (T) de tangentes (s) y (t) paralelas a aquellas: Al desabatir, se obtienen las tangentes s' y t' , en S' y T' , que fugan en M_n y M'_n y determinan el cuadrilátero circunscrito de diagonales n' y $M_n G'$. Se obtiene así un octógono circunscrito que facilita el trazado de σ' .

2º) *Abatimiento sobre un plano frontal* (Fig. 33.3). La perspectiva σ' (no dibujada) y el abatimiento de σ alrededor de la charnela frontal $E'F'$, por ejemplo, hasta dejarla frontal, en (σ) , se corresponden también (núm. 34,18-5º de n/E. de G.D.) en una homología de

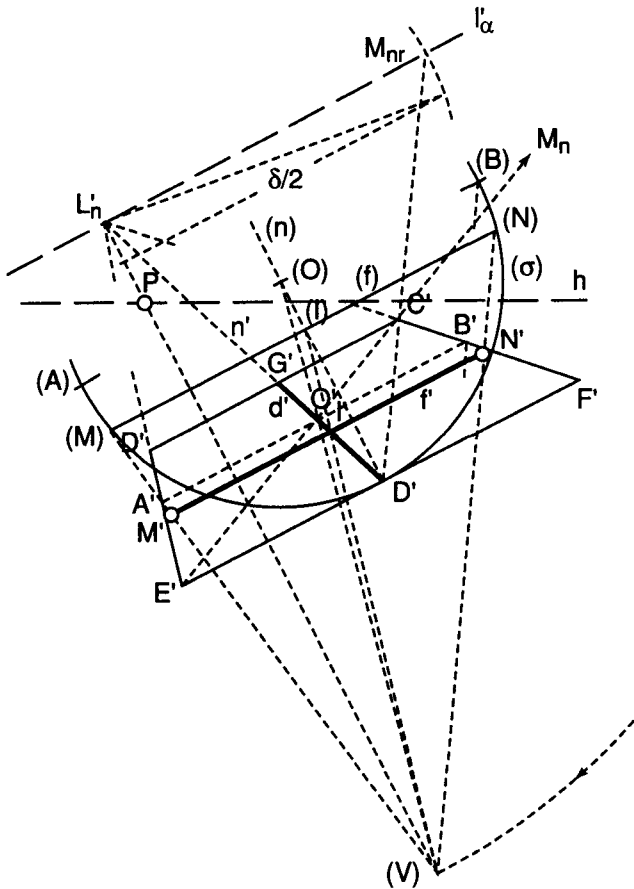


Fig. 33.3.—Por diámetros conjugados.

eje \overline{EF} y centro de homología (V) (abatimiento de V alrededor de l'_α). El abatimiento de la normal n a $t_{\sigma'}$ trazada por O, es la normal (n) a $E'F'$ que corta al rayo $(VO)O'$ en el abatimiento (O) del centro de la circunferencia abatida (σ) , de radio $\overline{(O)D'} = \overline{D'F'}$. Luego se dibuja el diámetro frontal $A'B'$ y el cuadrado circunscrito $C'D'E'F'$, como antes se ha explicado, y se aplica uno de los cuatro métodos que siguen:

a) *Por diámetros conjugados* (Fig. 33.3). El diámetro conjugado del $d' \equiv \overline{G'D'}$ es el $\overline{M'N'}$ paralelo a $\overline{E'F'}$, trazado por I' (punto medio de $\overline{G'D'}$) y se obtiene, como homólogo de la cuerda $f \equiv (M)(N)$ de (σ) , paralela a $\overline{E'F'}$, trazada por el homólogo (I) de I'.

b) *Método abreviado o del octógono circunscrito* (Fig. 33.4). Se deduce del explicado en la figura 33.2. La circunferencia se abate alrededor de $E'F'$, en (σ) (tomando, sobre (n), $I'(O) = I'F'$) y se trazan los

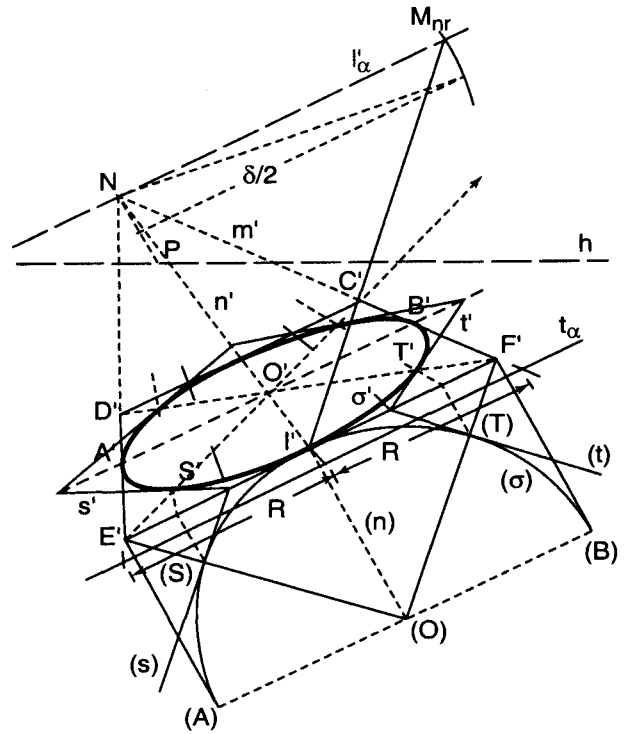


Fig. 33.4.—Método práctico.

radios $\overline{(O)(S)}$ y $\overline{(O)(T)}$, inclinados 45° respecto a $t_{\sigma'}$ y las tangentes en sus extremos, que determinan los lados s' y t' y completan el octógono circunscrito a σ' .

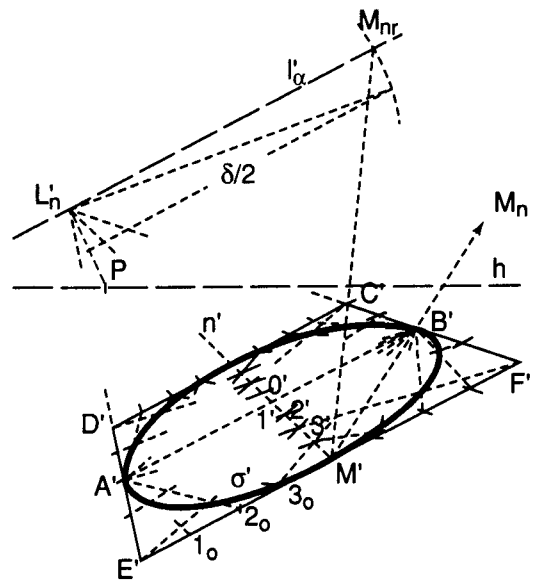


Fig. 33.5.—Método proyectivo

c) *Método proyectivo* (Fig. 33.5). Es una aplicación inmediata del trazado de la elipse, por puntos, por haces proyectivos (núm. 10,4-2º). En el rectángulo de imagen $A'B'F'E'$, el semilado $\overline{M'E'}$ y el semidiámetro $\overline{O'M'}$ se dividen en cuatro partes iguales, por

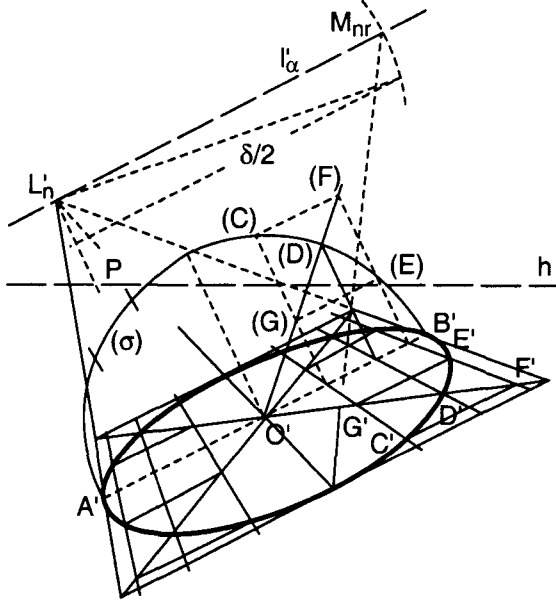


Fig. 33.6.—Por paralelas y normales a t_α

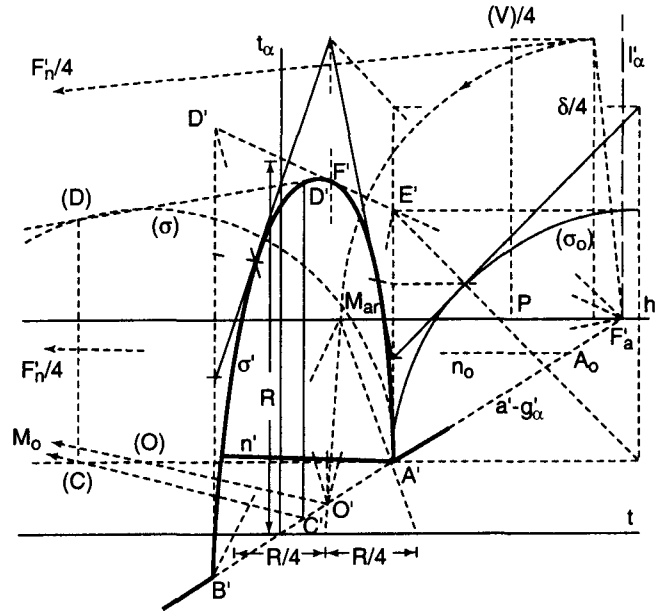


Fig. 33.7.—Circunferencia de plano vertical.

ejemplo, y las imágenes de los puntos de división 1_σ , 2_σ , ..., etc., y $1'$, $2'$, ..., etc., se unen con A' y B' , respectivamente. Las intersecciones de los pares de rayos homólogos ($A'1_\sigma$ y $B'1'$), ($A'2_\sigma$ y $B'2'$), ... son puntos de σ' . Los puntos $1'$, $2'$ y $3'$ se hallan, teniendo en cuenta que el punto $2'$ es el de corte de $A'F'$ y $B'E'$ y divide al rectángulo $A'B'F'E'$ en otros dos iguales, cuyas diagonales se cortan en $1'$ y $3'$. Como se ve, no es necesario abatir σ .

d) *Por paralelas y normales a t_α* (Fig. 33.6). Se abate la semicircunferencia de diámetro \overline{AB} , en (σ) , y se divide en ocho partes iguales, a partir de A' . Si por los puntos de división (C) y (E) se trazan paralelas y normales a t_α , se forma el cuadrado $(C)(F)(E)(G)$, de vértices (F) y (G) situados en la diagonal $O'(F)$. De aquí, la construcción:

Por los puntos de división de (σ) , se trazan normales a $A'B'$ y sus imágenes, fugantes en L'_n , que cortan a la diagonal $O'F'$ en F' , D' , G' , ..., etc. Las frontales trazadas por F' y G' cortan a L'_nG' y L'_nF' , en los puntos C' y E' de σ' . (Ver núms. 34,18 a 34,21 de n/E. de G.D.).

33.3. Circunferencia de plano vertical

Puede aplicarse cualquiera de los métodos del núm. 33,2. Así, la perspectiva de la boca semicircular de centro O y radio R de un túnel, situada en el plano t_α - l'_α (Fig. 33.7), se ha hallado por el método abreviado (núm. 33,2-b), trazando el semicuarto $ABDE$ circunscrito a σ , por medio del punto de medida $M_{ar} \equiv$

$M_\alpha/4$ de la traza geometral $a \equiv g_\alpha$ de α y abatiendo σ , alrededor de $\overline{A'E'}$ hasta dejarla frontal en (σ_0) .

Diámetros conjugados. Para hallarlos, se ha abatido σ , en sentido contrario a (σ_0) , en (σ) . El semidiámetro conjugado de \overline{AB} es el \overline{CD} , paralelo a t_α trazado por C' (punto medio de $\overline{A'B'}$) y se obtiene como homólogo de la semicuerda $(C)(D)$ de (σ) , trazada por el homólogo (C) de C' .

La traza geometral n' de la pared del túnel, normal a α , es la paralela n' a la recta n_0 , fugante en $F'_n/4$, trazada, por A'_0 , siendo $\overline{F'_nA'_0} = \overline{F'_nA'}/4$ (núm. 32,11).

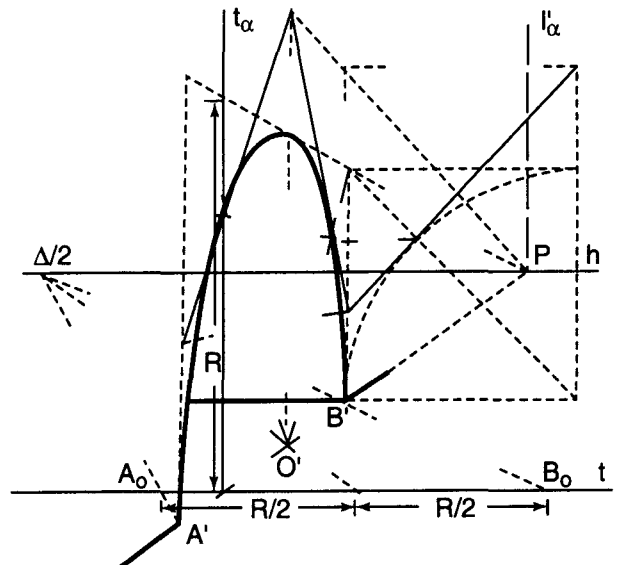
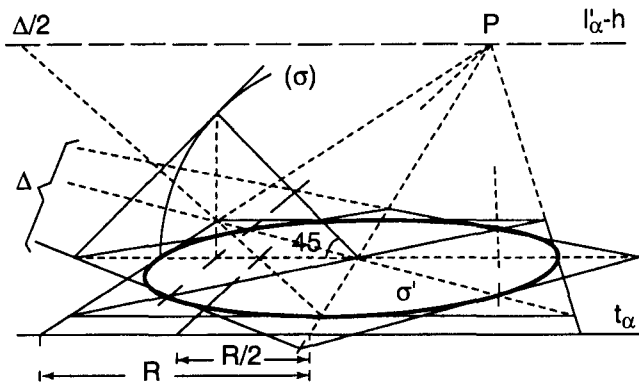
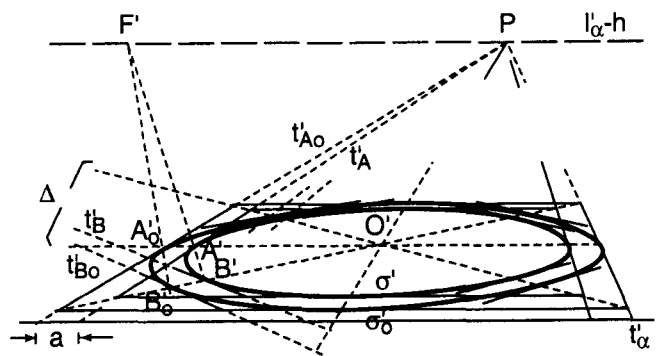


Fig. 33.8.—Circunferencia de plano vertical normal al cuadro.

Si α es normal al cuadro, las construcciones son más sencillas, como se ve en la figura 33.8.



(a) De plano horizontal.



(b) Circunferencias concéntricas.

Fig. 33.9. — Circunferencias.

33.4. Circunferencia de plano horizontal

a) Los métodos expuestos se simplifican notablemente, si α es horizontal, como puede verse en la perspectiva σ' de σ (Fig. 33.9-a), dibujada por el método del octógono circunscrito (núm. 33,2-b).

b) *Circunferencias concéntricas.* Como ejemplo, citaremos los bordes σ' y σ'_o de la acera circular, de centro O y ancho a (Fig. b). Una vez dibujada σ' , por el método del octógono circunscrito, la perspectiva σ'_o se halla fácilmente, por el mismo método, teniendo en cuenta que las cuerdas \overline{AB} y $\overline{A_oB_o}$ (limitadas en σ y σ_o por el diámetro frontal $\overline{O'A}$ y la diagonal OB) son paralelas, de imágenes fugantes en un punto F' de l'_α y lo mismo sucede con los pares de tangentes t_A, t_{A_o} y t_B, t_{B_o} .

Si a partir de la traza de la normal tA al cuadro, trazada por A , se lleva sobre t_α el ancho a de la acera, en verdadera magnitud, se obtiene la normal t_{A_o} al cuadro; el extremo A'_o del radio frontal $\overline{O'A'_o}$ de σ'_o ; el punto de corte B'_o de $F'A'_o$ con la diagonal $O'B'$ y la tangente, en B'_o de imagen t'_{B_o} fugante en Δ . Los restantes puntos y tangentes se hallan de forma análoga.

33.5. Cilindro

Sea el cilindro de revolución de eje vertical (Fig. 33.10), altura H y base circular σ de centro O y radio R , situada en el geometral. La perspectiva σ' de σ se ha hallado por el método del octógono circunscrito (núm. 33,4). La base superior es la circunferencia ω , de plano horizontal de traza t_ω distante de t la longitud H . Su imagen ω' se obtiene directamente, como σ' , o refiriendo a ω los puntos y tangentes de σ , como se ve en la figura.

Las generatrices de contorno aparente son las tangentes verticales t' y s' comunes a σ' y ω' , y pueden

obtenerse directamente, sin dibujar σ' ni ω' , como generatrices de tangencia con el cilindro de los planos verticales tangentes a él, trazados por V . Estos planos cortan al cuadro, según las verticales t' y s' (por ser planos proyectantes), y al geometral, según las tangentes a σ , trazadas desde la proyección horizontal V_1 de V . De aquí, la construcción:

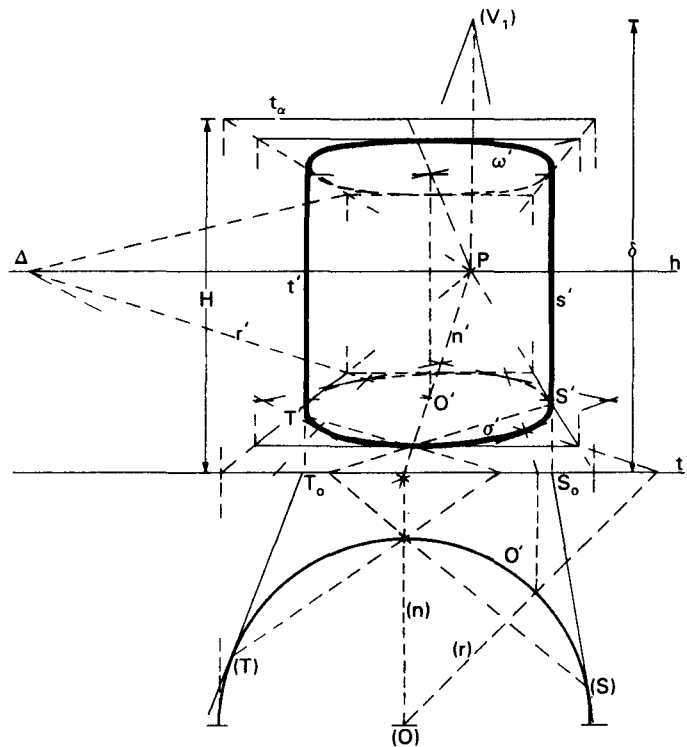


Fig. 33.10. — Perspectiva del cilindro.

Abatir σ y V_1 , en (σ) y (V_1) , siendo (O) la intersección de (n) y (r) y (V_1) , el punto de la normal $P(V_1)$ a t , distante de t la longitud $\delta \equiv \overline{P\Delta}$. Las tangentes a (σ) , desde (V_1) , cortan a t , en T_o y S_o y determinan las tangentes t' y s' , buscadas. Refiriendo a ellas los puntos (T) y (S) de tangencia, se obtienen sus puntos de contacto T' y S' con σ' .

33.6. Cono

Sea el cono (Fig. 33.11) de vértice $W'-W'$ y base circular, de centro O' y radio R , situada en el geometral. La imagen de la base es la elipse σ' , obtenida por el método abreviado (núm. 33,4).

Las generatrices de contorno aparente son las tangentes t' y s' a σ' , desde W' , y pueden obtenerse directamente, sin dibujar σ' , como generatrices de tangencia de los planos proyectantes α y β , tangentes al cono, trazados desde V .

Las trazas geometrales de estos planos son las tangentes $g'_\alpha \equiv t'$ y $g'_\beta \equiv s'$ a σ' que pasan por la traza geomtral G'_a de la recta $a \equiv VW$ (núm. 15,3-b) y se hallan, trazando desde el abatimiento (G_a) de G'_a las tangentes (t) y (s) a (σ) . Al desabatir se obtienen t' y s' y los puntos de tangencia T' y S' .

El abatimiento (G_a) , homólogo de G'_a , se obtiene como intersección de (n) (abatimiento de la normal n al cuadro, trazada por G'_a) con el rayo $(V)G'_a$.

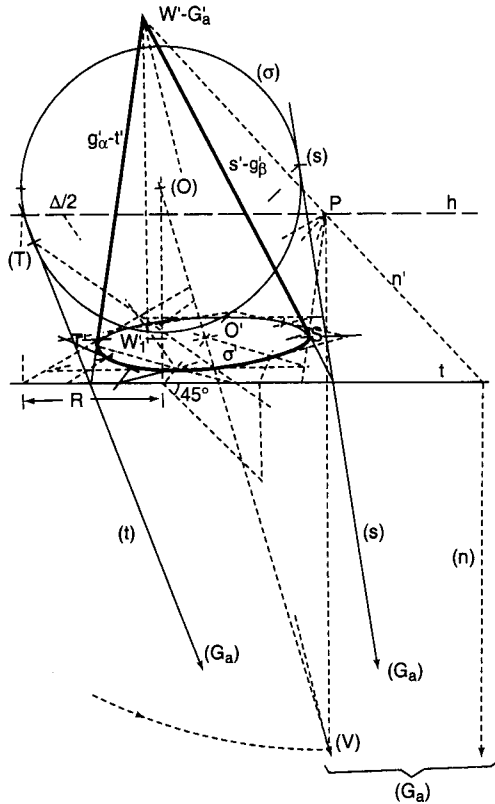


Fig. 33.11. - Perspectiva de cono.

33.7. Superficie de revolución

a) *Paralelos y meridianos.* Sea la superficie de revolución de eje e (Fig. 33.12) y meridiano ω de plano frontal α , formado por tres arcos circulares de centros 1, 2 y 3.

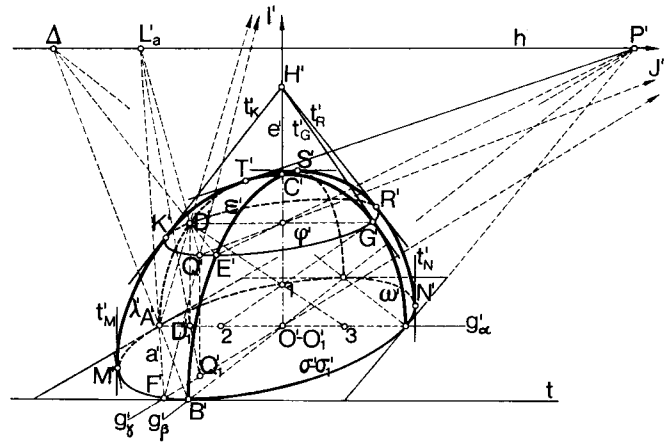


Fig. 33.12. - Perspectiva de una superficie de revolución.

La imagen σ' del ecuador, tangente a t , de centro O , se obtiene por el método abreviado (núm. 33,4).

La homotecia espacial entre paralelos o entre el paralelo φ y el ecuador σ se proyecta en perspectiva (núm. 2,5), según una homología de centro I' (proyección de la intersección de AD con el eje), eje h (proyección de la intersección impropia de los plano de φ y σ) y par de punto homólogos A' y D' , lo cual permite dibujar φ' .

La afinidad espacial entre ω y cualquier otro meridiano de plano β , por ejemplo, se proyecta, según una homología de eje e' (proyección de la intersección de los planos meridianos), par de puntos homólogos A' y B' y centro Δ (punto de corte de $A'B'$ y h), siendo Δ el abatimiento de V alrededor de la recta límite del plano meridiano, pudiéndose así hallar éste, como homólogo de ω' .

La tangente t'_G a ω' , en G' (punto de corte de ω' y φ') corta a e' , en el vértice H' del cono circunscrito a la superficie, según el paralelo φ' .

b) *Contorno aparente.* Es la envolvente λ' de las imágenes de los paralelos y meridianos y se halla, por métodos análogos a los expuestos en caballera.

El cilindro circunscrito a la superficie, según el meridiano frontal ω , se proyecta según el cono de vértice P y directriz ω' . Las tangentes a ω' , desde P , son imágenes de las generatrices del contorno aparente del cono y son tangentes a la superficie en los mismos puntos de tangencia (en la figura, sólo el T'). Así se obtienen las siguientes tangentes y puntos de tangencia con el contorno.

- Los M' y N' de contacto de las tangentes t'_M y t'_N a σ' , paralelas al eje.
- El de tangencia S' de la paralela a t , tangente al meridiano de plano β .
- Los de contacto K' y R' de las tangentes a φ' , trazadas desde H' , lo cual permite dibujar fácilmente el contorno.

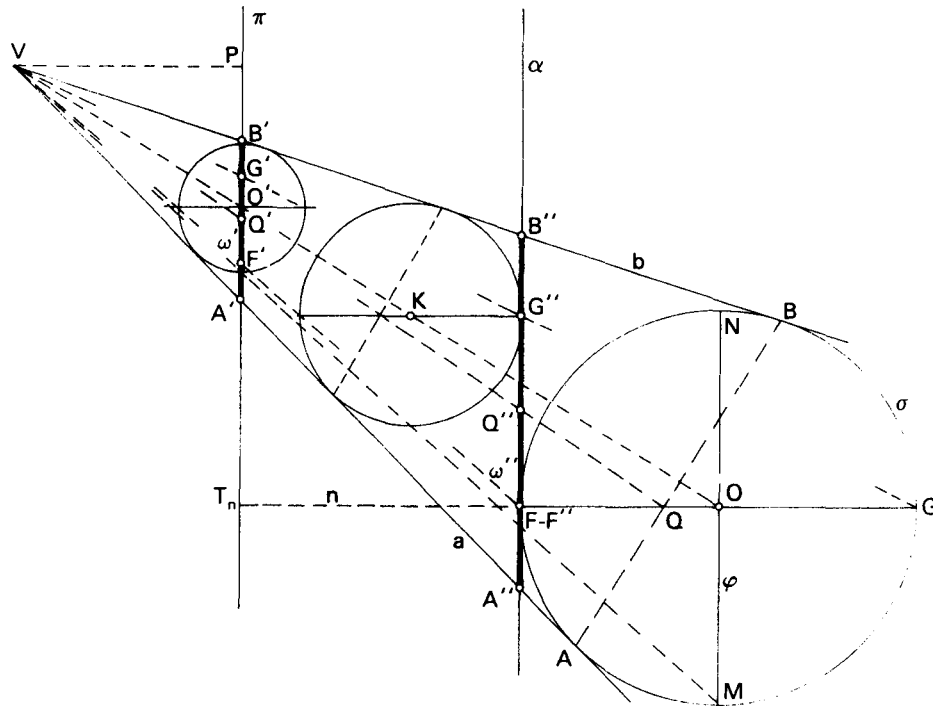


Fig. 33.13.—Perspectiva de la esfera.

Estos puntos de tangencia pueden también hallarse directamente por las homologías citadas.

33.8. Esfera

Los rayos visuales tangentes a la esfera de centro O (Fig. 33.13) forman un cono de revolución, de eje VO (cono visual de la esfera), cuya sección por el cuadro π es una cónica ω' (contorno aparente de la esfera) que puede ser hipérbola, parábola o elipse, según que la esfera sea secante, tangente o esté delante del plano de desvanecimiento, como sucede en la figura.

Si VO es normal al cuadro, ω' es un círculo. Si V es un punto de la esfera, ω' es la traza del plano tangente en V a la esfera (cono degenerado) y si V es interior a la esfera, desaparece ω' (no existe contorno perspectivo).

La perpendicular VP al cuadro determina con VO un plano (coincidente con el del papel), normal al cuadro (por contener a \overline{VP}), que corta a la esfera, según el círculo máximo σ (por pasar por O).

Las secciones del cono por planos paralelos a π son semejantes entre sí (homotéticas) y sus imágenes se confunde con $\omega' \equiv \overline{A'B'}$ luego el plano α , paralelo a π y tangente a la esfera, en F , cortará el cono según una elipse ω'' cuyo eje es la traza $\overline{A''B''}$ de α con el plano normal a él, trazado por V (núm. 15,6) y sus

focos, los puntos de tangencia F'' y G'' de α con las esferas de centro O y K , tangentes al cono y a α .

Los diámetros de ambas esferas, de extremos F'' y G'' , son paralelos, por ser normales a α , luego el rayo VG'' , pasará por el extremo G del diámetro \overline{FG} . Por otra parte, el centro Q'' de la elipse (punto medio de $\overline{A''B''}$) es imagen de la intersección Q de FG con la proyección ortogonal \overline{AB} del círculo de tangencia del cono. De aquí, la construcción:

a) Trazar, desde V , las tangentes a y b a σ y unir los puntos de tangencia A y B . Trazar luego el diámetro \overline{FG} , perpendicular a π que corta a \overline{AB} , en Q , y proyectarlo todo sobre α , desde V . La imagen $A'B'$ de AB es el eje mayor de la elipse $\omega' \equiv \overline{A'B'}$; las imágenes F'' y G'' de los extremos del diámetro FG son los focos y la imagen Q' de Q , el centro. El eje menor es la normal a $\overline{A'B'}$, por Q' , y sus extremos, las intersecciones de éste con el arco de centro F' o G' y radio $\overline{A'B'}/2$.

b) Si con centro en O' (imagen de O) se traza la esfera inscrita en el cono, su sección por el plano del papel es un círculo tangente a VA y VB , cuyo radio es imagen del radio \overline{OM} de la esfera dada y su sección por el cuadro es imagen del círculo máximo frontal φ de la esfera, proyectado sobre el papel, en \overline{MN} .

Lo expuesto sirve para hallar la perspectiva de una esfera de centro $O'-O_i$ y radio R , por los métodos que siguen:

1º *Por abatimiento* (Fig. 33.14).- Por $O'-O'_1$ se traza la normal $n'-n'_1$ al cuadro, de traza T_n . El plano $\alpha \equiv [VO, n]$ es el proyectante, de traza $t_\alpha \equiv n'$ que abatimos sobre el cuadro, siendo (V) y (n) los abatimientos de V y n y (O) (intersección de $(V)O'$ y (n)), el del centro O .

El abatimiento de la sección σ de la esfera por el plano α es la circunferencia (σ) de centro (O) y radio R que corta a (n) , en (F) y (G) . El eje mayor de la elipse ω' de contorno aparente de la esfera es n y corta a $(V)(F)$ y $(V)(G)$, en los focos F' y G' y a las tangentes (a) y (b) a (σ) , desde (V) , en los vértices A' y B' . El centro Q' (punto medio de $A'B'$) ha de coincidir con la imagen de (Q) (intersección de (n) y $(A)(B)$).

Los extremos del eje menor $C'D'$ son los puntos de corte de la mediatriz de $A'B'$ con el arco de centro F' y radio $F'C' = Q'A'$.

2º *Método directo* (Fig. 33.15).- Sobre la normal $n'-n'_1$ al cuadro, trazada por $O'-O'_1$, se llevan los segmentos $\overline{OF} = \overline{OG} = R$, por medio del punto de medida Δ , tomando como plano de medida el horizontal de traza $T_n G_o$ y llevando sobre ésta, a partir de la traza I del rayo de medida $\Delta O'$, $\overline{IF_o} = \overline{IG_o} = R$. Los focos de ω' son las imágenes F' y G' de los extremos del diámetro normal al cuadro y el punto medio Q' de $F'G'$, el centro.

Por otra parte, el cilindro circunscrito a la esfera, de generatrices normales al cuadro, se proyecta según el cono de vértice P y es tangente a la esfera, según el círculo máximo frontal (meridiano principal), de imagen circular ϕ' , de centro O' y radio $\overline{O'E'}$ (imagen de radio de la esfera paralelo a t). Las generatrices del contorno aparente del cilindro son las tangentes t' y s' a ϕ' , trazadas desde P y son también tangentes a ω' , en los mismos puntos T' y S' (núm. 14,13-3º de n/G. D.S. y A.). De aquí la construcción:

Trazar la circunferencia ϕ' , como se ha dicho, y las tangentes t' y s' a ella, desde P . Los puntos de tangen

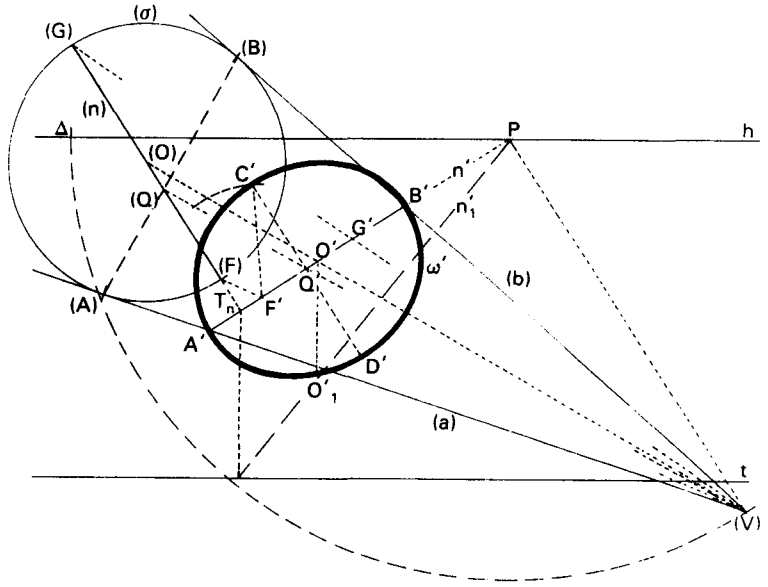


Fig. 33.14. - Por abatimiento.

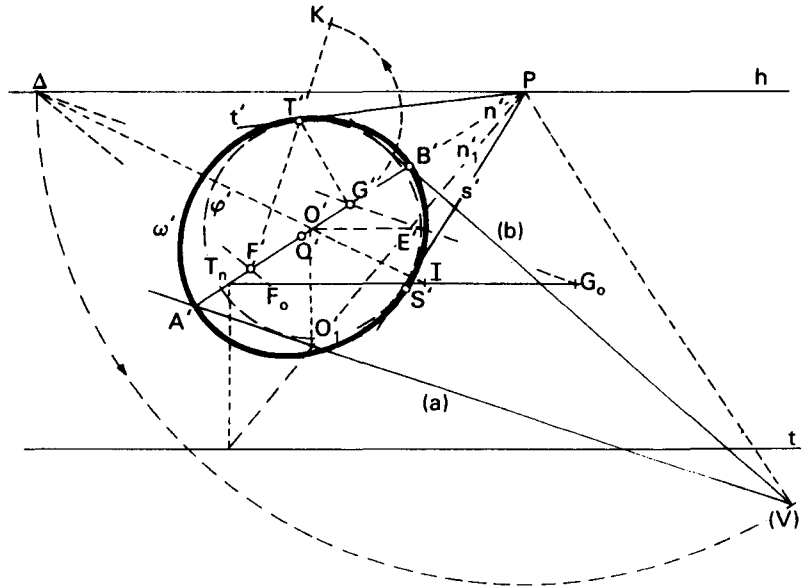


Fig. 33.15. - Método directo.

cia T' y S' pertenecen a ω' y permiten hallar la longitud $\overline{A'B'} = \overline{F'T'} + \overline{T'G'} = \overline{F'K}$ del eje mayor. El eje menor se obtiene, como en el método anterior.

Si P es interior a ϕ' , los vértices A' y B' son los puntos de corte de n' con las tangentes (a) y (b) a ϕ' , trazadas desde (V) .

Las figuras de un libro suelen mirarse a 25 o 30 cm. de distancia; los dibujos colgados en la pared, a metro o metro y medio y los cuadros, a distancias mayores. La perspectiva anterior debía haberse ampliado, por tanto, hasta que $\delta = \overline{P\Delta}$ mida 20 o 25 cm., como se ha dicho.

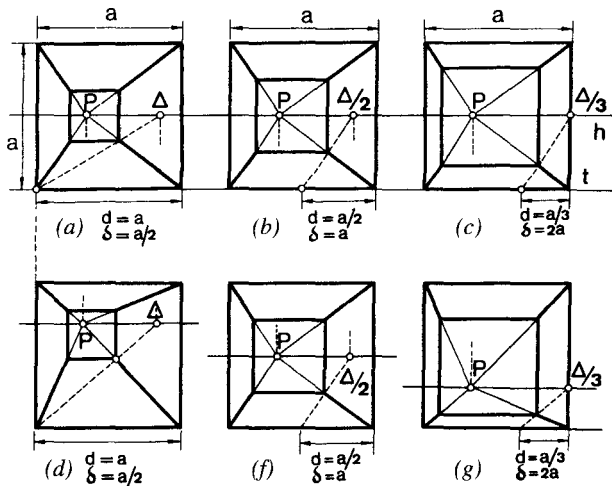


Fig. 33.17.—Influencia de la altura y distancia de visión en la perspectiva de una sala cúbica.

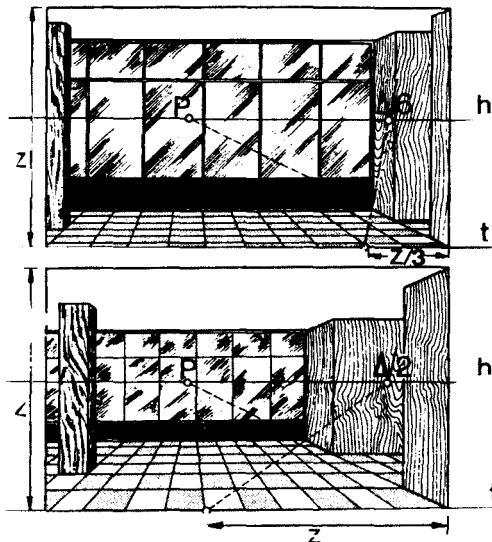


Fig. 33.18.—Perspectivas de un local con distancias de visión distintas.

33.11. Elección de datos

a) *Posición del punto de vista V.* Debe estar lo bastante alejado del objeto para que el ángulo del cono visual de vértice V, sea inferior a 60° (núm. 33,9) y su situación, en planta y alzado, depende de las partes que interese resaltar y del efecto a conseguir.

En edificios aislados, monumentos, etc. en los que interese representar dos fachadas, se situará frente a la esquina formada por ambas. En locales cerrados (viviendas, comercios, edificios para exposiciones, etc.), si no se encuentra un punto desde el que se vea

gran parte de él con un ángulo visual adecuado, se coloca V fuera del local y se consideran transparentes o inexistentes los paramentos que no interesen.

b) *Altura de V.* Debe coincidir con la visual del ojo del observador y oscila de 1,60 a 1,20 m., según se trate de un observador de pie o sentado. Los puntos de vista situados a poca altura (perspectiva de rana) resaltan la altura de los objetos pero atenuan el efecto de profundidad. Esto se utiliza con fines publicitarios, para que el techo de las habitaciones parezca más alto, etc., (“contrapicado” fotográfico).

Los puntos de vista más altos que el objeto, disminuyen el efecto de altura y aumentan el de profundidad (“picado” fotográfico). De aquí que, para representar grandes superficies horizontales (terrenos, urbanizaciones, panorámicas, etc.), se utilicen puntos de vista muy elevados (perspectiva de pájaro).

La altura V será mayor o menor que la del objeto, según que quiera o no verse la parte superior de éste.

En la figura 33.17, se han dibujado seis perspectivas del interior de una habitación de forma cúbica, de arista a, suponiendo transparente la cara coincidente con el cuadro. Las dos de cada columna se han dibujado a igual distancia δ y las inferiores, con alturas de V mayor, igual o menor que las superiores.

Comparando las a y d y las c y g, se aprecia claramente la influencia de la altura de V en la profundidad de la habitación y en la altura del techo. Análogamente, en las a, b y c, la perspectiva parece más real a medida que la distancia de visión aumenta desde 1,5 cm. (Fig. a) a 6 cm. (Fig. c).

c) *Colocación del cuadro.* En carreteras, calles, túneles, puentes, etc., conviene colocarlo perpendicularmente a su eje longitudinal.

En edificios aislados, con dos fachadas de igual importancia, se coloca formando con ellas ángulos iguales. En caso contrario el ángulo que forme con la más importante ha de ser menor que con la otra, llegando incluso a anularse o ser paralelo a ella (perspectiva frontal).

En interiores se rige la misma regla y si interesa representar las tres paredes, se coloca paralelo a la del fondo.

d) *Distancia de visión.* En general, al aumentar la distancia de visión $\delta = \overline{P\Delta}$ el efecto de profundidad disminuye y el de altura, aumenta. Mirando las figuras 33.17-a, b y c de izquierda a derecha, la pared de fondo se acerca al cuadro y el techo se eleva.

En las perspectivas del local de profundidad doble de la altura z (Fig. 33.18), la inferior representa un local aparentemente más amplio y profundo pero de techo más bajo que el de la superior, por ser la distancia de visión tres veces menor que la otra.

34. MÉTODOS PERSPECTIVOS. CUADRO INCLINADO

34.1. Generalidades

Para dibujar la perspectiva de cuerpos hay que determinar la de los puntos y líneas que definen los contornos y elementos más representativos, por medio de ciertas construcciones llamadas *métodos perspectivos*. Su elección depende de la posición y naturaleza de la figura y de los datos que se conozcan, sin que ésto quiera decir que sólo deba emplearse un método sino los más apropiados en cada caso o fase del dibujo. A continuación, se exponen los ocho métodos más usuales o representativos.

34.2. Método directo o de trazas de visuales

Consiste en trazar el rayo proyectante de cada punto y hallar su traza con el cuadro (perspectiva del punto). Así, en la figura 34.1, para hallar la perspectiva del monolito piramidal, de bases ABC y DEF , representado en diédrica (Fig. a), se ha elegido previamente el punto de vista V_1-V_2 (núm. 33,9-b), la visual principal V_1P_1 coincidente con la bisectriz V_1P_1 del ángulo $\alpha = A_1V_1B_1$ y el cuadro $h_{\pi}-v_{\pi}$ de traza h_{π} normal a V_1P_1 que pasa por C_1 .

La perspectiva se ha dibujado aparte, a escala triple (Fig. b), trazando h y t , distanciadas la altura de visión H_v ; marcando sobre h un punto arbitrario P (punto principal), proyectado ortogonalmente sobre t , en P_1 y llevando $\overline{PA_0/3} = \delta/3$.

Se traza luego la visual VA del vértice A , por ejemplo, que corta al cuadro en $A_1'-A_2'$ (perspectiva de A) y se lleva a la figura b, tomando sobre t , $\overline{P_1A_0} = \overline{P_1A_1} = a$ y sobre la vertical $A_0'A'$, la cota h_A de A' , siendo A' la perspectiva de A . Los restantes vértices se obtienen de forma análoga. Con estos datos, la perspectiva queda dentro del círculo de visión C_v de radio $r_v = \overline{PK}$ (núm. 33.9).

Este método exige realizar muchas medidas que facilitan las equivocaciones, por lo que sólo se utiliza con figuras sencillas o puntos aislados.

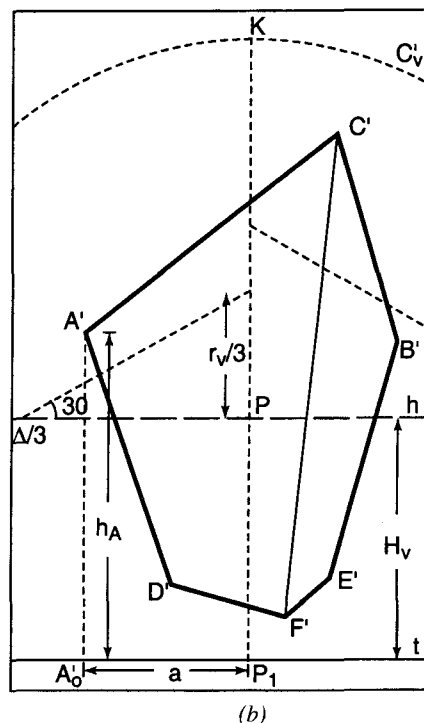
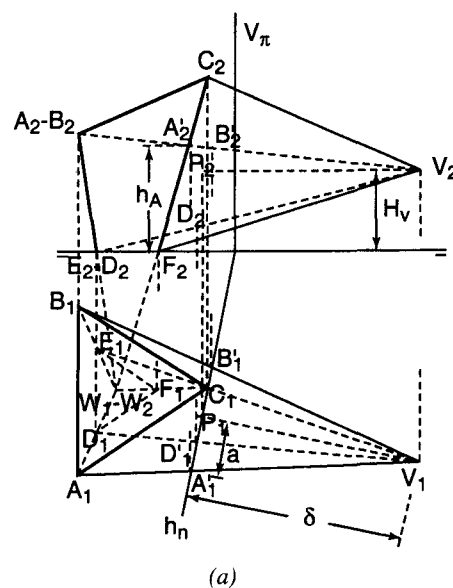


Fig. 34.1.—Método directo o de trazas de visuales

34.3. Método de coordenadas

Consiste en determinar la perspectiva, por medio de las coordenadas perspectivas del punto (núm. 32,10).

En la figura 34.2, para hallar la perspectiva de la escultura moderna geométrica Σ_1 - Σ_2 , representada en diédrica, se ha elegido el punto de vista V_1 - V_2 , el cua-

dro vertical π que pasa por la arista b_1 - b_2 de Σ y el triedro coordenado, de centro O_1 - O_2 y ejes $X \equiv h_\pi$, Y (normal a X , trazado por A_1) y Z , contenido en π .

La perspectiva se ha dibujado aparte, a escala doble (Fig. b), trazando previamente h y t , distanciadas la altura de visión H_v , y marcando, sobre t , el origen O (a la izquierda de la figura) y el punto P , de abscisa \overline{OP}

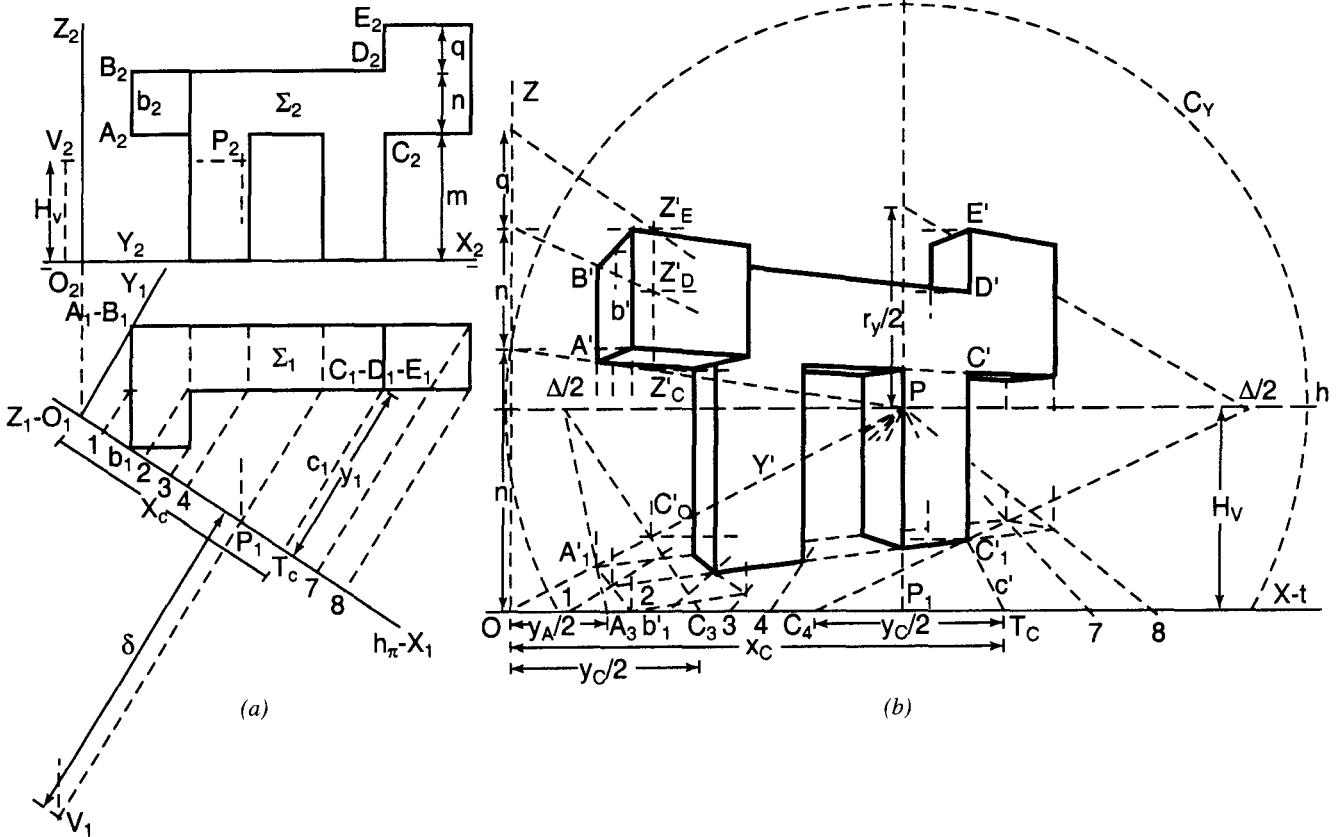


Fig. 34.2.—Método de coordenadas.

$= \overline{O_1P_1}$ y luego, sobre h , el punto principal P y el de distancia reducida $\Delta/2$, distante de P , $\overline{P\Delta/2} = \delta/2$. Los ejes perspectivos son, por tanto $X \equiv t$, $Y \equiv OP$ y el vertical Z (eje de alturas) sobre el que se han tomado las alturas m , n y q de Σ .

La perspectiva de la proyección C_i de los puntos C , D , y E , por ejemplo, se halla trazando por C_i la normal c_i a X , de traza T_c , que determina las coordenadas $x_c = \overline{OT_c}$ e $y_c = \overline{T_cC_i}$, llevadas a la fig. b, tomando sobre X , $\overline{OT_c} = x_c$ y $\overline{OC_3} = y_c/2$ y trazando el rayo de medida reducido $C_3\Delta/2$ que corta a Y' , en C'_o , siendo $y'_c = \overline{OC'_o}$. Refiriendo C'_o a las líneas de altura m , n y q , se

obtienen las alturas perspectivas z'_c , z'_o y z'_e de C' , D' y E' .

La ordenada $T_cC'_i = y'_c$ se halla más fácilmente, tomando sobre t , la longitud $\overline{T_cC_4} = y_c/2$, a partir de T_c . El rayo de medida reducido $C_4\Delta/2$ corta a c' , en C'_i .

Los restantes puntos se hallan de forma análoga. El A'_i , situado en Y' , se halla por el rayo de medida reducido que une A_3 y $\Delta/2$ y la arista b' , directamente por estar en el cuadro.

Este método, como el anterior, resultan muy laboriosos por lo que sólo se utilizan con figuras sencillas o puntos aislados.

34.4. Método de trazas y puntos de fuga

Las perspectivas de rectas se determinan en este método por sus trazas y puntos de fuga y las de puntos, como intersecciones de imágenes de rectas.

La perspectiva de la maqueta volumétrica del almacén agrícola representado en diédrica (Fig. 34.3) se ha hallado, eligiendo previamente el punto de vista V_1-V_2 y el cuadro π que pasa por I_1-I_2 . Las trazas y puntos de fuga de las direcciones principales a_1-a_2 y

b_1-b_2 son las intersecciones T_{1a} , T_{1b} y F_{1a} , F_{1b} con el cuadro de a_1 y b_1 y de las paralelas a éstas, trazadas por V_1 .

La perspectiva se ha dibujado aparte, a escala doble (Fig. b), trazando h y t (distanciadas la altura de visión H_v) y marcando sobre h un punto arbitrario P (proyectado ortogonalmente, sobre t , en P_1) y los puntos de fuga F'_a y F'_b , por sus distancias $PF'_a = P_1F_{1a}$ y $PF'_b = P_1F_{1b}$, medidas en diédrica. Este último se ha utilizado, por medio de un papel auxiliar que es lo más práctico.

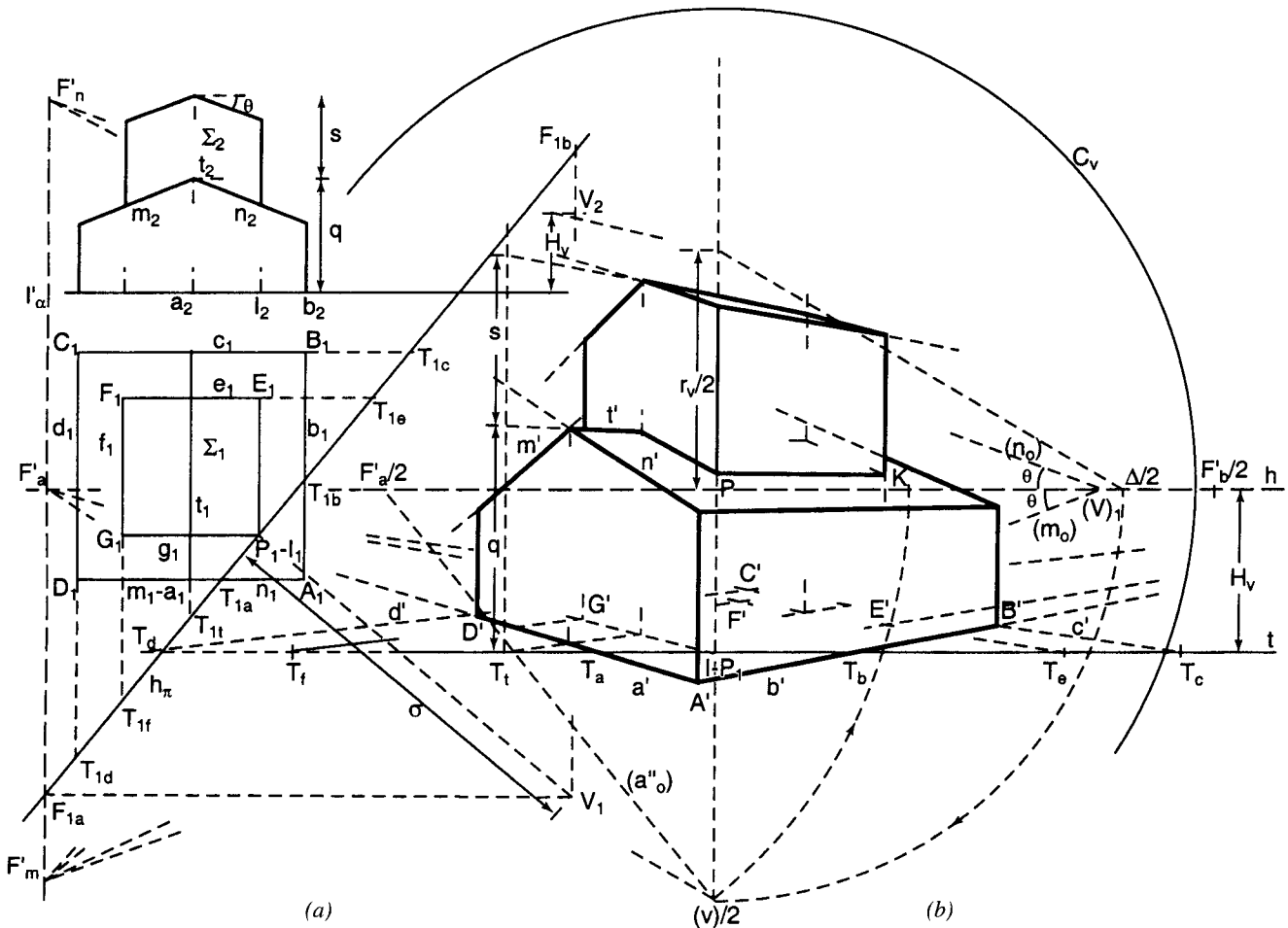


Fig. 34.3.—Método de trazas y puntos de fuga.

Las trazas $T_{1d}, T_{1f}, T_{1v}, T_{1e}, \dots$ etc., de las paralelas a b_1 y a_1 se llevan luego sobre t , por sus distancias $P_1T_b = P_1T_{1b}, P_1T_f = P_1T_{1f}, \dots$, etc.

Las perspectivas $a' \equiv F'_aT_a$ y $b' \equiv F'_bT_b$ de a y b cortan a las d' y c' de d y c , en los vértices A', B', C' y D'

de la planta, por los que pasan las aristas verticales del edificio y lo mismo sucede con los vértices interiores I, E', F' y G' de la planta interior.

Las cumbres t' de los tejados, fugantes en F'_b , se han hallado por sus trazas, de cotas q y $q + s$ y los

bordes m' y n' , por sus puntos de fuga F'_m y F'_n , situados en la recta límite del plano $\alpha \equiv [m, n]$. Para hallar éstos, se abate el plano de fuga de α , alrededor de l'_α y con él, el punto de vista V , en $(V)_1$, y se trazan por $(V)_1$ las rectas m_o y n_o (abatimientos de los rayos de fuga de m y n) que forman con h el ángulo θ , dado y cortan a

l'_α en F'_m y F'_n .

El punto $(V)_1$ se ha hallado, trazando por el punto de vista reducido $(V)/2$ la paralela al rayo de fuga a_o de a , abatida en la recta $(a'')_o$ que une $F'_d/2$ y $(V)/2$ y girando luego su extremo $(V)/2$, alrededor de $F'_d/2$, hasta situarlo sobre h , en K , siendo $\overline{P(V)_1} = 2\overline{PK}$.

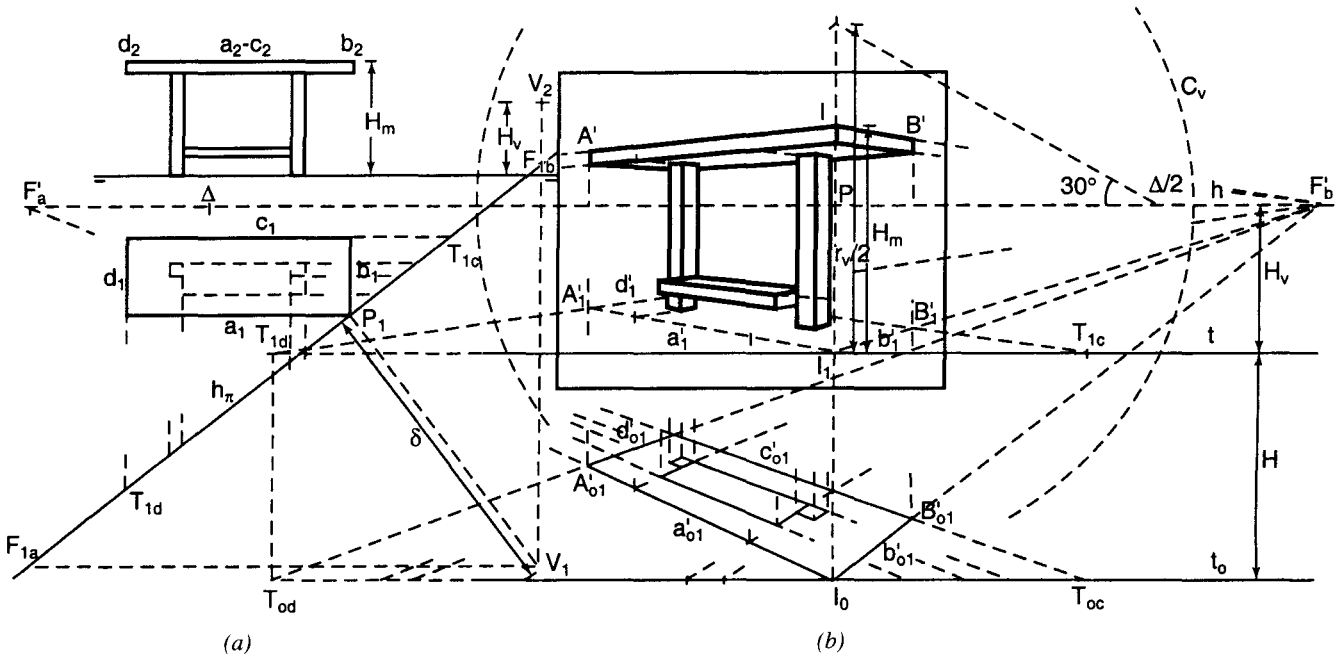


Fig. 34.4. – Método de planta y altura. Geometral auxiliar.

34.5. Método de planta y altura. Geometral auxiliar

Consiste en dibujar la perspectiva de la planta de la figura, como ya se sabe y hallar luego la altura de cada punto directamente o por la escala de alturas. Esto es lo que se ha hecho con la marquesina, de altura H_m , representada en diédrica (Fig. 34.4-a), siendo V_1-V_2 el punto de vista (de altura $H_v < H_m$); π , el cuadro vertical y F_{1a} y F_{1b} , los puntos de fuga de las direcciones principales a_1 y b_1 de la planta.

La perspectiva se ha dibujado aparte, a escala doble, por el método de trazas y puntos de fuga, trazando h y t , distanciadas la longitud H_v y llevando sobre h , a partir de un punto arbitrario P : $\overline{PF'_a} = \overline{P_1F'_{1a}}$, $\overline{PF'_b} = \overline{P_1F'_{1b}}$ y $\overline{P\Delta/2} = \overline{P_1\delta/2}$ y sobre t : $\overline{I_1T_{1d}} = \overline{P_1T_{1d}}$, $\overline{I_1T_{1b}} = \overline{P_1T_{1b}}$, $\overline{I_1T_{1c}} = \overline{P_1T_{1c}}$, etc.

Si la altura de visión es muy pequeña, como sucede en este caso, las imágenes de las rectas de planta se

cortan bajo ángulos muy pequeños y sus intersecciones se obtienen con poca exactitud. Para evitarlo, se elige un *geometral auxiliar* más bajo, de traza arbitraria t_o , a la que se refieren las trazas $I_1, T_{1d}, T_{1c}, \dots$, por medio de verticales, en $I_o, T_{od}, T_{oc}, \dots$, etc. Las nuevas imágenes a'_{o1}, c'_{o1} y b'_{o1}, d'_{o1} , fugantes en F'_a y F'_b , se cortan en puntos A'_{o1} y B'_{o1} , situados en la vertical de A' y B' , lo cual permite hallar éstos con más exactitud. Las restantes aristas se hallan de forma análoga.

Más práctico es llevar las trazas directamente sobre t_o tomando, a partir de I_o : $\overline{I_oT_{od}} = \overline{P_1T_{1d}}$, $\overline{I_oT_{oc}} = \overline{P_1T_{1c}}$, etc. Las alturas se llevan, en verdadera magnitud, sobre el eje de alturas I_1I , como se ve en la figura.

Con este artificio, las alturas quedan aumentadas la longitud H (distancia entre t y t_o). Las dos plantas son congruentes (iguales) en el espacio y sus imágenes se corresponden en una afinidad ortogonal de eje h , restas homólogas t_o y t y puntos homólogos A'_{o1} y A'_1 .

34.6. Método de abatimiento

La perspectiva se determina, por abatimiento de la planta o de la cara principal de la figura, como se ha hecho con el puente de arco circular, representado en diédrica (Fig. 34.5-a), siendo V_1 - V_2 el punto de vista; π , el cuadro y P_1 - P_2 , el punto principal.

La perspectiva se ha dibujado aparte, a escala doble (Fig. b), trazando las horizontales h y t , distanciadas la altura de visión H_v y tomando sobre h , a partir de un punto arbitrario P , $\overline{P\Delta} = \overline{P_1V_1}$, $\overline{PF'_a} = \overline{P_1F_{1a}}$ y $\overline{PF'_b} = \overline{P_1F_{1b}}$, pudiendo así trazar el plano $\alpha \equiv [t_\alpha - l'_\alpha]$ de la cara frontal del puente y los abatimientos (ω) y (r) de ω y r .

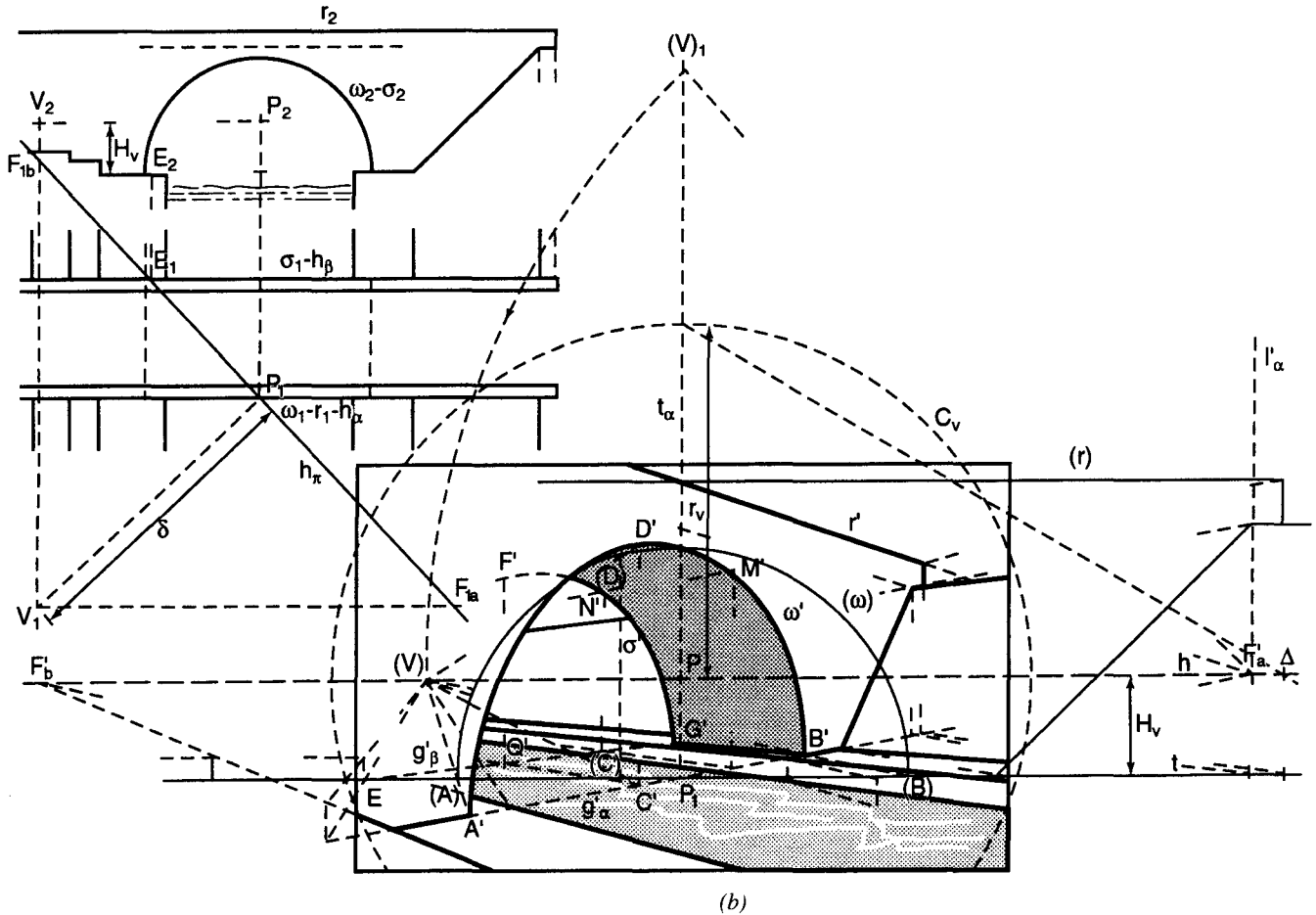


Fig. 34.5.-Método de abatimiento.

a) *Perspectiva de ω* . Es la elipse ω' que se corresponde con (ω) , en una homología de centro (V) (abatimiento de V alrededor de l'_α); eje t_α y rectas homólogas $t \equiv (g_\alpha)$ y g'_α (núms. 31,13 y 32,6). La cuerda $\overline{A'B'}$, homóloga de $\overline{(A)(B)}$, es un diámetro de ω' (por ser las tangentes en A' y B' paralelas a t_α) y el semidiámetro conjugado de éste es el $\overline{C'D'}$, homólogo de la semicuerda $\overline{(C)(D)}$, trazada por el homólogo (C) de C' (punto medio de $A'B'$), lo cual permite dibujar ω' .

b) *Perspectiva σ' de σ* . Se obtiene por puntos, como intersecciones de las normales a α (fugantes en F'_a), trazadas por puntos de ω' , con el plano β de σ , de traza $g'_\beta \equiv EF'_a$, siendo $P_1E = P_1E_1$. Así, la normal trazada por M' corta a β , en el punto N' de σ' y la traza por D' , en F' .

Finalmente, la perspectiva r' de (r), fuga en F'_a y pasa por la intersección de (r) y t_α . El resto de las construcciones se indican claramente en la figura.

34.7. Método de corte. Perspectiva frontal

Consiste en tomar como plano del cuadro una sección normal del cuerpo o una de sus caras principales. La perspectiva, así obtenida, se llama *perspectiva frontal*.

En la bóveda por arista, formada por la intersección de dos túneles semicilíndricos de revolución, de radio R y ejes normales entre sí (Fig. 34.6-a), el cuadro es el vertical de traza h_π y el punto de vista V_1 - V_2 se ha

colocado en el interior de la nave principal, a altura H_v y a distancia δ de π .

La perspectiva se ha dibujado aparte, a escala cuatro veces mayor, trazando h y t , distanciadas la altura de visión H_v y llevando sobre h , a partir de un punto arbitrario P (proyectado ortogonalmente sobre t , en P_1), la longitud $P\Delta/2 = \delta/2$.

La sección de la bóveda por el cuadro es la semicircunferencia φ , de diámetro $AB = 2R$ y centro O , siendo $P_1O_1 = d$ y $O_1O_1 = H$. Los paramentos verticales se cortan según rectas verticales cuyas trazas son vértices de un cuadrado de imagen $A_1B_1C_1D_1$. El vértice C_1 se ha hallado por medio del rayo reducido que pasa por O_1 , y lo mismo se ha hecho con el punto M_1 . La sección de fondo es la semicircunferencia ϵ' , de centro I' y plano α , de traza g'_α que pasa por M_1 .

La intersección de las bóvedas se compone (núm. 18,19-a) de dos elipses ω' y λ' de plano vertical y trazas geometrales B_1D_1 y A_1C_1 . La elipse ω , por ejemplo, de centro Q y semiejes QB y QG , está inscrita en el semirectángulo de tangentes, de imagen $BD'EF'$ y

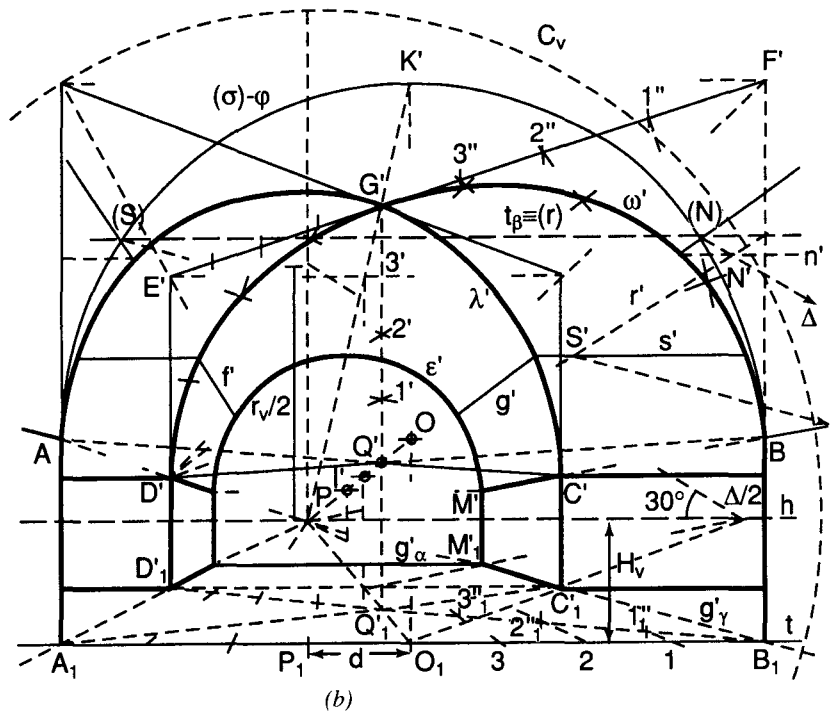
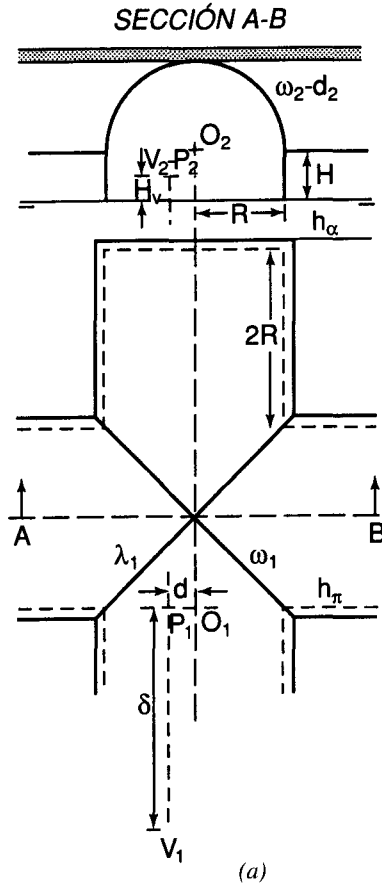


Fig. 34.6.—Método de corte.

puede dibujarse por abatimiento del cuadrado $DQGE$ (Fig. 33.7) o como se ha hecho en este caso, por el método proyectivo (núm. 10,4-2°), dividiendo el semieje QG y los semilados GF y GE en cuatro partes iguales.

Los puntos de división $1', 2'$ y $3'$ de QG se hallan directamente y los $1'', 2''$ y $3''$ de $F'G'$, dividiendo B_1O_1 en cuatro partes iguales y trazando las paralelas $P1, P2$ y $P3$ que cortan a B_1Q_1 en $1'', 2''$ y $3''$, referidos luego a $F'G'$, en $1'', 2''$ y $3''$. (También podía haberse dividido $F'K'$ en partes iguales y trazar por los puntos de división, paralelas a PK'). Los rayos $D1', D2'$ y $D3'$ cortan a los $B1'', B2''$ y $B3''$ en puntos de ω' , lo

cual permite dibujarla y lo mismo se haría con la elipse λ' .

También puede hallarse, por puntos, trazando planos auxiliares horizontales, como el de traza t_β , que corta a la bóveda principal, según las generatrices g' y f' y a la normal a ella, según las n' y s' . Las intersecciones de n' y s' con g' y f' son puntos de ambas elipses.

Las generatrices n' y s' se han hallado, abatiendo la sección circular σ (no dibujada) de la bóveda transversal, de plano vertical de traza g'_β en $(\sigma) \equiv \varphi$. La intersección $r \equiv [\beta, \gamma]$, abatida en (r) , corta a (σ) , en (N) y (S) , desabatidos en los puntos N' y S' de r' que pertenecen a n' y s' .

34.8. Método de planta y vistas separadas

Si se dispone de planta y alzado(o vistas laterales) en hojas separadas, resulta práctico el método directo (núm. 34,2), colocando previamente las vistas, como se ha hecho con la maqueta volumétrica del edificio Σ_1 - Σ_2 de la figura 34.7, representada por su planta Σ_1 y vista lateral derecha Σ_2 .

Primeramente se fija la planta Σ_1 al tablero de modo que la traza h_π del cuadro quede horizontal y sobre la normal a ella, trazada por P , por ejemplo, se elige V_1 ,

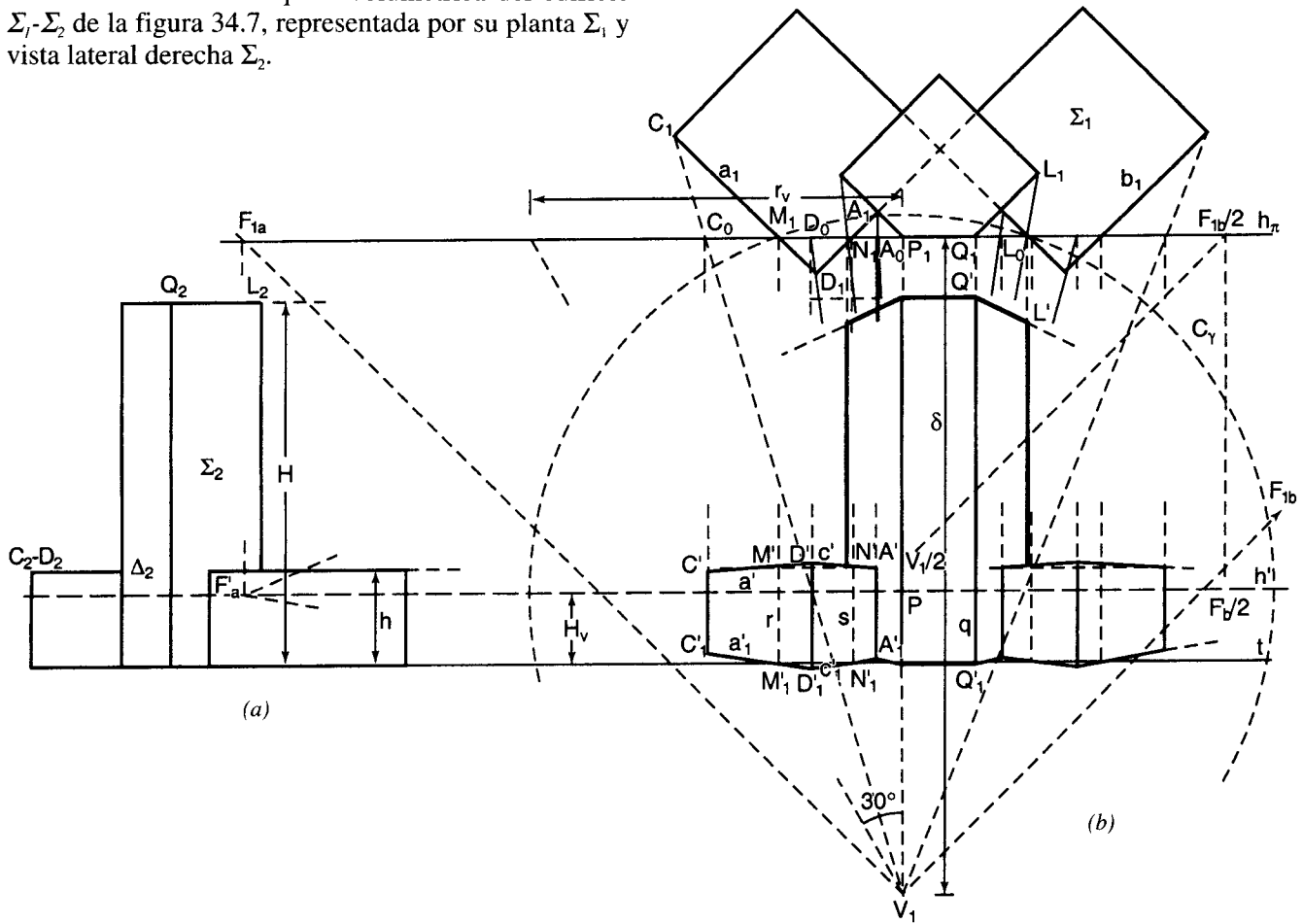


Fig. 34.7.—Método de planta y vistas separadas.

a distancia δ de h_π . Se traza luego la línea de horizontal h' , paralela a h_π , colocada arbitrariamente entre h_π y V_1 ; se traza la línea de tierra, distanciada de h' la altura de visión H_v , elegida y se colocan las vistas laterales a ambos lados de la planta (no es necesaria la vista lateral izquierda).

Las paralelas a las direcciones a_1 y b_2 de la planta, trazadas por V_1 , cortan a h_π en los puntos F_{1a} y F_{1b} , referidos verticalmente a h' , en los puntos de fuga F'_a y F'_b .

Las rectas de altura r, s, q, \dots vienen dadas por las intersecciones M, N, Q, \dots de h_π con la planta y a ellas se refieren las alturas h y H , en M', N', Q', \dots , etc. Las perspectivas de los puntos C, D y A se obtie-

nen, trazando los rayos V_1C, V_1D y V_1A , y refiriendo sus intersecciones C_0, D_0 y A_0 con h_π a la perspectiva, por medio de verticales. Así se obtienen las perspectivas $a'-a'_1$ y $c'-c'_1$ de a y c que cortan a las verticales de referencia de C_0, D_0 y A_0 , en $C'-C', D'-D'$ y $A'-A'$, respectivamente. La perspectiva $Q'L'$ se obtiene de forma análoga.

Las rectas fugantes en F'_b (situado fuera del dibujo) pueden trazarse por medio de un papel auxiliar (que es lo más práctico); por el punto de fuga reducido $F'_b/2$, determinado por la paralela a b'_1 , trazada por el punto medio $V_1/2$ de V_1P_1 (núm. 32,11); por las escalas de fuga o por la triple regla perspectiva (núms. 35,7-3° y 4° de n/E. de G.D.).

34.9. Método de Reile

Es una variación del método directo que utiliza como referencia la línea de horizonte h en vez de la línea de tierra y como plano geometral o plano de abatimiento, el plano de horizonte.

La perspectiva A' de un punto A_1-A_2 , dado en diédrica (Fig. 34.8), se determina por su proyección ortogonal A'_o sobre la línea de horizonte h , y por su distancia $A'A'_o = d_A$ a ella y está basado en la propiedad que sigue:

El rayo visual $a \equiv VA$ (Fig. a) corta al plano del cuadro de traza h_π en A' (no dibujado) y su proyección ortogonal a_o sobre el plano de horizonte corta a h , en A'_o (proyección ortogonal de A' sobre h). Si abatimos

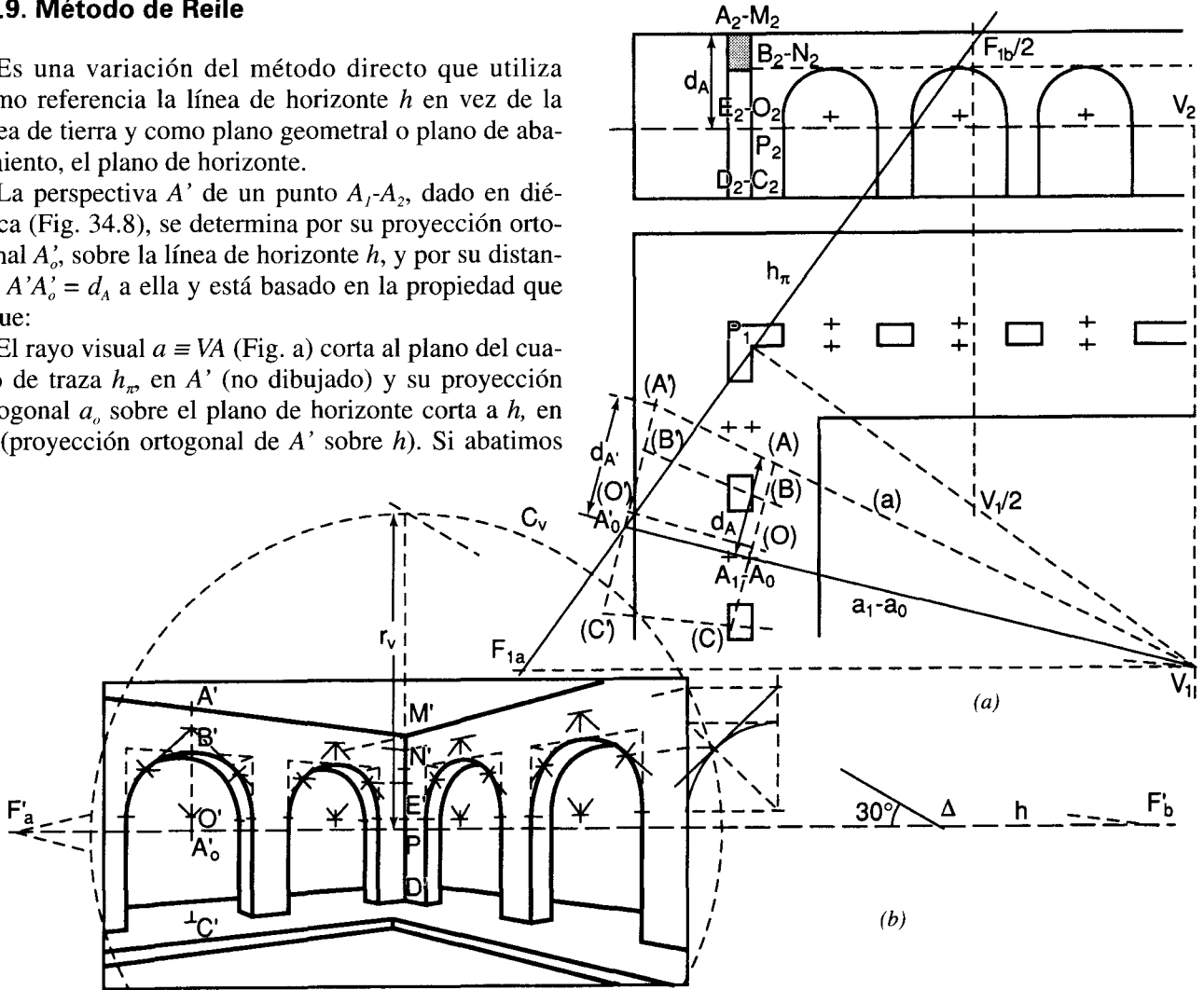


Fig. 34.8. - Método de Reile.

los triángulos rectángulos coplanarios $VA'A'_o$ y VAA_o sobre el plano de horizonte, alrededor de a_o , el cateto $\overline{A'_o(A)}$ es la distancia d_A de A al plano del horizonte y $\overline{A'_o(A')}$, la distancia d'_A de A' a h . De aquí, la construcción:

Trazar la visual $a \equiv VA$, de proyección a_o sobre el plano de horizonte, que corta a h_π en A'_o . Por A_1 y A'_o se trazan luego rectas $A_1(A)$ y $A'_o(A')$, paralelas entre sí (normales a no a a_1) y sobre la primera, se toma la distancia $d_A = \overline{A_1(A)} = \overline{A_2P_2}$ de A al plano de horizonte. El abatimiento $(a) \equiv V_1(A)$ de a , así obtenido, corta a $A'_o(A')$ en el abatimiento (A') de A .

Hecho esto, se traza aparte (Fig. b) una horizontal h y un punto arbitrario P , como única referencia (no es necesaria la línea de tierra). La perspectiva A' se obtiene tomando sobre h , $\overline{PA'_o} = \overline{P_1A'_o}$ y normalmente a h , la longitud $\overline{A'_oA'} = \overline{A'_o(A')} = d_A$, tomada hacia arriba o hacia abajo, según que A esté encima o debajo

del plano de horizonte.

Análogamente, las perspectivas de los puntos B, O y C , situados en la vertical de A , se obtienen tomando $\overline{A'_oB'} = \overline{A'_o(B')}$, $\overline{A'_oO'} = \overline{A'_o(O')}$ y $\overline{A'_oC'} = \overline{A'_o(C')}$ y las de los puntos M, N, E y D situados en el cuadro, tomando directamente $\overline{P_1M'} = \overline{P_2M_2}$, $\overline{P_1N'} = \overline{P_2N_2}$, $\overline{P_1E'} = \overline{P_2E_2}$ y $\overline{P_1D'} = \overline{P_2D_2}$.

Los puntos de fuga de las direcciones principales se obtienen tomando $\overline{P_1F'_a} = \overline{P_1F_{1a}}$ y $\overline{P_1F'_b} = \overline{2P_1F_{1b}/2}$.

Este método, de frecuente uso en arquitectura y en perspectivas de terrenos (núms. 34,10), permite trabajar directamente con la planta de la figura, independientemente de los alzados, y facilita la elección del punto de vista, la posición del cuadro y el tamaño de la perspectiva.

En el cap. 36 de n/E. de G.D. se exponen ejemplos de estos métodos y diversas perspectivas de cuadro vertical.

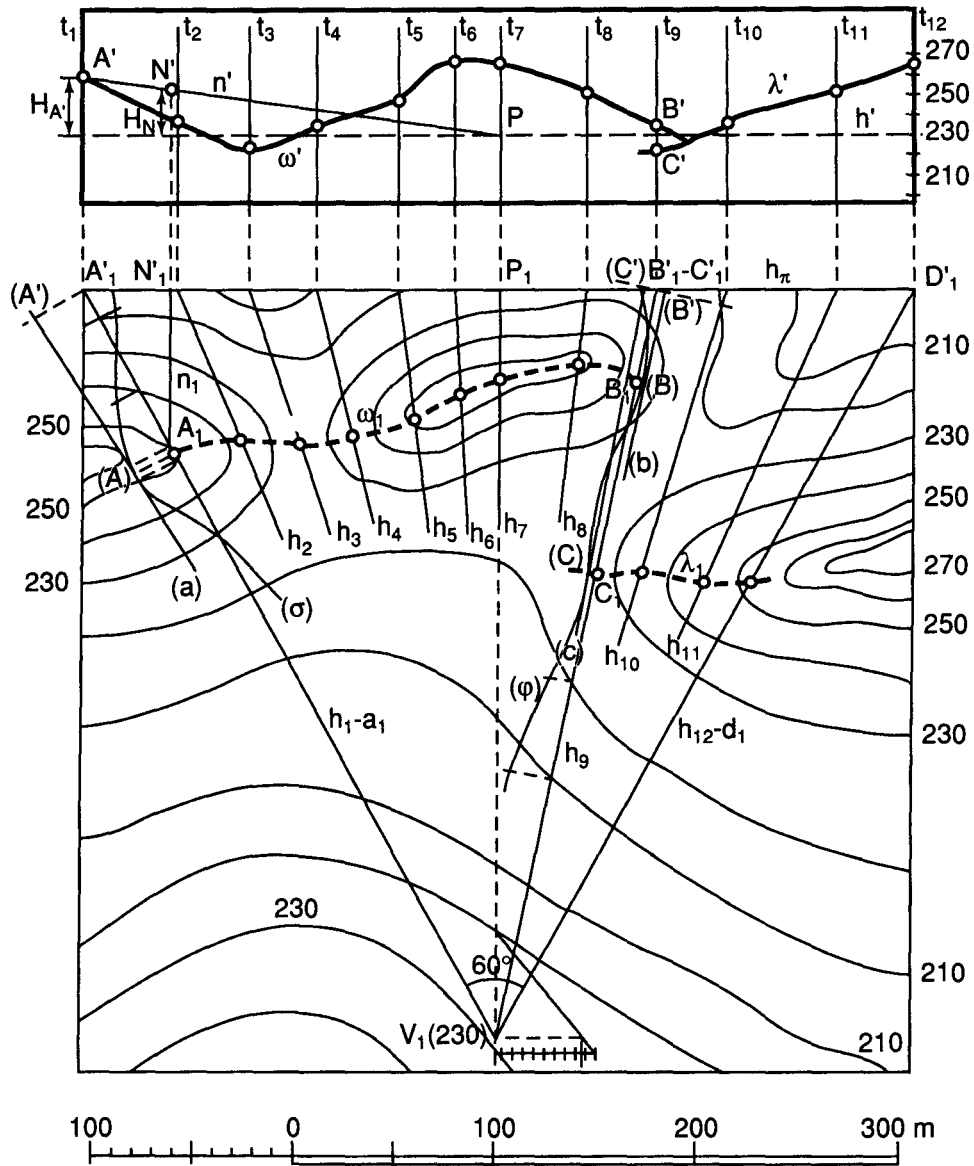


Fig. 34.9.—Perspectiva de terrenos. Contorno aparente.

**34.10. Perspectiva de terrenos.
Contorno aparente**

Es la intersección de la superficie cónica de vértice V , tangente al terreno (Fig. 34.9), con el plano del cuadro π y se obtiene por los métodos que siguen:

a) *Método de perfiles* (Fig. a). Es una aplicación del método de Reile. Una vez elegido el cuadro, se traza h_π el observador se supone colocado en la normal a h_π trazada por P , de pie, a altura 1,60 m. sobre el terreno y a 230 m. de cota, en V_1 . Como plano horizontal de referencia (plano geometral) se toma el plano de horizonte (no es necesaria la línea de tierra) sobre el que se abaten los perfiles (núm. 25,30 de n/E. de G.D.).

Las visuales extremas, forman entre sí un ángulo de 60° y determinan el ancho $A'D'$ de la perspectiva, dibujada en la parte superior, trazando previamente, como única referencia, la horizontal h' y P y a la derecha, las alturas a la escala del dibujo.

El método consiste en trazar por V diversos perfiles, de trazas h_1, h_2, \dots, h_{12} con el horizonte y las visuales contenidas en ellos, tangentes al terreno. La perspectiva se dibuja por puntos, como trazas de las visuales con el cuadro. Así, el perfil extremo de traza h_1 corta al terreno según la curva σ , abatida sobre el horizonte, en (σ) y al cuadro, según la vertical t_1 , trazada por A'_1 . La visual a es la tangente a σ , trazada por V , abatida en (a) , y corta a π , en el punto A' , de cota $H_{A'} = A'_1(A')$, llevada sobre la vertical t_1 , a partir de su intersección con h' , en A' .

El punto A' también puede hallarse, como intersección de t_1 con la perspectiva n' de la normal n a π , trazada por A , siendo N' la traza de n y π , de cota $H_N = \overline{A_1(A)}$ (núm. 36,29 de n/E. de G.D.).

Los restantes puntos se obtienen de forma análoga y determinan las líneas $\omega_1-\omega'$ y $\lambda_1-\lambda'$ de tangencia con el terreno del cono visual (contorno aparente o *panorama* del terreno). El perfil h_0 determina los puntos C' y B' de ω' y λ' , como se ve en la figura.

b) *Método de la cuadrícula.* Consiste en cuadricular la planta del terreno y dibujar la perspectiva de la

cuadrícula sobre la que se dibuja fácilmente la imagen de la planta.

La perspectiva A' de un punto A se obtiene, llevando sobre la vertical de A_1 la cota respectiva, por medio de la escala de alturas. Uniendo ordenadamente las imágenes de puntos de igual cota se obtienen las perspectivas de las curvas de nivel y el contorno aparente, como envolvente de éstas.

Este método resulta muy laborioso y engorroso (por la proximidad de las líneas) y sólo se utiliza en casos muy particulares.

CUADRO INCLINADO

34.11. Generalidades

A pesar de las innegables ventajas del cuadro vertical, es necesario a veces inclinar el cuadro para evitar

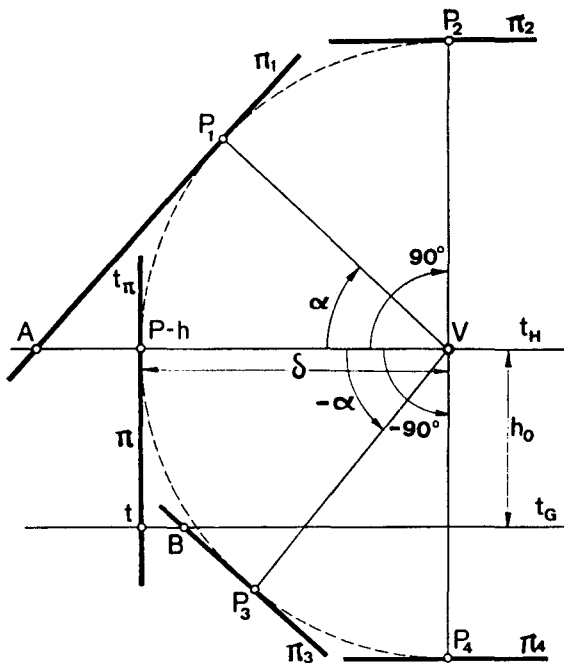


Fig. 34.10.—Diversas posiciones del cuadro.

deformaciones de la imagen y conseguir el máximo aprovechamiento del ángulo visual. Tal sucede, por ejemplo, al dibujar perspectivas de edificios muy altos, desde puntos de vista bajos o al contrario, obje

tos de gran superficie y poca altura (urbanizaciones, conjunto de edificios, etc.) que exigen puntos de vista altos. En estos casos, las perspectivas de cuadro inclinado, así obtenidas, dan imágenes más naturales y de gran efecto, por su realismo y originalidad.

En la figura 34.10, se representan esquemáticamente diversas posiciones del cuadro. El plano del papel contiene a V y es normal al cuadro, de traza t_π y a la línea de tierra y de horizonte, de trazas t y h .

Asimilando la perspectiva a la fotografía tomada desde V , si el objeto está a suficiente distancia de V , colocaremos el cuadro π vertical y el eje óptico VP , horizontal (perspectiva lineal o de cuadro vertical π). Si quiere fotografiarse la parte alta de un rascacielos, elevaríamos el eje óptico un ángulo α (perspectiva de cuadro inclinado π_1) y si se trata de una bóveda situada encima de nosotros, lo elevaremos todavía más hasta colocar el cuadro horizontal (*perspectiva de techos* o de cuadro horizontal π_2).

Análogamente, para fotografiar una urbanización más baja que el plano geométral, inclinaremos el eje óptico por debajo del horizonte (posición π_3) y si se trata de un pozo o un patio interior, situado debajo de V , lo inclinaremos más hasta dejarlo vertical en VP_4 (*perspectiva de suelos* o de cuadro horizontal π_4).

34.12. Propiedades

La perspectiva de cuadro inclinado no goza de las propiedades características de la perspectiva lineal, basadas en la verticalidad del cuadro, pero es una proyección cónica o central y conserva, por tanto, las pro-

piedades de ésta (cap. 31). Sus características más notables son (Fig. 34.11):

a) Las líneas h y t de referencia no aparecen en el cuadro. Si α es pequeño, puede aparecer una de ellas (posiciones π_1 y π_3 de la figura 34.10).

b) El punto principal P no está en h .

c) Las imágenes de rectas verticales no son verticales ni paralelas, sino que fugan en un punto L'_c situado a distancia finita que puede estar fuera de los límites del dibujo.

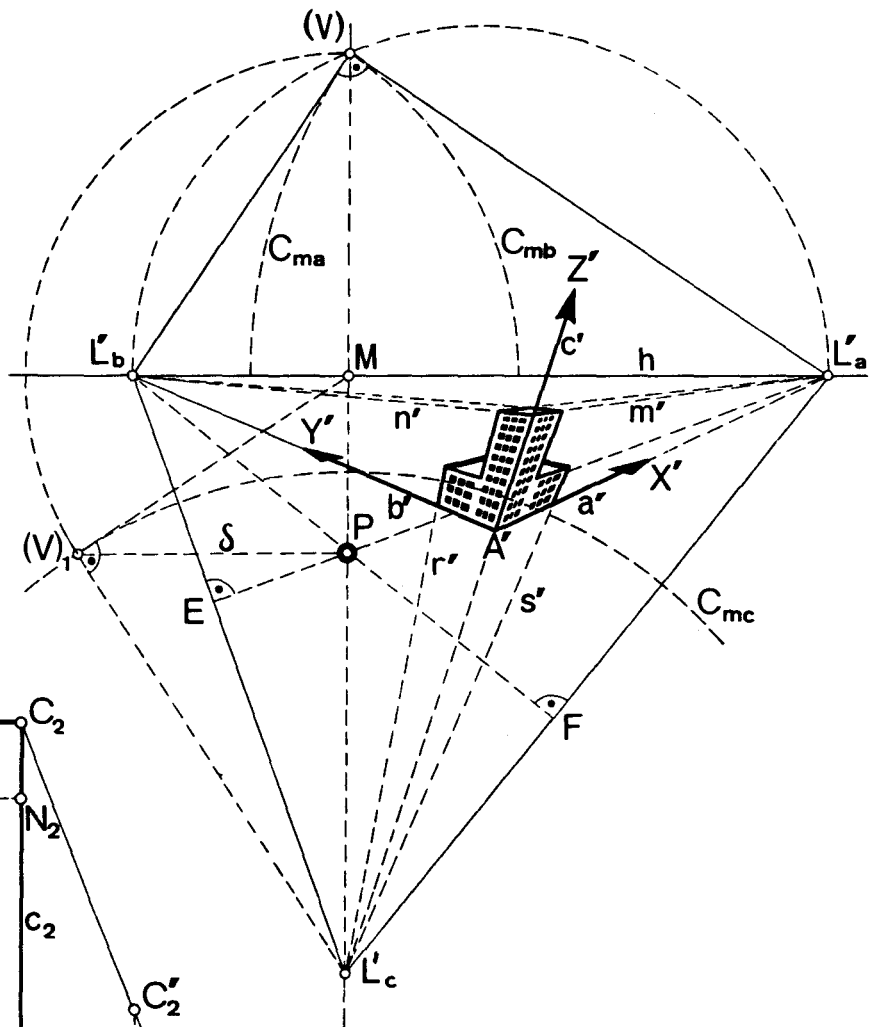


Fig. 34.11.—Cuadro inclinado. Propiedades.

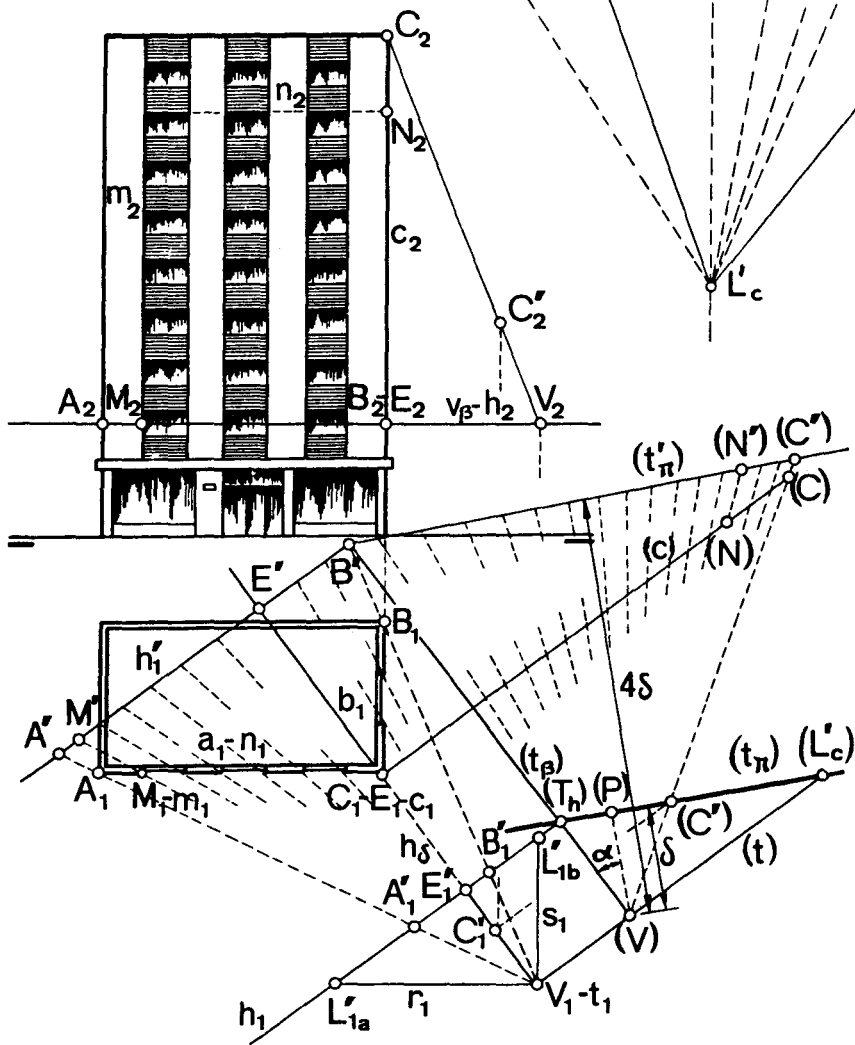


Fig. 34.12a.—Preparación de la perspectiva de cuadro inclinado.

d) Los puntos de fuga de rectas horizontales están en h .

c) En edificios o figuras de tres direcciones principales a , b y c , normales entre sí y coincidentes con las del triedro de referencia XYZ , colocado con el plano XY horizontal, los tres puntos de fuga L'_a , L'_b y L'_c son vértices del llamado *triángulo de fuga*, en el que se verifica:

- El lado $L'_b L'_a$ coincide con h , puesto que Y y X son horizontales.
- El punto de fuga L'_c de las verticales pertenece a la normal PM a h , trazada por P (núm. 31,14-1°). Análogamente, L'_a y L'_b están sobre las normales PE y PF a $L'_b L'_c$ y $L'_a L'_c$ luego P es el ortocentro del triángulo de fuga. Esto permite hallar el punto de fuga de una de estas direcciones, con-

- ciendo los de las otras dos y P .
- El círculo de medida C_{mc} de la vertical c se obtiene, abatiendo V , en $(V)_1$, y trazando el círculo de centro L'_c y radio $\overline{L'_c(V)}_1$. Los C_{ma} y C_{mb} , trazando los círculos de centros L'_a y L'_b y radios $\overline{L'_a(V)}$ y $\overline{L'_b(V)}$, siendo $\overline{M(V)} = \overline{M(V)}_1$. También puede hallarse (V) como intersección de la normal PM a h , con la semicircunferencia de diámetro $\overline{L'_a L'_b}$.

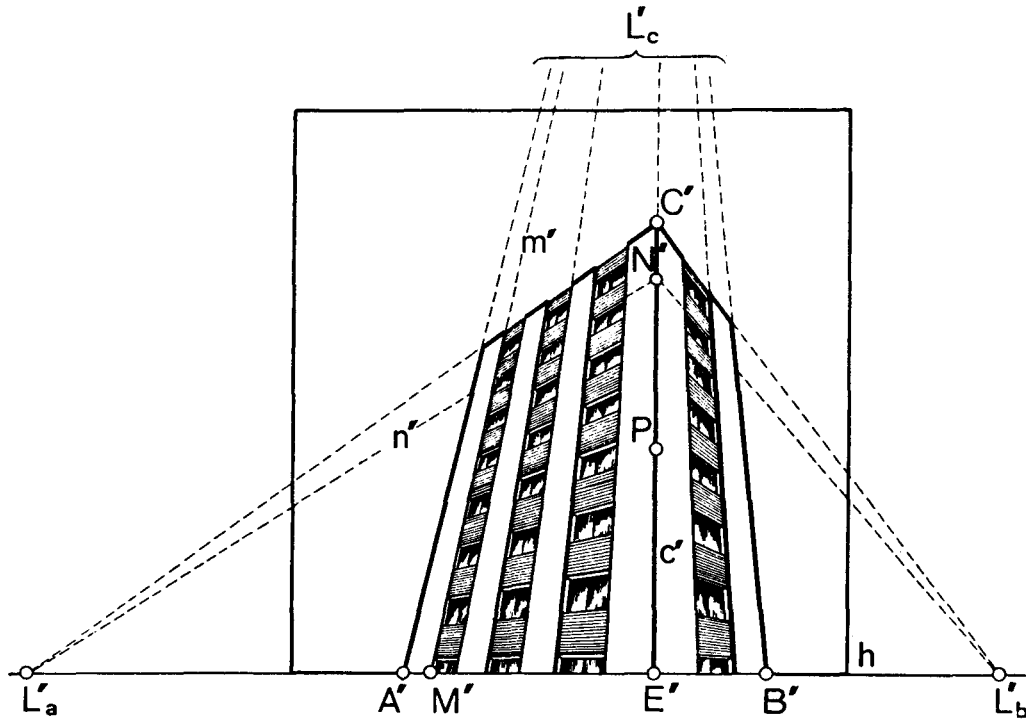


Fig. 34.12b.—Perspectiva de cuadro inclinado.

34.13. Caso general

En la figura 34.12, se ha hallado la perspectiva de la parte alta del edificio de nueve plantas, situada por encima del plano de horizonte v_β de un observador situado en V_1-V_2 (Fig. a). La inclinación del eje óptico $(V)(P)$ es α y la línea de horizonte, h_1-h_2 .

Los puntos de fuga L'_a y L'_b de las direcciones principales a y b son las intersecciones de las paralelas r_1 y s_1 a a_1 y b_1 , con h_1 y el L'_c de las verticales se obtiene, abatiendo el plano δ normal a h que pasa por V y contiene a la vertical t_1-t_2 , siendo (V) , (T_n) y (t_β) los abatimientos de V y de las trazas de h y β con δ . El eje óptico abatido es la recta $(V)(P)$ que forma con t_β el ángulo α y la normal (t_π) a $(V)(P)$, el abatimiento de la traza del cuadro con δ . La vertical t , abatida en (t) , corta a t_π en (L'_c) .

El plano de horizonte v_β corta a las aristas verticales vistas del edificio, en los puntos A_1-A_2 , E_1-E_2 y B_1-B_2 ,

de perspectivas A'_1 , E'_1 y B'_1 . La perspectiva del punto más alto C_1-C_2 , abatido en (C) , es la intersección (C') del rayo $(V)(C)$ con t_π de proyecciones $C'_1-C'_2$.

Como la perspectiva resulta pequeña, se ha ampliado cuatro veces, colocando el cuadro (t'_π) paralelo a (t_π) y distanciado 4δ de V , siendo A' , E' y B' las nuevas perspectivas, distanciadas $E'A' = 4 E'_1A'_1$ y $E'B' = 4 E'_1B'_1$.

La perspectiva se ha dibujado aparte (Fig. b), llevando sobre una horizontal h , a partir de un punto arbitrario E' , las distancias $\overline{E'A'} = 4 \overline{E'_1A'_1}$, $\overline{E'L'_a} = 4 \overline{E'_1L'_{a1}}$, ..., etc. Sobre la normal a h , trazada por E' , se llevan luego las distancias $\overline{E'P} = 4 \overline{(T_h)(P)}$, $\overline{E'C'} = 4 \overline{(T_h)(C')}$ y $\overline{E'L'_c} = 4 \overline{(T_h)(L'_c)}$ que permiten dibujar las aristas del edificio.

Las imágenes m' y n' de las verticales y horizontales m_1-m_2 y n_1-n_2 de las ventanas se han hallado, por medio de sus trazas M_1-M_2 y N_1-N_2 con β y c , respectivamente, de perspectivas M' y N' .

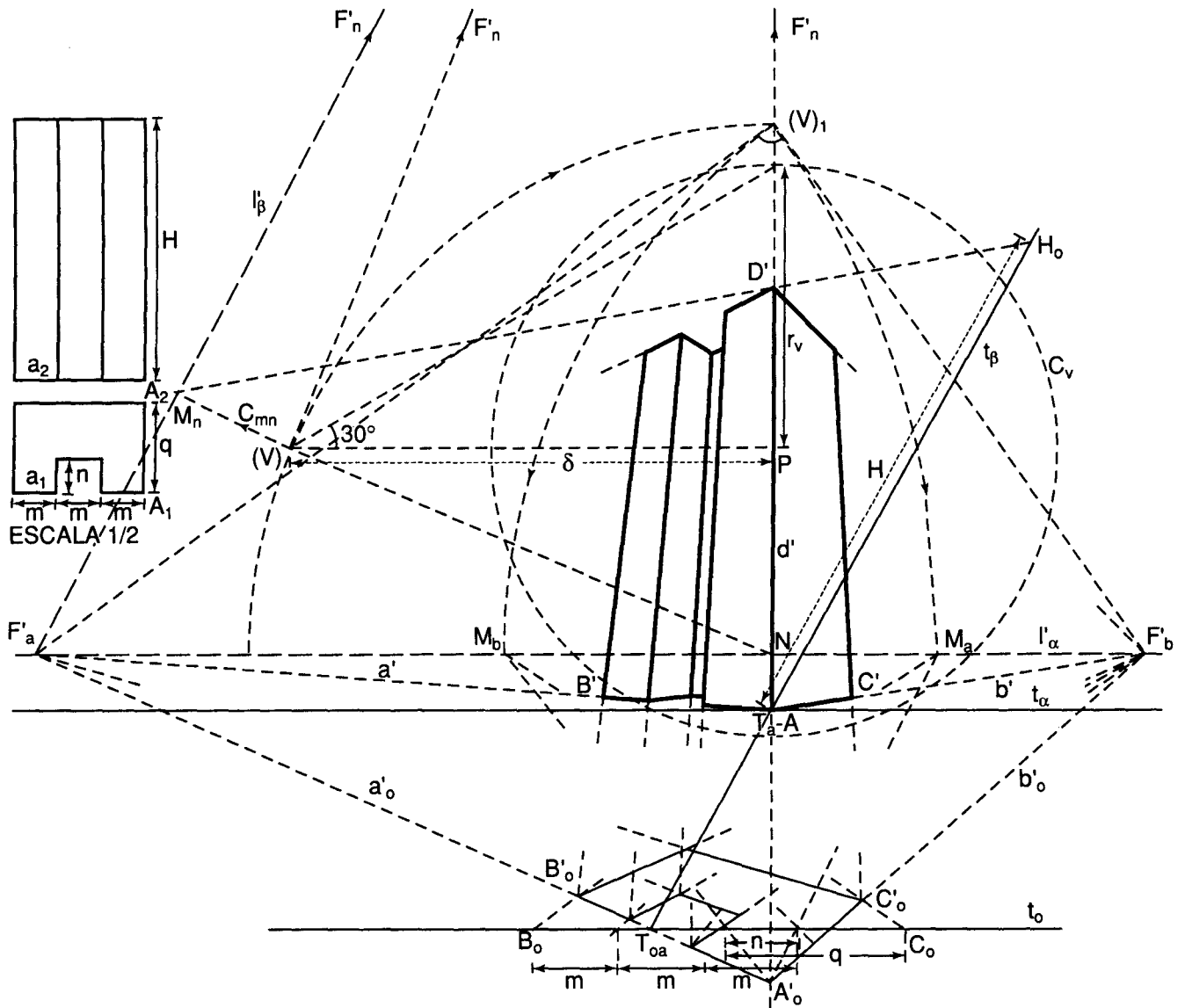


Fig. 34.13.—Geometral auxiliar.

34.14. Geometral auxiliar

Como ya dijimos (núm. 34,5) con alturas de visión pequeñas conviene utilizar una planta auxiliar (geometral auxiliar), de plano paralelo al geometral.

En la figura 34.13, se ha hallado la perspectiva de la maqueta volumétrica de un edificio, representado en diédrica a escala 1/2, del que se conoce el plano t_α - l'_α de la base, el punto principal P , la distancia de visión $\delta = \overline{P(V)}$ y las imágenes A y $a' \equiv T_a F'_a$ de A_1 - A_2 y a_1 - a_2 , respectivamente.

Primeramente, se halla el punto de fuga F'_b de la normal b a la dirección a , situada en α (intersección de l'_α con la normal $(V)_1 F'_b$ a $\overline{F'_a(V)_1}$) y sus puntos de medida M_a y M_b , y luego, el punto de fuga F'_n de las

normales a α (intersección de PN con la normal $(V)F'_n$ a $(V)N$) y su círculo de medida C_{mn} , de centro F'_n y radio $\overline{F'_n(V)}$. Como F'_n se sale del dibujo, puede utilizarse un papel auxiliar o cualquiera de los métodos del n.º. 35,7-3º y 4º de n/E. de G.D.).

Como geometral auxiliar se elige el α_0 , paralelo a α , de traza t_0 , y se traza por a el plano t_β - $l'_\beta \equiv [a,d]$, normal a α , que corta a α_0 , según la recta $a'_0 \equiv T_{oa} F'_a$, siendo a'_0 , b'_0 , A'_0 , B'_0 y C'_0 las plantas auxiliares de a' , b' , A' , B' y C' , respectivamente.

Las dos plantas son congruentes y se corresponden en el espacio, en una afinidad ortogonal de dirección n , normal a α , y sus imágenes se corresponden (núm. 1,13 de n/G. D.) en una homología de eje l'_α (intersección de α y α_0), centro F'_n (punto de fuga de n) y par

de rectas homólogas a' y a'_o . De aquí, la construcción:

Dibujar la planta auxiliar, por medio de M_a y M_b , llevando sobre t_o , a escala doble, las longitudes m , n y q (medidas en diédrica) y trazar por los vértices las verticales correspondientes, fugantes en F'_n .

La altura AD' se obtiene, por medio del punto de medida M_n (intersección de l'_β con C_{mn}), llevando sobre t_β , a partir de A , la altura $H = \overline{AH'_o}$, siendo β el plano de medida. La perspectiva se completa por paralelas a a y b . (Ver cap. 37 de n/E. de G.D.).

34.15. Perspectivas de suelo y techo o de cuadro horizontal

La figura 34.14 representa la sección, en diédrica, de una tubería metálica de ventilación de una galería de mina, constituida por cuatro tubos de diámetro $2R$ y altura H_t . El punto de vista V dista δ del cuadro, de traza v_π , coincidente con la boca de la tubería y P dista d del centro O de ésta.

La perspectiva, dibujada aparte a escala diez veces

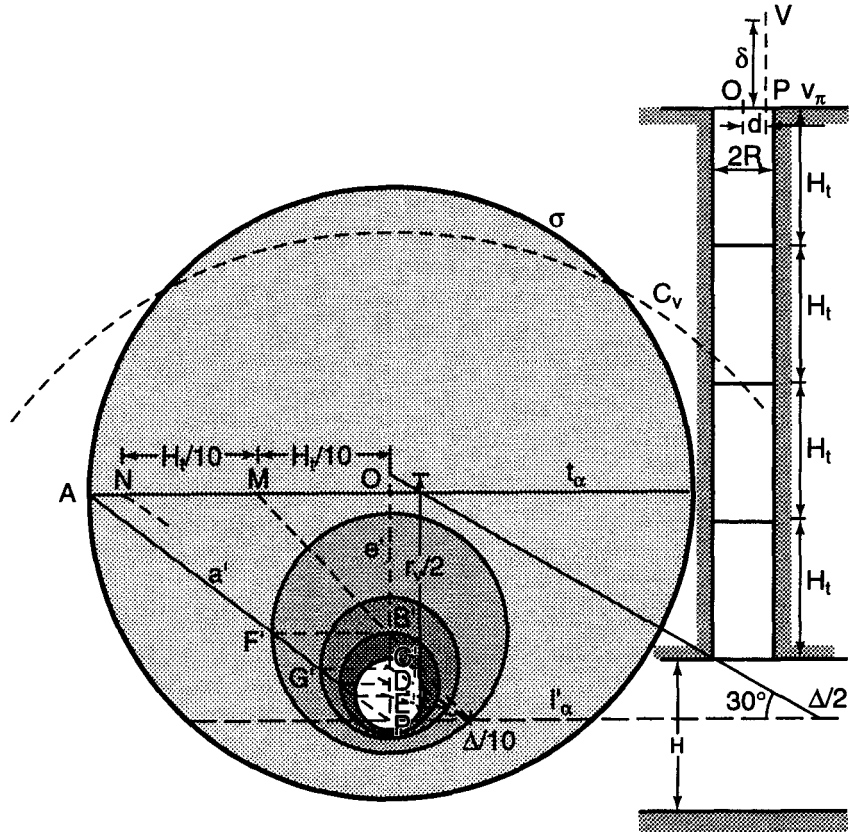


Fig. 34.14.—Perspectiva de suelo o de cuadro horizontal.

mayor, se ha hallado, trazando previamente la boca circular σ , de centro O y radio $\overline{OA} = R$, situada en el cuadro; el punto principal P , distante d de O ; el plano α normal al cuadro, de traza $t_\alpha \equiv OA$; el eje e' de la tubería, de traza O y punto de fuga P y la arista $a' \equiv AP$, trazada por A .

Las juntas de la tubería y la boca inferior son círculos de centros B , C , D y E determinados por medio del

punto de medida reducido $\Delta/10$, tomando sobre t_α , a partir de O , $\overline{OM} = \overline{MN} = \dots = H/10$. Los rayos de medida que unen $\Delta/10$ con M , N , ..., etc., cortan a e' , en B' , C' , D' y E' . Los extremos F' , G' , ... de los radios son las intersecciones de las paralelas a t_α , trazadas por B' , C' , ..., etc., con a' , lo cual permite dibujarlas. (Ver cap. 38 de n/E. de G.D.).

35. RESTITUCIONES PERSPECTIVAS. REFLEJOS Y SOMBRAS

35.1. Generalidades

Orientación interior de una perspectiva es la situación del punto de vista, respecto al cuadro, definida por el punto principal y la distancia de visión.

Orientación exterior es la posición del cuadro y punto de vista, respecto al objeto o figura representada.

Si se conoce la orientación interior y exterior, podemos hallar la perspectiva de una figura, como se ha explicado. Inversamente, dada una o varias perspectivas de una figura, se puede reconstruir ésta por medio de construcciones gráficas, siendo éste el objeto de las restituciones perspectivas.

35.2. Restitución de cuadro vertical

Dada la perspectiva de un edificio, de altura y longitud conocida, podemos determinar su orientación y el abatimiento de la planta, como sigue (Fig. 35.1):

Del paralelismo de las imágenes de las aristas verticales se deduce que el cuadro es vertical y paralelo a las aristas.

La intersección de las imágenes $C'A'$ y $E'D'$ de dos rectas horizontales paralelas es el punto de fuga F'_x , contenido en la línea de horizonte h , normal a c' . Como comprobación, el punto de fuga F'_y de las horizontales normales a AC , como la BC , ha de estar en h .

Los abatimientos $(V)F'_x$ y $(V)F'_y$ de los rayos de fuga de las horizontales a y b forman un ángulo recto luego (V) ha de estar en la semicircunferencia de diámetro $F'_x F'_y$.

La diagonal d' de la cara $[C,A,D]$, de plano β , corta a l'_β en su punto de fuga F'_d luego si abatimos el plano de fuga de β sobre el cuadro, (V) estará en h y el rayo de fuga $(d_o) \equiv \overline{F'_d(V)}$, de d , abatido, formará con l'_β un ángulo α conocido, por conocerse las dimensiones del

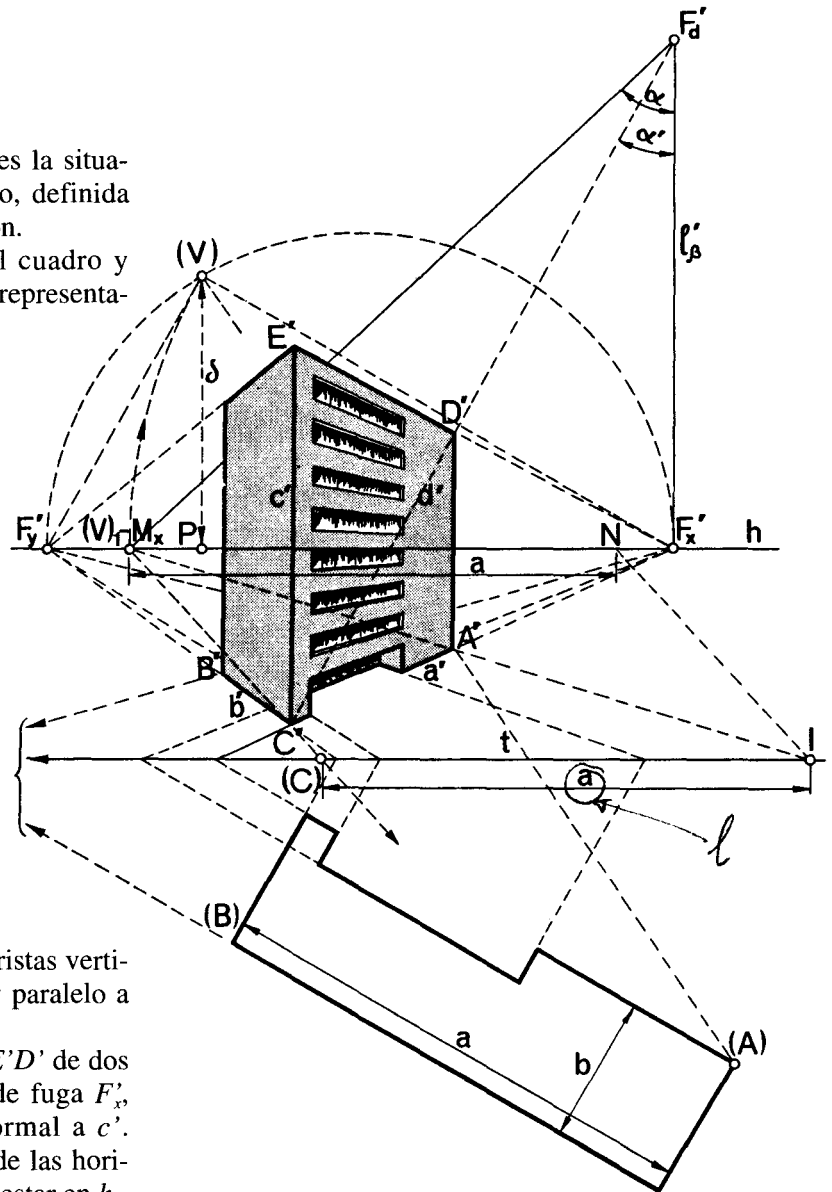


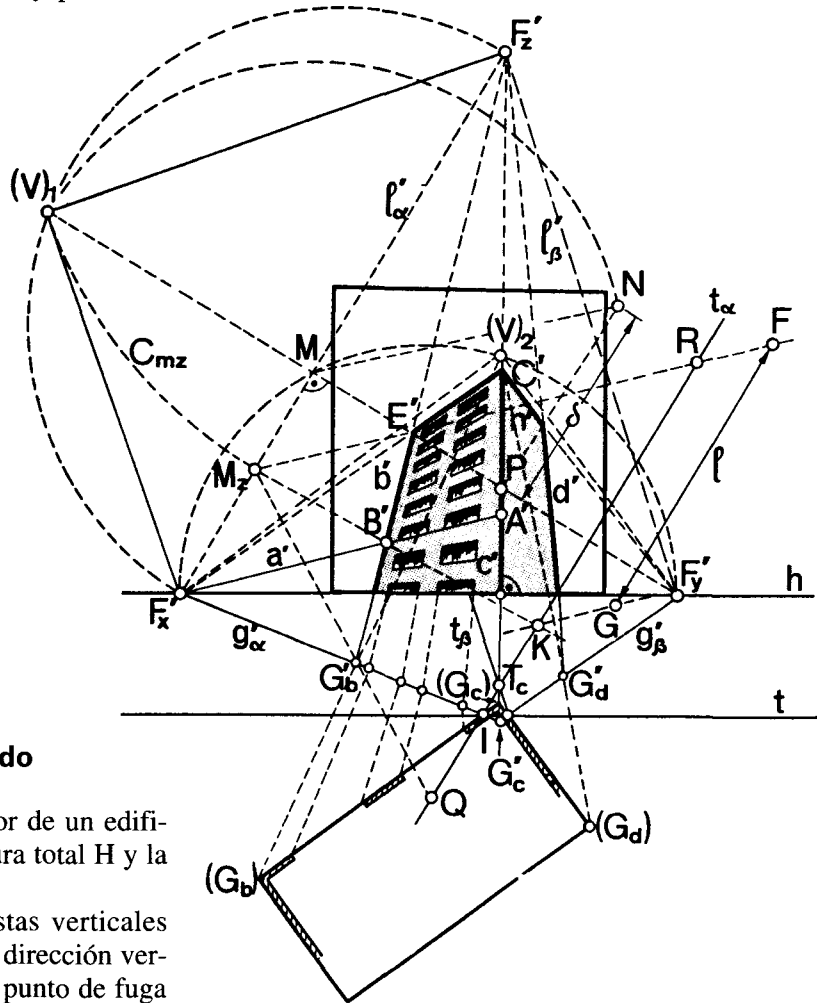
Fig. 35.1.—Restitución de cuadro vertical.

rectángulo $CADE$. Basta pues trazar por F'_d la recta $F'_d M_x$ que forma con l'_β el ángulo α y corta a h , en (V) , $\equiv M_x$ (punto de medida de la dirección a). La intersección del arco de centro F'_x y radio $\overline{F'_x M_x}$ con la semicircunferencia de diámetro $\overline{F'_y F'_x}$ es el abatimiento (V) de V , proyectado ortogonalmente sobre h , en P , siendo $P(V) = \delta$.

La línea de tierra se halla, teniendo en cuenta que los rayos de medida $M_x C'$ y $M_x A'$ de la longitud conocida $l = \overline{AC}$ del edificio, determinan sobre t un segmento $\overline{(C)(I)} = l$. De aquí, la construcción:

Trazar sobre h el segmento $\overline{M_x N} = l$ y por N , la

paralela al rayo $M_x C'$ que corta al rayo $M_x A'$, en el punto I , por el que pasa la paralela t a h . A partir de estos datos, se halla el abatimiento de la planta de vértices (A) , (B) y (C) .



35.3. Restitución de cuadro inclinado

Dada la fotografía de la parte superior de un edificio (Fig. 35.2), del que se conoce la altura total H y la $EB = l$, se procede como sigue:

Las imágenes b' , c' y d' de las aristas verticales concurren en un F'_z (punto de fuga de la dirección vertical Z) luego el cuadro es inclinado. El punto de fuga de la dirección horizontal X , paralela a CE , es la intersección F'_x de $E'C'$ y a' y el F'_y de la horizontal normal a la anterior es la intersección de n' con el borde inferior del recuadro, supuesto éste horizontal.

El ortocentro del triángulo de fuga $F'_x F'_y F'_z$ es el punto principal P y el abatimiento $(V)_1$ de V , la intersección de la normal $F'_x P$ a $F'_x F'_z$ con la semicircunferencia de diámetro $\overline{F'_x F'_z}$. Con centro en M , se traza luego el arco de radio $\overline{M(V)_1}$ que corta a la paralela PN a $F'_x F'_z$ en N , siendo $\overline{PN} = \delta$ (construcción inversa del abatimiento). El círculo de medida C_{mz} es el de centro F'_z y radio $F'_z(V)_1$, y corta a $F'_x F'_z$ en el punto de medida M_z de las verticales del edificio.

La línea de tierra se halla, como en el ejercicio anterior, tomando como plano de medida de b' , el de fachada de las ventanas $\alpha \equiv [b,c]$, de recta límite $l'_\alpha \equiv F'_x F'_z$. Como se conoce la longitud $l = \overline{BE}$, los rayos de medida $M_z E'$ y $M_z B'$ han de cortar a t_α según un seg-

Fig. 35.2.—Restitución de cuadro inclinado.

mento $RK = l$ paralelo a l'_α . De aquí, la construcción:

Por un punto F del rayo $M_z E'$ trazar el segmento $FG = l$ paralelo a l'_α y por su extremo G , la paralela \overline{GR} a $M_z E'$ que corta al otro rayo de medida, en K . La paralela a l'_α trazada por K , es t_α , siendo $\overline{KR} = l$. Si ahora se lleva sobre t_α , el segmento $\overline{RQ} = H$, el rayo de medida $M_z Q$ corta a b' en su traza geomtral G'_b . La traza geomtral $g'_\alpha \equiv F'_x G'_b$ de α corta a t_α en el punto I , por el que pasa t , paralela a h .

El plano de la otra fachada vista, normal a la anterior, es el de recta límite $l'_\beta \equiv F'_y F'_z$ y traza t_β que pasa por la traza T_c de la arista c (intersección de c' y t_α). La traza geomtral g'_β corta a c' y d' en las trazas geomtrales G'_c y G'_d que completan la perspectiva $G'_b G'_c G'_d$ de la planta cuyas dimensiones se hallan, abatiendo ésta, siendo $(V)_z$ el abatimiento de V .

35.4. Resumen

Lo expuesto puede resumirse en las reglas que siguen:

- a) Si las imágenes de rectas verticales son concurrentes, la perspectiva es de cuadro inclinado y si son paralelas, de cuadro vertical. En este último caso, h y t son normales a las imágenes de dichas verticales.
- b) Si las imágenes de dos rectas paralelas son paralelas, las rectas son frontales (paralelas al cuadro).
- c) Si la imagen de un rectángulo es otro rectángulo, el plano de aquel es paralelo al cuadro (perspectiva frontal) y lo mismo sucede si se trata de un paralelogramo.
- d) Si los puntos de fuga de las direcciones de las aristas de un triedro trirectángulo son puntos finitos,

determinan el triángulo de fuga cuyo ortocentro es el punto principal.

La perspectiva de una figura no basta por sí sola para reconstruir ésta. En edificaciones aisladas, suelen conocerse datos como la horizontalidad o verticalidad de sus direcciones principales, algunas dimensiones, etc., lo cual permiten su reconstrucción, como hemos visto. En los demás casos, la restitución se consigue a partir de dos perspectivas (fotografías), de orientación interior conocida.

Al considerar la fotografía como una perspectiva, el campo de las restituciones se amplía enormemente, creándose una nueva ciencia, llamada fotogrametría, de gran importancia y utilidad por la rapidez y precisión de sus resultados.

REFLEJOS

35.5. Generalidades

Por física se sabe que al incidir un rayo luminoso a sobre una superficie reflectante φ (Fig. 35.3), se desvía en dirección a_r (rayo reflejado), según las siguientes leyes:

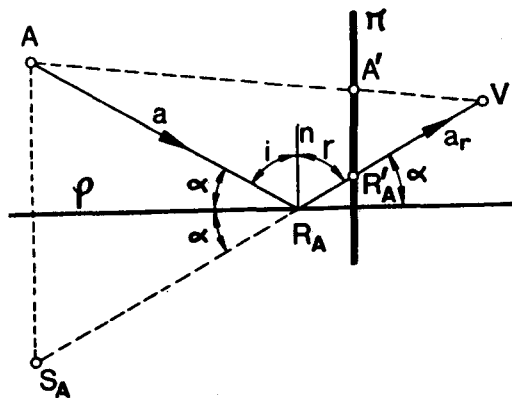


Fig. 35.3.—Imagen reflejada de un punto.

1ª. El plano $[a, a_r]$ (plano de reflexión) es normal a φ y contiene a la normal n a ella.

2ª. Los ángulos i y r (de incidencia y reflexión), formados por a y a_r con n , son iguales entre sí.

Según esto, de los infinitos rayos que parten de un punto A , al ser éste iluminado, sólo dos pasan por el punto de vista V : el directo AV (visual de A) y el a_r ,

reflejado en a_r . El observador, colocado en V (punto de vista), verá dos imágenes de A : la directa A' (perspectiva de A) y la reflejada R'_A (perspectiva del punto de reflexión R_A del rayo) coincidente con la imagen del punto S_A , simétrico de A respecto a φ , como se ve en la figura. Esto permite enunciar:

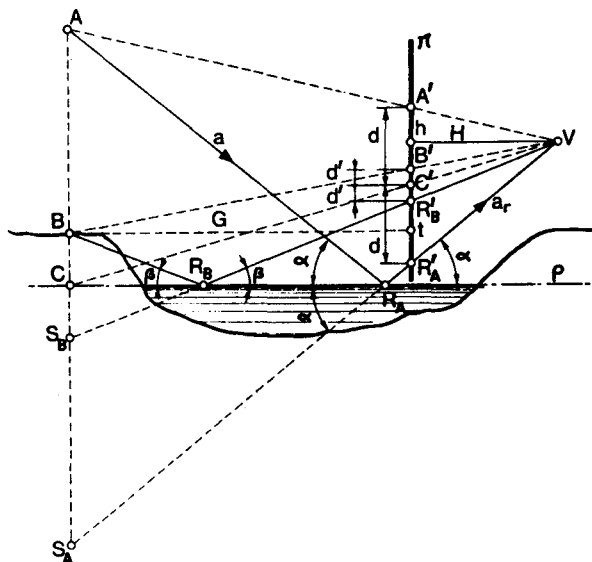


Fig. 35.4.—Simetría de imágenes directa y reflejada.

La imagen reflejada por un punto sobre una superficie reflectante φ es la perspectiva del simétrico del punto, respecto a φ . Los reflejos se reducen, por tanto, a simetrías respecto a la superficie reflectante.

35.6. Simetría de imágenes de cuadro vertical

Sea φ (Fig. 35.4) la superficie del agua (superficie reflectante); G , el plano geometral; B y C , las proyecciones ortogonales de A sobre G y φ y S_A y S_B , los simétricos de A y B , respecto a φ y por tanto, respecto a C .

Si el cuadro es vertical, las perspectivas A' y B' de A y B son simétricas de las reflejadas R'_A y R'_B , respecto a la imagen C' de C , lo cual permite enunciar:

Si el cuadro es vertical, las imágenes directa y reflejada de un punto son simétricas, respecto a la imagen de la proyección ortogonal del punto sobre la superficie reflectante horizontal.

Si A se aleja en dirección VA (Fig. 35.5), hasta la posición B , su imagen $B' \equiv A'$ no varía, pero la B'_i de B_i se acerca a la línea de horizonte, lo mismo que la simétrica R'_B de B' , respecto a B'_i .

Cuando A se eleje al infinito, en I_∞ , en su proyección $I_{i\infty}$ será impropia; su imagen I'_i incidirá con h y la imagen reflejada R'_i seguirá siendo simétrica respecto a $I'_i \equiv h$. De aquí, la regla:

En perspectiva de cuadro vertical, la imagen reflejada de un punto impropio I sobre una superficie horizontal es la simétrica de su imagen directa I' , respecto a la línea de horizonte.

Esto permite hallar fácilmente reflejos de astros (sol, luna) o de puntos suficientemente alejados del observador (contornos y montañas lejanas) considerándolos, sin gran error, como puntos impropios (Fig. 35.7).

35.7. Partes vistas de figuras reflejadas

Las perspectivas directa y reflejada de una figura son imágenes de figuras simétricas, sin que esto implique que sus partes vistas sean las mismas, como puede comprobarse en el alzado de un inmueble de pisos (Fig. 35.6) y su simétrico, respecto a la superficie reflectante horizontal φ , siendo π y V , el cuadro y punto de vista, situado a igual cota que C .

En la imagen directa, se ven los suelos de las terrazas y pisos inferiores a C , como el D , y los techos de las superiores, como el A y en cambio, en la reflejada se ven los techos de todas las terrazas y ningún suelo.

El plano geometral (punto E) es visto en la perspectiva directa y oculto en la reflejada, sucediendo lo mismo con el faldón A del tejado.

Otras veces, partes vistas en ambas no lo son en la misma extensión. Por ejemplo: el techo AB de la terraza superior es todo visto en la imagen directa y sólo parcialmente, en la reflejada, por impedirlo la barandi

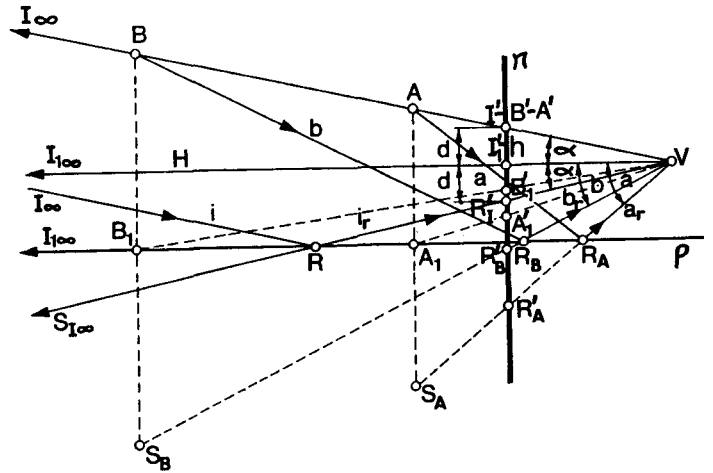


Fig. 35.5.—Reflejo de un punto impropio.

lla acristalada. Así mismo, cuerpos situados delante de la figura (árboles, casas, etc.) pueden ocultar parcial o totalmente partes vistas distintas en ambas perspectivas.

Finalmente, el alejamiento o proximidad de la superficie reflectante y su mayor o menor extensión

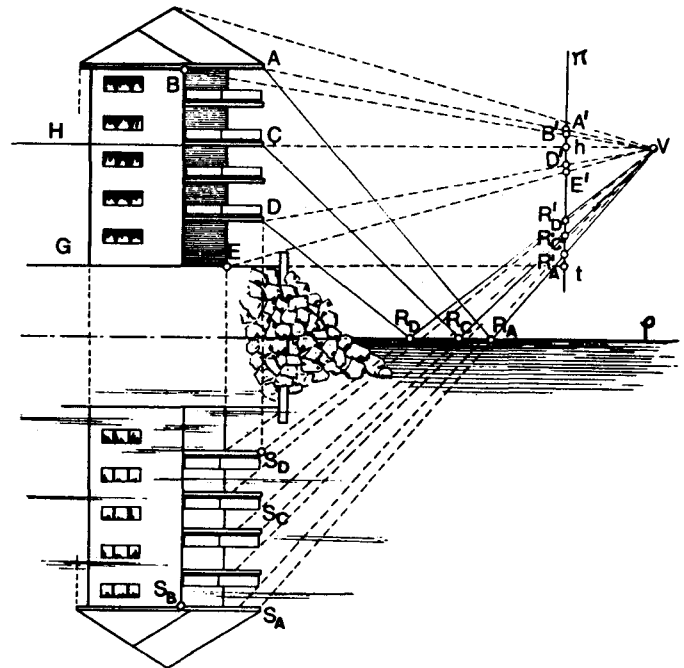


Fig. 35.6.—Partes vistas de figuras reflejadas.

son las que limitan, de modo decisivo, la aparición y amplitud de la imagen reflejada.

Lo más práctico es elegir puntos característicos del contorno de la figura; hallar sus imágenes directa y reflejada y una vez comprobada la parte de figura que se refleja, completarla con los puntos necesarios.

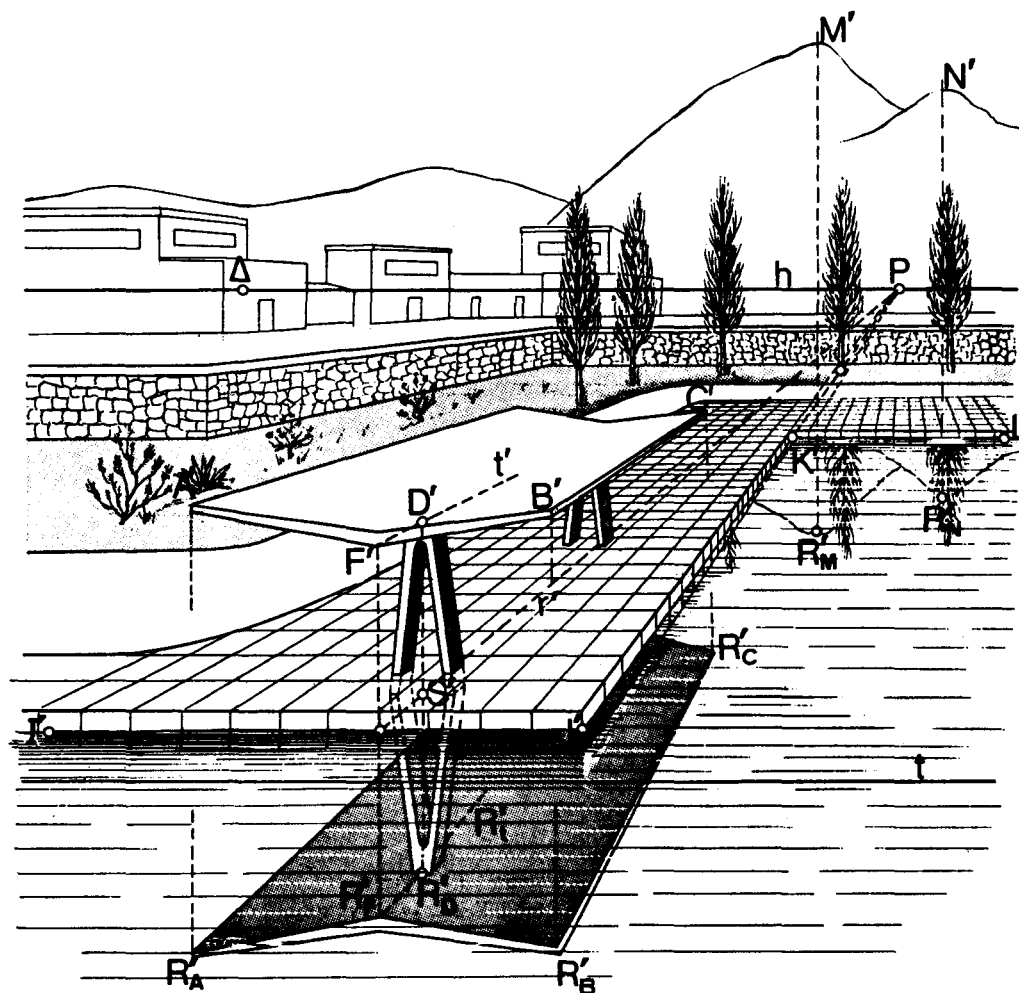


Fig. 35.7. — Perspectiva de reflejos.

35.8. Dibujo de reflejos

En la figura 35.7, el plano del agua es el definido por la quebrada $I'J'K'L'$ de intersección con el borde vertical del muelle. La imagen reflejada de éste y de las juntas verticales son las simétricas, verticalmente, respecto a los lados de la quebrada.

El plano vertical de simetría de la marquesina corta al reflectante, según la recta r' y el eje de simetría $D'R_D$ de la cara anterior del soporte, en S' . Tomando

$\overline{S'R'_D} = S'D'$ se obtiene el reflejo R'_D de D' y el R'_i de t' .

La imagen directa $A'B'C'$ de la parte superior de la marquesina es vista, mientras que, en la reflejada, es vista la inferior $R'_A R'_i R'_B$.

Los reflejos de los árboles son los simétricos de las imágenes directas, respecto a la superficie del agua, en cambio, los reflejos R'_M y R'_N de los montes son los simétricos de M' y N' , respecto a h , por considerarlos muy alejados del observador.

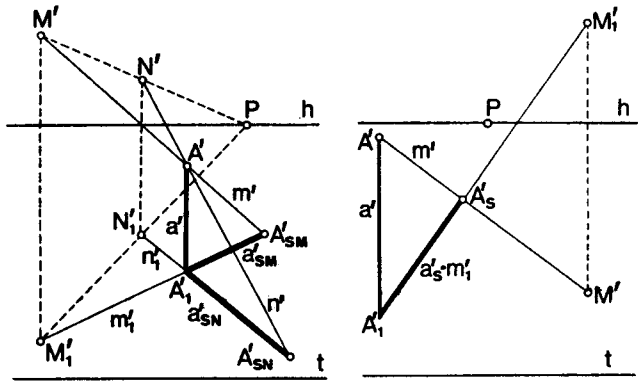
SOMBRAS

35.9. Iluminación

En perspectiva cónica, la orientación e inclinación de los rayos de luz no suelen ser caprichosa o rutina-

ria, como tampoco lo es la elección de la hora más conveniente para fotografiar un objeto fijo o la colocación de éste, si es movable.

En iluminación cónica o puntual (Fig. 35.8), el foco



(a) Foco delante del observador. (b) Foco detrás del observador.
Fig. 35.8. — Iluminación cónica o puntual.

$M'-M'_i$ puede estar delante o detrás del observador. En el primer caso (Fig. a), la sombra arrojada por el punto $A'-A'_i$ es la traza geometral A'_s del rayo luminoso $m'-m'_i$ que pasa por él. Si $A'-A'_i$ fuera la imagen del extremo de un poste vertical A_1A , su sombra es $a'_s \equiv A'_iA'_s$. Si el foco se coloca delante del poste, en $N'-N'_i$, la sombra a'_{sN} está dirigida hacia el observador.

El foco M , situado detrás del observador, tiene sus proyecciones invertidas (Fig. b). La intersección del rayo luminoso $m' \equiv M'A'$ con su proyección $m'_i \equiv$

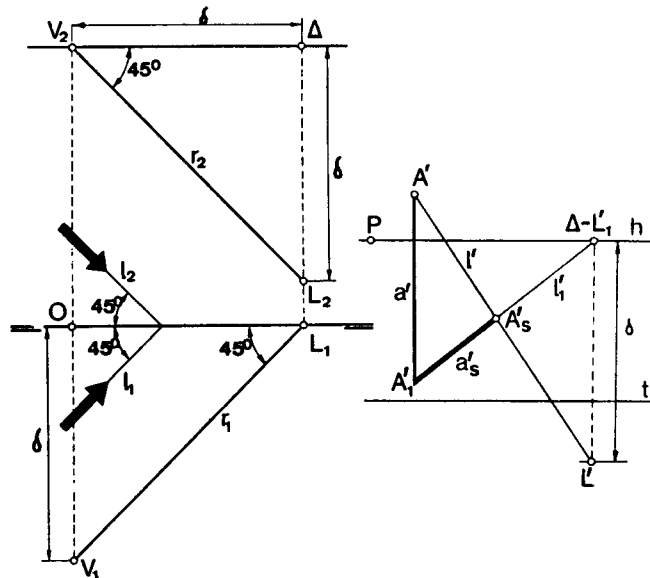
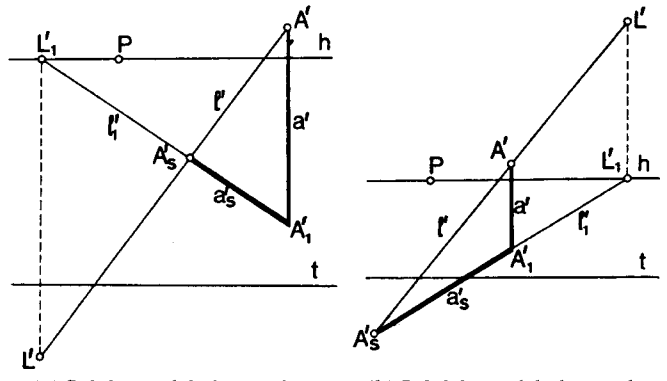


Fig. 35.10. — Iluminación cilíndrica a 45°.

En iluminación cilíndrica a 45° (Fig. 35.10), el rayo de luz r_1-r_2 (paralelo a la dirección l_1-l_2 de la luz) que pasa por V_1-V_2 corta al plano vertical, coincidente con el cuadro, en L_1-L_2 y en los triángulos rectángulos isósceles V_1OL_1 y $V_2\Delta L_2$ se verifica $OL_1 = OV_1 = \delta$ y $OL_1 = V_2\Delta = \Delta L_2 = \delta$. En la figura de la derecha se ha dibujado $L'-L'_i$ y la sombra a'_s arrojada por la vertical a' .



(a) Sol detrás del observador. (b) Sol delante del observador.
Fig. 35.9. — Iluminación cilíndrica (solar).

$M'_iA'_i$ es la sombra A'_s arrojada por A sobre el geometral. En iluminación cilíndrica (solar), el sol viene dado por el punto de fuga $L'-L'_i$ de la dirección de los rayos solares (Fig. 35.9). La sombra arrojada por $A'-A'_i$ sobre el geometral (Fig. a), es la traza geometral A'_s del rayo de sombra $l'-l'_i$, fugante en $L'-L'_i$ y $a'_s \equiv A'_iA'_s$, la del poste a' .

Con sol delante del observador, L' está encima de h (Fig. b) y la sombra $a'_s \equiv A'_iA'_s$ está dirigida hacia el observador.

En iluminación frontal (paralela al cuadro) L'_i coincide con el punto impropio de h .

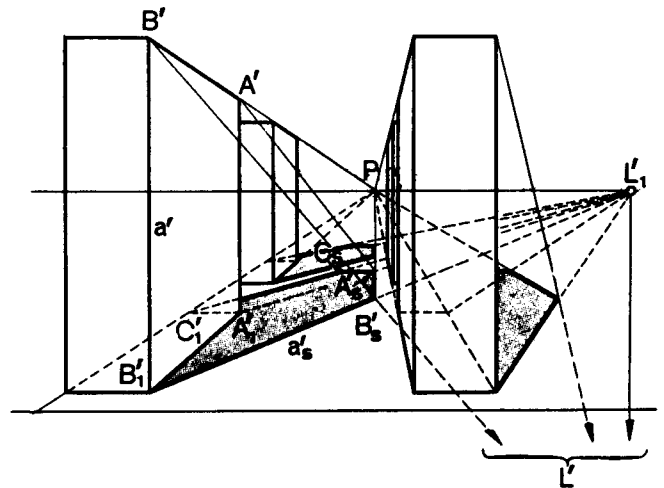


Fig. 35.11. — Sombras de bloques de edificios.

35.10. Sombra arrojada sobre el horizontal

En la figura 35.11, se han dibujado las sombras arrojadas por cuatro bloques paralelepípedicos, con luz de dirección $L'-L'_i$. La sombra de la arista vertical a' es la recta que une B'_i con la intersección B'_s de $B'_iL'_i$ y B'_iL' (sombra de B'). El resto de las sombras se halla fácilmente, teniendo en cuenta que la sombra de una horizontal BA fuga en el punto de fuga de ésta. Si es paralela a t , su sombra también lo es. La sombra de las rectas verticales fugan en L'_i .

En la figura 35.12, se ha dibujado la sombra arrojada en el interior de un pórtico de entrada, con sol de frente. Las sombras r'_s, t'_s, a'_s, \dots , etc. de las aristas r', t', a', \dots de pilares se obtienen directamente, uniendo sus pies con L'_s . La del borde inferior m' de la viga, por medio de la sombra A'_s de A' (intersección de $L'_s A'$ con a'_s), siendo $m'_s \equiv A'_s F'_m$.

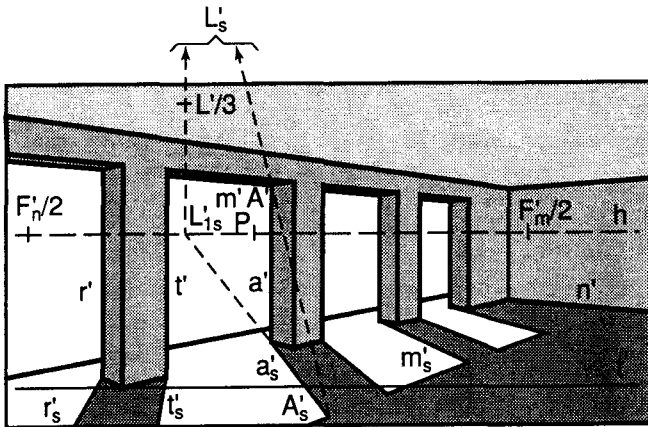


Fig. 35.12.—Sombra con sol de frente.

35.11. Sombras sobre planos verticales

En la figura 35.13 se han dibujado las sombras arrojadas sobre la escalera por la arista horizontal a' y la vertical c' , con luz frontal de dirección L' (núm. 35.9). La sombra de c' (arrojada sobre el suelo y el primer escalon) es la quebrada c'_s que corta al rayo de sombra de A' , en A'_s (sombra de A').

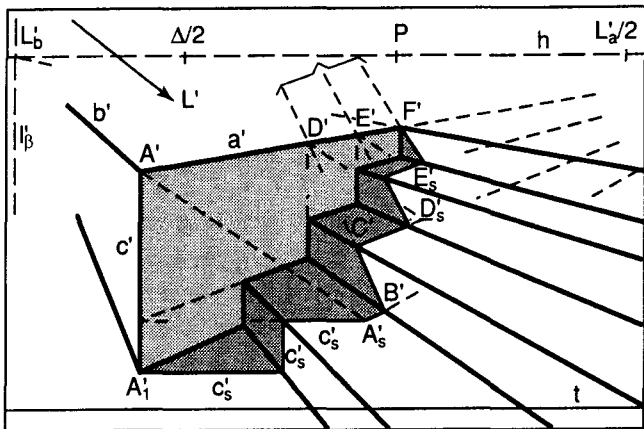


Fig. 35.13.—Sombras sobre una escalera con luz frontal.

Las sombras $A'_s B', C'_s D', \dots$, etc., arrojadas por a' sobre los planos horizontales (huellas) de los escalones, fugan en L'_a y las $B'_s C', \dots$, arrojadas sobre los planos verticales (tabicas), pasan por las trazas D', E' y F' de a' con éstos y fugan en el mismo punto de l'_β , lo cual sirve para hallarlas.

En la figura 35.14, se han dibujado las sombras producidas en la entrada de un edificio, con luz de dirección $L'-L'_j$. En este caso, se ha tomado como geometral auxiliar el plano horizontal $\alpha \equiv [a, b]$ que corta a los planos verticales de la planta baja, según la quebrada $KMNRS$.

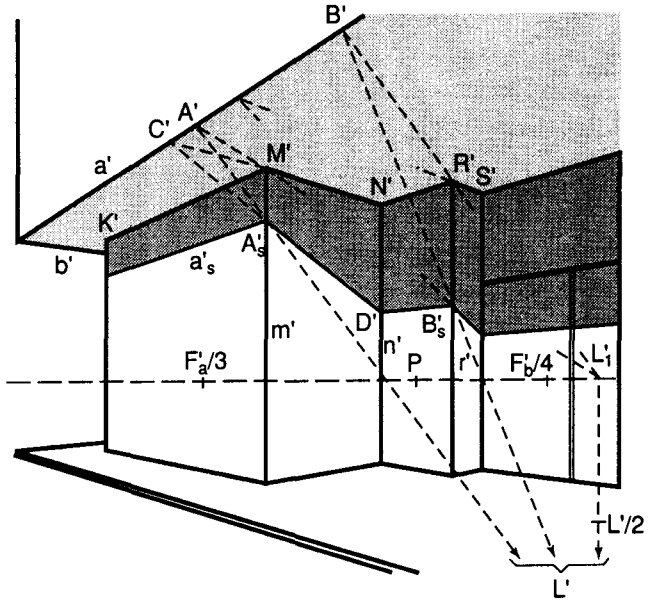


Fig. 35.14.—Sombras sobre planos verticales.

La sombra de a' sobre los parámetros verticales de trazas KM y MN se ha hallado por medio del plano de sombra de la vertical m que corta a α , según la recta $L'_j M'$ y a a' , en A' . Se traza luego el rayo de sombra $A'L'$ que corta a m' , en A'_s (sombra de A') y determina la horizontal de sombra a'_s (fugante en F'_a) y la $A'_s D'$ que pasa por la traza C' de a' con la cara que contiene a $M'N'$. Las restantes sombras se hallan de forma análoga. Como se ve, con este método, no es necesaria la línea de tierra.

35.12. Sombras sobre otras superficies

Como ejemplo de sombras arrojadas por curvas sobre superficies curvas, en la figura 35.15, se ha dibujado la sombra arrojada y autoarrojada por un tubo cilíndrico recto, de eje normal al cuadro, apoyado sobre el geometral, según una generatriz.

Los planos de sombra son paralelos a las generatrices (fugantes en P) y a la dirección de iluminación (fugante en L'), luego PL' es su recta límite y sus trazas con el plano δ de la base del tubo, paralelas a ella.

Las trazas de los planos de sombra, tangentes al cilindro, son t_α y t_β , paralelas a PL' y tangentes a la base anterior del tubo (de centro O y plano frontal de traza g_δ), y sus intersecciones con g'_δ unidas con P , son las trazas geometrales g'_α y g'_β que limitan la sombra arrojada.

a) *Sombra autoarrojada.* Es la arrojada por el arco $A'4'6'B'$ de la base anterior en el interior del tubo

(siendo A' y B' los puntos de tangencia de t_α y t_β) y se ha hallado por puntos, por planos auxiliares de sombra de trazas t'_1, t'_2, \dots paralelas a t'_α . El t'_4 , por ejemplo, corta al cilindro, según las generatrices $4'M$ y $G'4'_s$ y al geometral, según g'_4 . El rayo de luz $4'1'$ corta a $G'4'_s$, en la sombra $4'_s$ de $4'$. Los restantes puntos $1'_s, 2'_s, \dots$, etc. se hallan de forma análoga.

b) *Sombras sobre el geometral.* Son las arrojadas

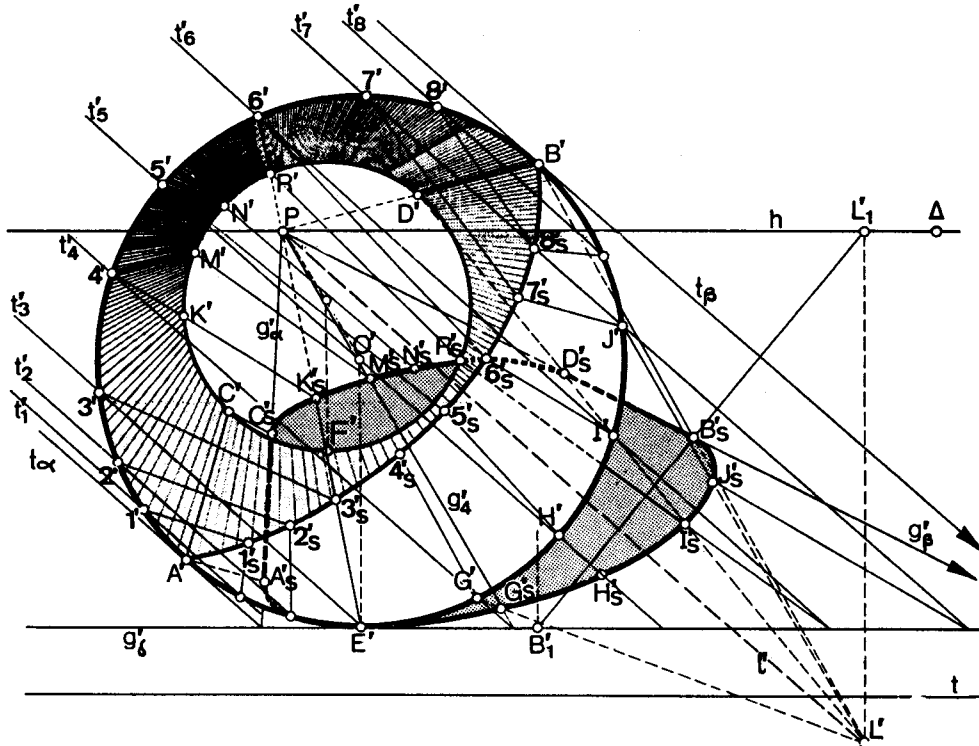


Fig. 35.15.—Sombras de un tubo cilíndrico.

por el arco $A'H'B'$ de la base anterior, el $C'M'D'$ de la posterior y por las generatrices de tangencia $A'C'$ y $B'D'$.

Las trazas geometrales A'_s, C'_s y B'_s, D'_s de los rayos de sombra de A', C' y B', D' determinan las sombras de $\overline{A'C'}$ y $\overline{B'D'}$.

Las arrojadas por los arcos ya citados se hallan, por medio de los planos auxiliares anteriores. En el plano t'_4 , por ejemplo, los rayos de sombra de M' y G' cortan a la traza g'_4 del plano, en M'_s y G'_s . Así se obtienen los puntos G'_s, H'_s, I'_s y J'_s que junto con el E' de tangencia

con g'_δ y los de tangencia A'_s y B'_s con g'_α y g'_β , permiten dibujar el arco elíptico de sombra $A'_sE'_sH'_sB'_s$. Análogamente, los puntos $C'_s, K'_s, M'_s, \dots, D'_s$ determinan el otro arco tangente a g'_α y g'_β , en C'_s y D'_s , respectivamente.

También podría haberse hallado la sombra arrojada, por puntos aislados como el $B'-B'_s$, de sombra B'_s .

En el cap. 39 de n/E. de G. D. pueden verse diversos ejercicios de sombras de cuadro vertical, inclinado y horizontal.

V. GNOMONICA Y RELOJ DE SOL

36. PROYECCIÓN GNOMÓNICA

36.1. Generalidades

La proyección gnomónica es un sistema de aplicación limitada que sólo sirve para representar los elementos de una radiación, es decir, el conjunto de rec-

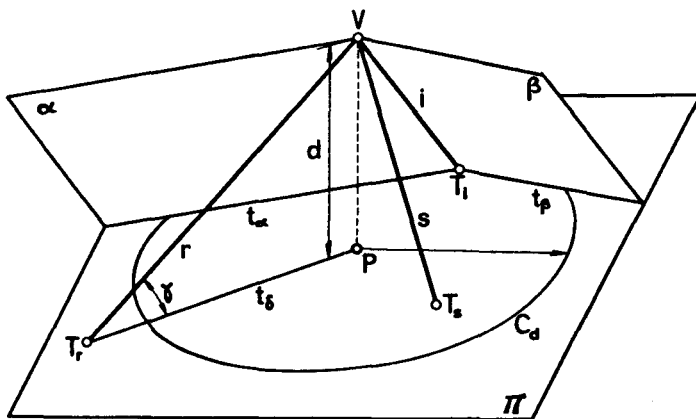


Fig. 36.1.—Elementos fundamentales de la proyección gnomónica.

su proyección ortogonal P sobre el cuadro y por su distancia d a él.

Los únicos elementos de referencia que aparecen en el papel son: el punto P (*punto principal*) y la distancia d , representada generalmente por un círculo C_d , de centro P y radio d (*círculo distancia*).

Las rectas y planos de la radiación quedan determinados por el vértice V , común a todos y por su traza con el cuadro que designaremos con la letra T y t , respectivamente. Así t_α y t_β son las trazas de los planos α y β ; T_r , T_s y T_i son las de las rectas r , s e i (intersección de α y β). La representación gnomónica se aplica en diversas construcciones de la proyección central y de otros sistemas pero, fundamentalmente, en la determinación de sombras y construcción de relojes de sol. De ahí, su nombre.

tas y planos que pasan por un punto V o *vértice* de aquella.

Los elementos fundamentales son el plano de proyección π (cuadro) y el vértice V , exterior a él (Fig. 36.1). La posición de V en el espacio queda fijada por

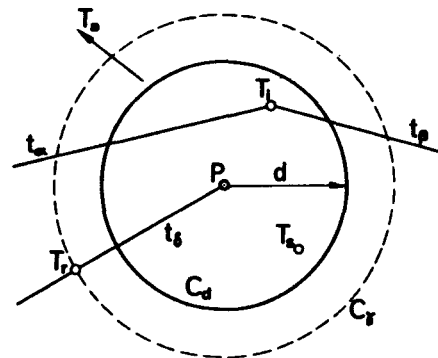


Fig. 36.2.—Representación de recta y plano. Círculo de inclinación γ .

36.2. Representación de la recta

En la figura 36.2, las rectas r y s están representadas, como ya se dijo, por sus trazas T_r y T_s .

Las rectas, como la a , paralelas a π o *rectas de frente*, tienen su traza en el infinito del papel. Se representan por su dirección T_a , dibujada con una flecha.

Si una recta r forma con el cuadro un ángulo γ (Fig. 36.1), todas las de igual inclinación γ serán las generatrices de un cono recto de revolución de eje VP , y sus pies o trazas distarán de P la longitud $\overline{PT_r}$. Por tanto:

El lugar geométrico de las trazas de las rectas de inclinación γ es un círculo C_γ de centro P , llamado *círculo de inclinación* γ .

Si $\gamma = 45^\circ$, en el triángulo rectángulo VPT_r , se verifica: $\overline{VP} = \overline{PT_r}$, luego el círculo distancia es el círculo de inclinación $\gamma = 45^\circ$.

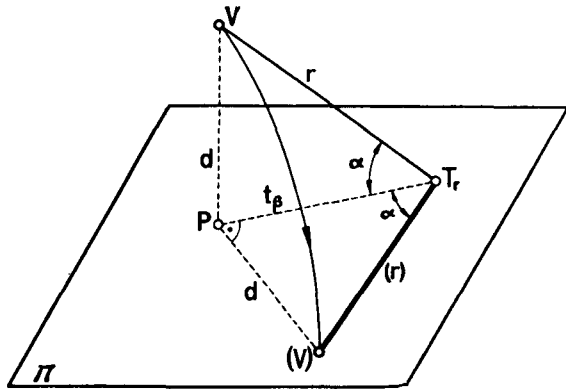


Fig. 36.3.—Abatimiento de un plano de perfil.

36.3. Representación del plano (Figs. 36.1 y 2)

a) *Plano perpendicular al cuadro o plano de perfil.*- Contiene a la normal VP , por lo que su traza ha de pasar por el punto principal, como sucede con el $\delta = [VPT_r]$, cuya traza t_δ pasa por P .

El plano proyectante ortogonal de una recta es el plano de perfil t_δ que pasa por ella. Su traza t_δ coincide con la proyección ortogonal PT_r de aquella.

b) *Plano paralelo al cuadro o plano de frente.*- No tiene representación, por estar su traza en el infinito.

c) *Plano oblicuo respecto al cuadro o plano inclinado.*- Su traza es una recta cualquiera que no pasa por P . Tal ocurre con los t_α y t_β .

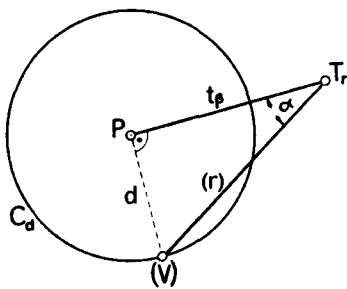


Fig. 36.4.—Abatimiento (r) de la recta T_r .

d) De la figura 1 se deduce: Si una recta i pertenece a un plano α , su traza T_i está situada en la traza t_α del plano o lo que es lo mismo: la traza de un plano es el lugar geométrico de las trazas de las rectas situadas en él.

Inversamente: Si varios planos, como los α y β , pasan por una recta i , sus trazas t_α y t_β concurren en T_i .

Todo plano σ , de inclinación β , respecto al cuadro (Fig. 36.5), es tangente al cono de revolución de eje VP cuya base es el círculo de inclinación C_β (no dibujado)

de radio \overline{PN} . La generatriz de contacto es la recta VN de máxima pendiente del plano y su traza t_σ es tangente al círculo C_β en la traza N de VN .

La distancia VN de V a la traza t_σ del plano coincide con la recta de máxima pendiente y recibe el nombre de *ancho* del plano.

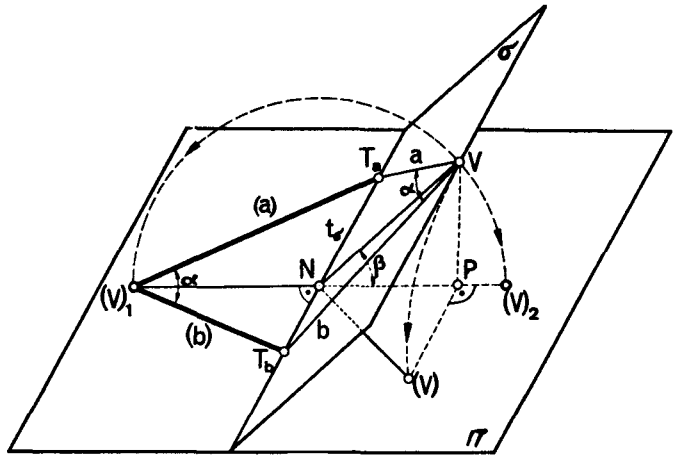


Fig. 36.5.—Abatimiento del plano.

36.4. Abatimiento

Al abatir el plano de perfil t_β (Fig. 36.3) sobre el cuadro, el vértice V describirá un arco de círculo $V(V)$, de plano normal a la charnela t_β . El radio PV se conservará normal a t_β durante el giro, luego el abatimiento (V) del vértice se encontrará sobre la normal $P(V)$ a la charnela t_β y a distancia d de ella.

Para obtener el abatimiento (r) de cualquier recta T_r de este plano, basta unir su traza T_r con el abatimiento (V) del vértice. El ángulo formado por (r) y t_β es el α , de inclinación de la recta, en verdadera magnitud.

Esto es lo que se ha hecho en la figura 36.4 para abatir el vértice V y la recta T_r contenida en el plano t_β .

El abatimiento del vértice es la intersección (V) de la normal $P(V)$ a t_β , con el círculo distancia C_d . Uniendo (V) con T_r , se obtiene el abatimiento (r) de la recta y el ángulo $(V)\widehat{T_r}P = \alpha$ de inclinación de ésta.

Si se trata de un plano inclinado σ (Fig. 36.5), el vértice V describirá también el arco $V(V)_1$, de radio \overline{VN} , normal a t_σ . El plano del círculo descrito por V es el de perfil de traza PN , normal a t_σ , luego el abatimiento (V)₁ de V estará en la prolongación de PN y distará de N la longitud $\overline{N(V)}_1 = \overline{NV}$ (ancho del plano).

VN se obtiene en verdadera magnitud, en (\overline{VN}) , por medio del abatimiento del triángulo de perfil VNP , como antes se ha explicado.

Uniendo (V)₁ con las trazas T_a y T_b de dos rectas cualesquiera del plano, se obtienen los abatimientos (a) y (b) de éstas y el ángulo α que forman entre sí.

De lo dicho se deduce la construcción a seguir (Figura 36.6).

Desde el punto principal, se traza la perpendicular PN y la paralela $P(V)$ a la traza t_α del plano dado, hasta su intersección (V) con el círculo distancia C_d . La recta $N(V)$ es el abatimiento de la recta de máxima pendiente o ancho del plano.

Trazamos luego el arco de centro N y radio $\overline{N(V)}$

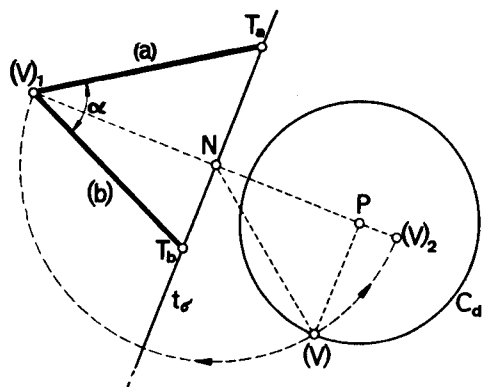


Fig. 36.6.—Abatimiento del plano $\sigma \equiv [T_a, T_b]$.

que corta a PN , en el abatimiento $(V)_1$ de V . Uniendo este punto con T_a y T_b , se obtienen los abatimientos (a) y (b) de a y b y el del ángulo α que forman. También podía haberse abatido V en sentido opuesto, en $(V)_2$.

La construcción explicada es idéntica a la seguida en diédrica (núm. 8,2) para abatir un punto sobre el horizontal.

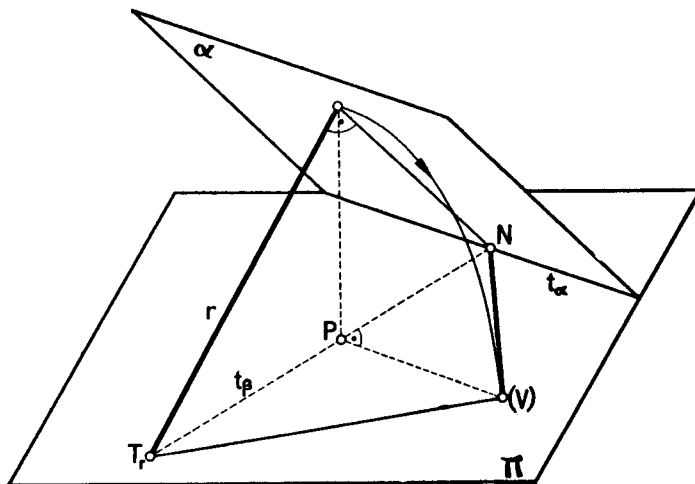


Fig. 36.7.—Perpendicularidad.

36.5. Perpendicularidad

Si una recta r es perpendicular a un plano α (Fig. 36.7), el plano de perfil t_β determinado por aquella es perpendicular al π y al α (por contener a sus normales respectivas VP y (r)) y por lo tanto, a la intersección t_α de ambos.

Por ser r normal a α , también lo será a su recta de máxima pendiente y al abatirlas en $\overline{(V)T_r}$ y $\overline{(V)N}$, $T_r(V)N = 90^\circ$ lo cual sirve para hallar una u otra, por medio del triángulo rectángulo abatido $T_r(V)N$, como veremos en los ejercicios siguientes.

1º Recta perpendicular a un plano t_α . Desde P (Fig. 36.8) se traza la perpendicular PN y la paralela $P(V)$ a t_α , hasta su intersección (V) con C_d , siendo $\overline{(V)N}$ el abatimiento de la recta de máxima pendiente del plano y la perpendicular a ella por (V) , el abatimiento (r) de r que corta a PM , en la traza T_r de r .

2º Plano perpendicular a la recta T_r . En la misma figura anterior, se traza T_rP y la perpendicular $P(V)$ a ella, hasta su intersección (V) con C_d siendo $\overline{(V)T_r}$ el abatimiento de r . La perpendicular $(V)N$ a (r) corta a la prolongación de T_rP , en el punto N que pertenece a la traza t_α de α , perpendicular a T_rP .

Si dos rectas T_a y T_b son perpendiculares, sus abatimientos (a) y (b) también lo son y forman un triángulo rectángulo de catetos (a) y (b) , hipotenusa $\overline{T_aT_b}$ y altura

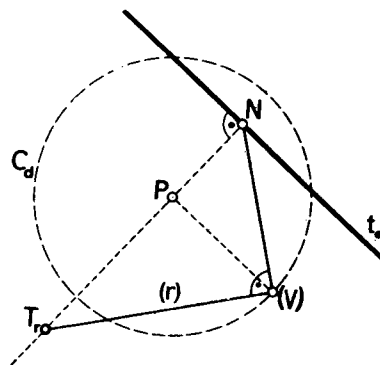


Fig. 36.8.—Recta T , perpendicular al plano t_α .

Rectas perpendiculares

Suponiendo $\alpha = 90^\circ$, en la figura 36.5 se verifica:

ra igual al el abatimiento $\overline{(V)_1N}$ del ancho del plano α , determinado por las rectas.

Los ejercicios que siguen son aplicación inmediata de todo lo expuesto:

EJERCICIOS

36.6. Hallar el plano bisector de un diedro de caras t_α y t_β y arista T_a dadas

Solución.- El ángulo de un diedro es el de su rectilíneo, de plano normal a la arista del diedro. Basta pues (Fig. 36.9) trazar el plano t_γ normal a la arista, abatiendo ésta en (a) y trazando la perpendicular $(V)N$ a ella, hasta su intersección N con T_aP (núm. 36,5-2°).

El plano t_γ del rectilíneo corta a las caras del diedro, según las rectas T_c y T_d (intersecciones de t_γ con t_α y t_β), abatidas en (c) $\equiv (V)T_c$ y (d) $\equiv (V)T_d$, que forman el ángulo $\delta = T_c(V)T_d$ del rectilíneo, siendo $\overline{N(V)} = \overline{N(V)}$.

La bisectriz (b) de δ corta a t_γ en su traza T_b y determina la traza $t_e \equiv T_aT_b$ del bisector pedido.

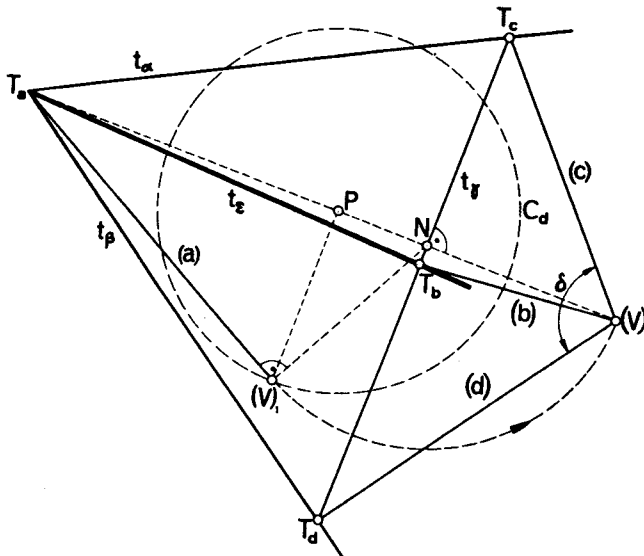


Fig. 36.9.—Bisector del diedro de caras t_α y t_β

36.7. Hallar el ángulo que la recta T_a forma con un plano dado t_δ

Solución.- El ángulo que una recta forma con un plano es el que forma con su proyección ortogonal sobre el plano. Dicho ángulo es también el complementario del que forma la recta con la normal al plano, trazada por cualquier punto de ella. De aquí, los dos procedimientos a seguir (Figura 36.10).

1°) Por el punto V de la recta T_a , se traza la perpendicular T_b a δ , por medio de su abatimiento (b) $\equiv (V)T_b$, normal a $(V)N$. Se abate luego el plano $\gamma \equiv [a, b]$ y con él, T_a y T_b , en (a) y (b), que forman entre sí el ángulo α , complementario del buscado β .

2°) El plano t_γ antes hallado es el proyectante orto

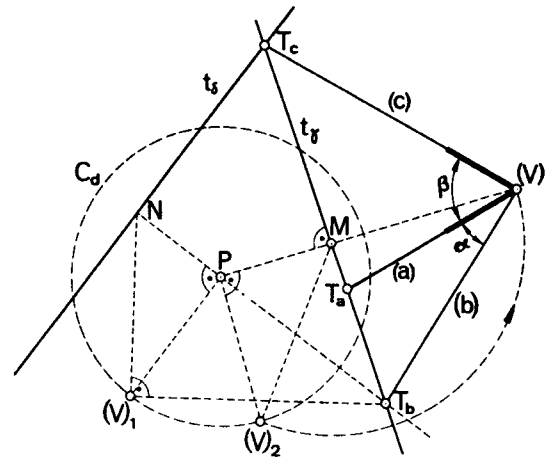


Fig. 36.10.—Ángulo de la recta T_a con el plano t_δ

gonal de T_a sobre δ (por contener a T_b), y su intersección T_c con δ es la proyección ortogonal de a sobre δ , luego $\beta \equiv (a)(c)$ es el ángulo buscado.

Si t_δ y t_γ se cortan fuera de los límites del dibujo, se halla α y luego, su complementario β .

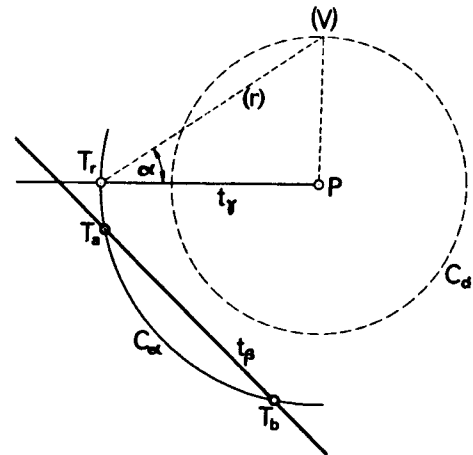


Fig. 36.11.—Recta de inclinación α contenida en el plano t_β

36.8. Dado un plano t_β determinar una recta contenida en él y que forme un ángulo α , dado, con el plano del cuadro

Solución.- Basta hallar el círculo de inclinación C_α (Fig. 36.11) correspondiente al ángulo dado. Para ello, abatimos un plano de perfil arbitrario t_γ y con él, la recta r , abatida en (r), que forma el ángulo α con PT_r o $90 - \alpha$ con $(V)P$.

La intersección T_r de (r) con t_γ determina el radio del círculo de inclinación C_α que corta a t_β en las trazas T_α y T_β de las rectas buscadas.

36.9. Construir un triedro trirectángulo de vértice V , de modo que una de sus caras coincida con un plano dado t_α y que el triángulo de las trazas de sus tres caras sea isósceles y se verifique $T_a T_b = T_a T_c$

Solución (Fig. 36.12).- La traza T_a de la arista a , normal a la cara t_α , se obtiene por medio del abatimiento $(V)_1$ del vértice y de la perpendicular (a) a $N(V)_1$.

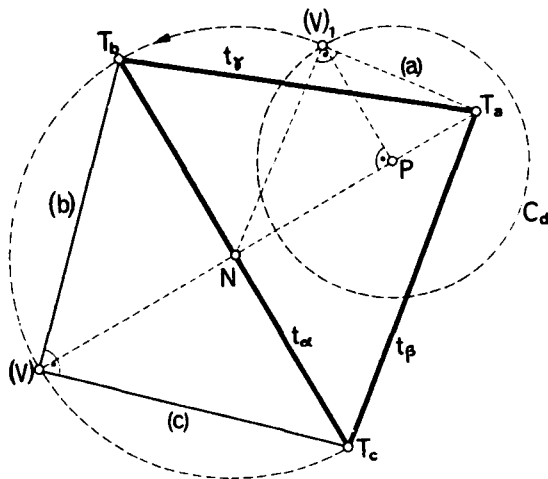


Fig. 36.12.- Triedro trirectángulo de cara t_α y arista opuesta T_a tal que $T_a T_b = T_a T_c$

Por otra parte, las aristas b y c son normales entre sí y sus trazas, T_b y T_c equidistan de N por ser $T_a T_b = T_a T_c$ luego el triángulo abatido $T_b(V)T_c$ ha de ser isósceles y rectángulo en (V) y su vértice (V) ha de estar en la semicircunferencia de centro N y radio $\overline{N(V)} = \overline{N(V)}_1$, y en la normal $N(V)$ a t_α .

Basta pues llevar sobre la traza t_α , a partir de N , las longitudes $\overline{NT}_b = \overline{NT}_c = \overline{N(V)}_1$, quedando así determinado el triángulo de trazas pedido.

36.10. Construir un triedro, conociendo uno de sus diedros y las dos caras que lo forman

Solución.- En los problemas de construcción de diedros se supone, para facilitar las construcciones, que una de sus aristas es normal al cuadro, con lo que el plano del rectilíneo de dicha arista coincide con el cuadro.

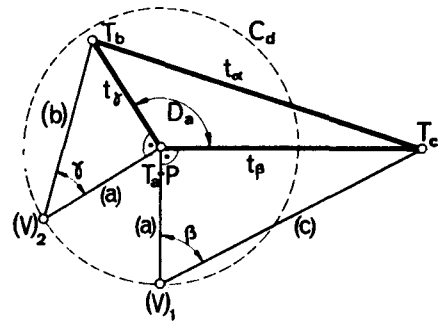


Fig. 36.13.- Triedro de arista $T_a \equiv P$, diedro \widehat{D}_a y caras β y γ

En nuestro caso (Fig. 16.13), designaremos a las aristas por las letras a , b y c . A los diedros de estas aristas, por D_a , D_b y D_c y a las caras respectivas, opuestas a ellas, por α , β y γ . Se suponen conocidos el diedro D_a y las caras β y γ .

Según lo dicho, colocaremos el diedro con su vértice en V y su arista a , normal al cuadro. En esta posición, T_a coincidirá con P , los planos t_β y t_γ de las caras del diedro serán planos de perfil y el diedro D_a vendrá dado en verdadera magnitud sobre el cuadro, siendo sus lados las trazas t_β y t_γ de las caras. De aquí, la construcción.

Con vértice en P , construir un ángulo igual al D_a del diedro, de lados t_β y t_γ . Abatir luego la cara β , trazando por P la perpendicular $P(V)_1$ a t_β , hasta cortar en $(V)_1$ a C_d y por este punto, trazar la recta (c) que forme con $P(V)_1$ el ángulo b , hasta su intersección T_c con t_β (traza de c).

Abatiendo de forma análoga la cara γ , se obtiene ésta abatida en $P(V)_2 T_b$, siendo $T_b T_c \equiv t_\alpha$ la traza de la tercera cara.

37. RELOJ DE SOL

37.1. Generalidades

El reloj de sol consta, en esencia, de dos partes fundamentales: el objeto que produce sombra y la superficie que la recibe. Al primero se le llama *gnomon*, *stilo*, *estilete*, *varilla* o *aguja* y a la segunda, *cuadrante* o *limbo*. Los más generalizados son los relojes de *cuadrante* y *gnomon*. De aquí, el nombre de *gnómica* con que se designa a la ciencia que estudia la medida del tiempo, por medio de la sombra.

La antigüedad de los relojes de sol y su utilización en todas las épocas, incluso en la actualidad, explica la enorme variedad de tipos y modelos, de objetos y

materiales utilizados y de formas, dimensiones, orientación e inclinación de los mismos.

37.2. Coordenadas geográficas

La forma de la Tierra no es completamente esférica sino algo achatada por los polos, lo cual le hace sensiblemente igual a un elipsoide de revolución. No obstante, nosotros la supondremos esférica, como suele hacerse por sencillez de cálculos y razonamientos.

El eje polar PP' (Fig. 37.1) es el eje de rotación terrestre cuyo extremo P , situado entre América y Eurasia, se llama *polo Norte* y el opuesto P' , *polo Sur* designándose ambos con las letras N y S , respectivamente.

El plano perpendicular al eje polar que pasa por su punto medio C , o centro geométrico de la tierra, corta a ésta según un círculo máximo (*ecuador terrestre*) y los planos paralelos a él, según círculos menores (*paralelos*).

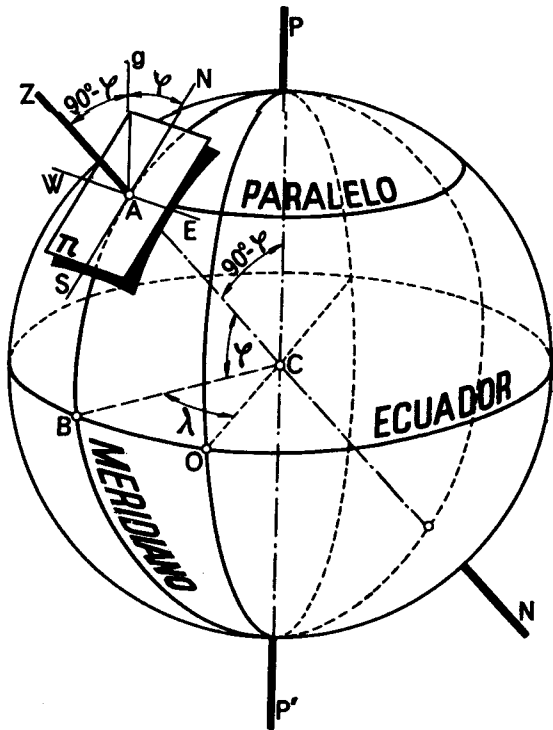


Fig. 37.1.—Coordenadas geográficas.

La tierra queda dividida por el ecuador en dos hemisferios. El superior o *boreal* contiene el polo Norte y el inferior o *austral*, el polo Sur.

Todo plano que pasa por el eje polar corta a la tierra, según un círculo máximo (*meridiano*). El semicírculo correspondiente al hemisferio boreal se llama *meridiano superior* y el opuesto, *meridiano inferior*.

Por cualquier punto A de la superficie terrestre pasa siempre un meridiano y un paralelo (dibujados en la figura), lo cual sirve para determinar la posición de A . Para ello se toma el ecuador como referencia de paralelos y como referencia u origen de meridianos, el que pasa por el observatorio de Greenwich, también llamado *primer meridiano*, que corta al ecuador en O .

En el sistema de coordenadas esféricas de origen O , así determinado, las coordenadas del punto A o *coordenadas geográficas*, son:

a) *La longitud geográfica* λ o ángulo diedro formado por el primer meridiano y el que pasa por A . Si mide por el ángulo λ del rectilíneo del diedro determinado por el ecuador o por su arco \widehat{OB} , expresado en grados. También puede medirse sobre el paralelo de A .

La longitud se llama *oriental* u *occidental*, según se mida hacia el este o hacia el oeste, respectivamente, pudiendo variar de 0° a 180° , en ambos sentidos.

b) *La latitud geográfica* φ , o ángulo que el radio \overline{CA} forma con el ecuador. También suele medirse, a partir del ecuador, por el arco \widehat{BA} determinado por el meridiano de A .

La latitud es positiva o negativa, según se mida hacia el norte o sur, respectivamente. En el primer caso, se llama *norte* o *boreal* y, en el segundo, *sur* o *austral*, variando de 0° a 90° , en ambos casos.

En ocasiones, se utiliza también el complemento $90^\circ - \varphi$ de la latitud, llamado *colatitud*. Se mide por el arco \widehat{PA} , complementario del \widehat{BA} .

Los mapas se dibujan con gran número de meridianos y paralelos igualmente espaciados, formando una malla o cuadrícula que cubre por completo la superficie representada. De este modo, interpolando entre dos consecutivos, se obtiene la longitud y latitud de cualquier lugar con bastante aproximación.

37.3. Orientación

Supongamos un observador colocado en el punto A , de la figura anterior, y de pie sobre la superficie terrestre. La vertical AZ le atravesará de pies a cabeza y prolongándola hacia el interior de la tierra, pasará por su centro C o lo que es lo mismo, coincidirá con el radio \overline{AC} . Su extremo Z , situado por encima de la cabeza, se llama *zenit* y el opuesto N , supuesto prolongado después de atravesar la tierra, *nadir*.

El horizonte de este observador es el plano π , tangente a la superficie terrestre en A y perpendicular a la vertical AZ y por tanto, horizontal. De ahí, su nombre. La intersección de este plano con el del meridiano de A es una recta NS , llamada *meridiana*, que determina la dirección norte-sur del lugar. La perpendicular a ella, por A , coincide con la dirección este-oeste.

Si el observador se coloca mirando hacia el polo norte P , tendrá delante de él, sobre el horizonte, el Norte N ; detrás, el Sur S ; a su derecha, el Este E y a su izquierda, el Oeste O (que también se representa por W).

La dirección vertical que, como se sabe, coincide con la de la gravedad, puede materializarse con la plomada.

El plano horizontal coincide con la superficie libre del agua en reposo y puede materializarse, nivelando dos rectas cualesquiera de su plano que no sean paralelas.

La vertical, la meridiana y la paralela g al eje polar pertenecen al plano del meridiano de A , normal a π .

La paralela g al eje polar forma con el horizonte y con la vertical, ángulos respectivamente iguales a la latitud y colatitud del lugar, y su proyección ortogonal sobre el horizonte coincide con la meridiana, siendo su plano proyectante el del meridiano del lugar.

Estas propiedades son de frecuente uso en la construcción de los relojes de sol, cuyo gnomon g es paralelo al eje terrestre, como más adelante veremos.

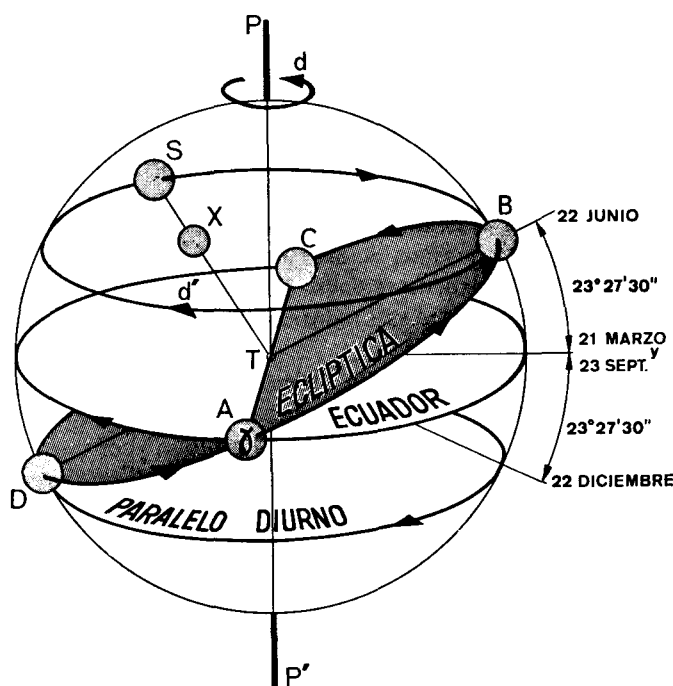


Fig. 37.2.—Movimiento aparente del sol en la esfera celeste.

37.4. Esfera celeste

Para facilitar el estudio del movimiento y posiciones de los astros, se supone que el universo es una esfera finita pero inmensa, de dimensiones colosales, llamada *esfera celeste* (Fig. 37.2).

La Tierra ocupa el centro de ella y como su tamaño es pequeñísimo comparado con el de la esfera, se supone reducida a un punto, lo cual obliga a admitir:

a) Que todo observador terrestre, de cualquier longitud y latitud, está situado en su centro, por el que también pasan sus horizontes respectivos.

b) Que al dirigir una visual a cualquier astro, lo verá proyectado sobre la esfera, desde su posición central.

Los astros como el X se representan, por tanto, por sus proyecciones centrales S sobre la esfera, desde su centro T , por medio de visuales radiales.

37.5. Movimientos aparentes del Sol

La Tierra, como se sabe, no está fija en el espacio sino que está animada de una serie de movimientos. Los más importantes y conocidos son:

1º) El movimiento de rotación, alrededor de su eje polar, también llamado *movimiento diurno*, por ser de un día de duración. El sentido de giro es el indicado en d (Fig. 37.2), o sea, el contrario a las agujas de un reloj para un observador situado fuera de la tierra y encima del polo norte.

2º) El movimiento de traslación alrededor del Sol, según una trayectoria plana, llamada *eclíptica* por su forma de elipse, en la que el Sol ocupa uno de sus focos.

El eje polar se conserva paralelo a sí mismo durante todo el recorrido, por lo que la oblicuidad de los rayos solares varía paulatinamente a lo largo del año, dando lugar a las cuatro estaciones. El valor del ángulo que el eje polar forma con la normal a la eclíptica se mantiene constante y su valor es de $23^{\circ} 27' 30''$.

a) Por ser para nosotros inapreciable el movimiento de rotación, nos parece que la tierra está fija y que son los cuerpos celestes exteriores a nosotros los que giran alrededor del eje polar, pero en sentido d' contrario al nuestro, o sea, de E a W.

Este es el llamado *movimiento aparente* de los astros, en virtud del cual parece como si toda la bóveda celeste girase alrededor de la tierra cuando, en realidad, es ésta la que gira y las estrellas, las que permanecen fijas.

De acuerdo con esto, al suponer inmóvil la tierra, la trayectoria aparente del Sol, situado en D por ejemplo, es siempre un círculo menor de la esfera celeste, llamada *paralelo diurno*, de plano perpendicular al eje polar.

b) Refiriéndonos ahora al movimiento de traslación, como la oblicuidad de los rayos solares (inclinación del vector sol-tierra respecto al eje polar) va variando a lo largo del año, si dibujamos el vector sobre la esfera celeste en cada una de estas posiciones, obtendremos sobre ella la trayectoria o curva aparente descrita por el Sol, que también se llama *eclíptica*.

Como el vector Sol-Tierra se mueve en el espacio sobre un plano, la curva aparente descrita por el Sol

en la esfera celeste será una curva plana o mejor dicho, un círculo máximo de ésta. La intersección del plano de la eclíptica con el del ecuador es la línea equinocial \overline{AC} , normal al eje polar; sus extremos A y C , los equinocios de primavera y otoño y B y D , los solsticios de verano e invierno, respectivamente.

En los equinocios A y C , el vector Sol-Tierra es normal al eje polar. Los días son iguales a las noches

(de aquí el nombre de equinocios) y el paralelo diurno o trayectoria aparente del Sol es coplanario con el ecuador terrestre.

A lo largo del año, el Sol se mueve de A (21 de marzo) a B (22 de junio). Desde este punto, a C (23 de septiembre) y luego, a D (22 de diciembre), completándose su órbita al volver a A . Esto explica su lento recorrido a través de las estrellas y su aparición

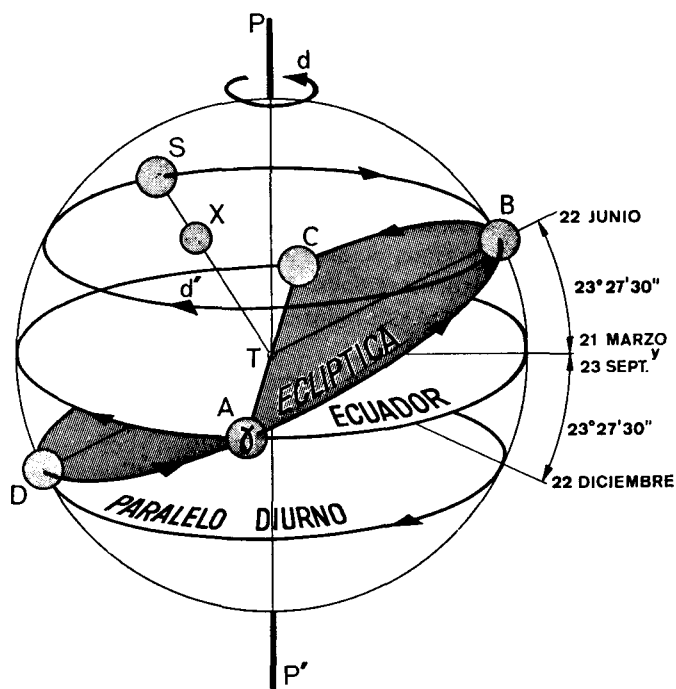


Fig. 37.2.—Movimiento aparente del sol en la esfera celeste.

sucesiva en los doce signos del zodiaco. El sentido de este movimiento es, como se indica en la figura, contrario al de su movimiento diurno aparente d' .

En resumen, por la rotación de la Tierra, el Sol describe diariamente un paralelo diurno en el sentido d' (de E a W), pasando por el Sur y por el movimiento de traslación, recorre anualmente la eclíptica, en sentido contrario al anterior.

De la combinación de ambos movimientos, resulta la trayectoria aparente verdadera del Sol pero en la construcción de los relojes de sol se supone, para mayor sencillez, que el sol describe cada día un paralelo diurno completo cuya distancia al ecuador a declinación va variando a lo largo del año, desde la máxima de $23^{\circ} 27' 30''$, en el solsticio de verano, hasta la opuesta del mismo valor pero de sentido contrario, en el de invierno, siendo de seis meses el tiempo transcurrido de un solsticio a otro.

37.6. Coordenadas horizontales

Para determinar la posición de los astros en la esfera celeste, se prolongan los planos y ejes de referencia de la Tierra, hasta cortar a la esfera.

Los planos de referencia son el del ecuador, el de la eclíptica y el horizonte del observador. Como ejes de referencia se adoptan los normales a éstos: el eje polar o de giro terrestre, el del giro aparente del Sol y el zenit-nadir o vertical del observador.

Cada uno de estos planos, con su eje normal respectivo, determina un sistema de coordenadas esféricas o coordenadas celestes geocéntricas, llamadas ecuatoriales, eclípticas y horizontales cuyos nombres corresponden al del plano de referencia utilizado.

En los dos primeros sistemas, se toma como origen (Fig. 37.2) el equinoccio de primavera o punto vernal (intersección A del ecuador y la eclíptica) y se representa por la letra griega γ .

En el sistema horizontal (el más utilizado en los relojes de sol) el plano fundamental o de referencia es el del horizonte del lugar que se considere (figura 37.3). Todo plano que pase por el eje zenit-nadir se llama *vertical* lo mismo que el círculo que determina en la esfera y los perpendiculares a éste eje y paralelos, por tanto, al del horizonte, *almicantarates*.

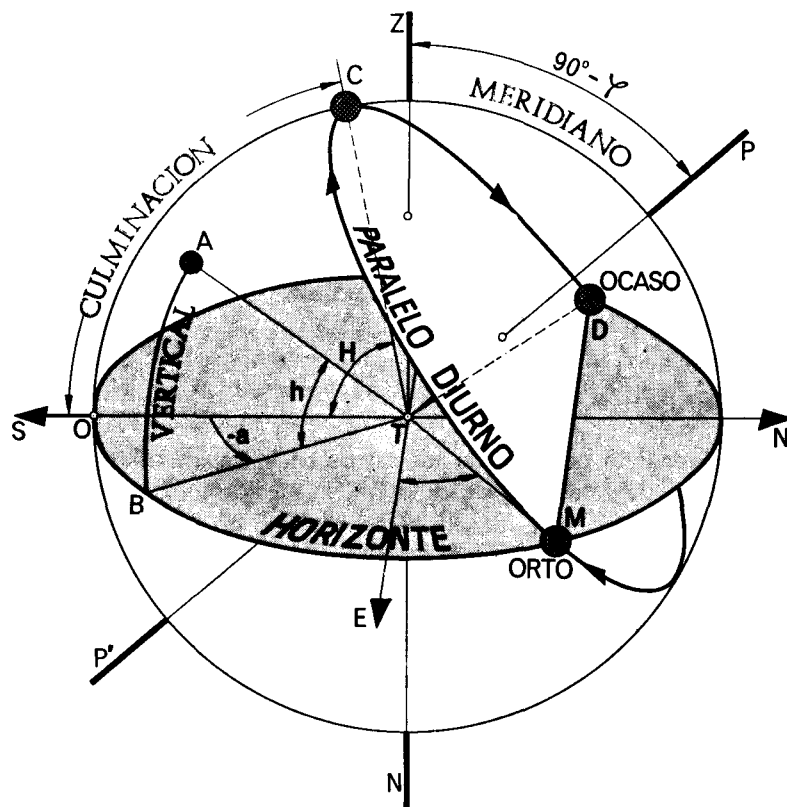


Fig. 37.3.—Coordenadas horizontales.

Como origen de los círculos verticales, se adopta el que contiene al eje polar, que es precisamente el meridiano del lugar (el plano del papel, en la figura) que corta al horizonte, como ya dijimos (núm. 37,3), según la N-S o meridiana.

De los dos semicírculos en que el ecuador divide el meridiano, el que contiene al zenit Z se llama *superior* y el opuesto, *inferior*.

Otro círculo vertical interesante es el perpendicular al meridiano, llamado *primer vertical*, que corta al horizonte según la recta E-W.

Las coordenadas horizontales de un punto A , en este sistema, son:

a) El *azimut* a o ángulo diedro que el vertical del astro forma con el meridiano. Se mide sobre el horizonte, por su rectilíneo \widehat{OTB} y se cuenta de 0° a 360° a

partir del Sur, como origen, en el sentido SWNE. También puede medirse de 0° a 180° , considerándose como positiva la dirección SWN y negativa la contraria, como sucede en la figura.

b) La *altura* h o ángulo \widehat{ATB} que la visual TA al astro forma con el horizonte. Se mide sobre el vertical del astro, tomándose como positiva la dirigida hacia el zenit y como negativa (*depresión*), hacia el nadir.

A veces se utiliza, como tercera coordenada, el complemento de la altura, llamada *distancia zenital*. Se mide de 0° a 180° , desde el zenit hacia el nadir, y se presenta por z o ζ . A distancias cenitales menores o mayores de 90° corresponden *alturas* o *depresiones* del astro.

Como vertical del astro, se considera sólo el semicírculo que lo contiene.

Veamos ahora el recorrido aparente del Sol en un día cualquiera del año. Su trayectoria diurna aparente es el paralelo diurno dibujado en la figura, de plano normal al eje polar. El plano de horizonte es el de un observador de latitud φ , por cuya razón, el ángulo formado por su vertical o zenit y el eje polar es $90^\circ - \varphi$.

Este observador del hemisferio boreal lo verá aparecer siempre en su plano de horizonte, por el Este, en M . Luego lo verá elevarse hasta alcanzar el meridiano, en C y una vez pasado éste, descender según una tra-

yectoria simétrica de la anterior, hasta desaparecer por el horizonte, en D . El tiempo que tarde en recorrer todo el paralelo diurno es el mismo que la tierra emplea en dar una rotación completa.

Cuando el Sol o una estrella asoma por el horizonte, en M , se dice que está *en orto* y cuando se oculta, en D , *en ocaso*. La posición intermedia C , que coincide con el meridiano, se llama *culminación*, pudiendo ser *inferior* o *superior* (caso de la figura), según corte al meridiano de uno u otro nombre. Es ésta la máxima altura H alcanzada por el Sol en esta latitud, en su recorrido diario. De ahí, su nombre.

El ángulo formado por las visuales \overline{TM} y \overline{TD} al Sol, en su orto y ocaso, con la línea este-oeste, se llama *amplitud ortiva* (ángulo \widehat{ETM}) y *occidua* (ángulo \widehat{WTD}).

37.7. Recorrido del Sol por el horizonte

En la figura 37.4 se han dibujado los paralelos diurnos extremos (de máxima y mínima declinación = $23^{\circ} 27' 30''$), correspondientes a los solsticios de verano e invierno y el paralelo medio, correspondiente a los

equinoccios de primavera y otoño, en los que coincide con el plano del ecuador. S_v y S_i son las posiciones del Sol a su paso por el meridiano, en los solsticios de verano e invierno y E_{po} en los equinoccios de primavera y otoño.

En la latitud φ de la figura, la culminación media

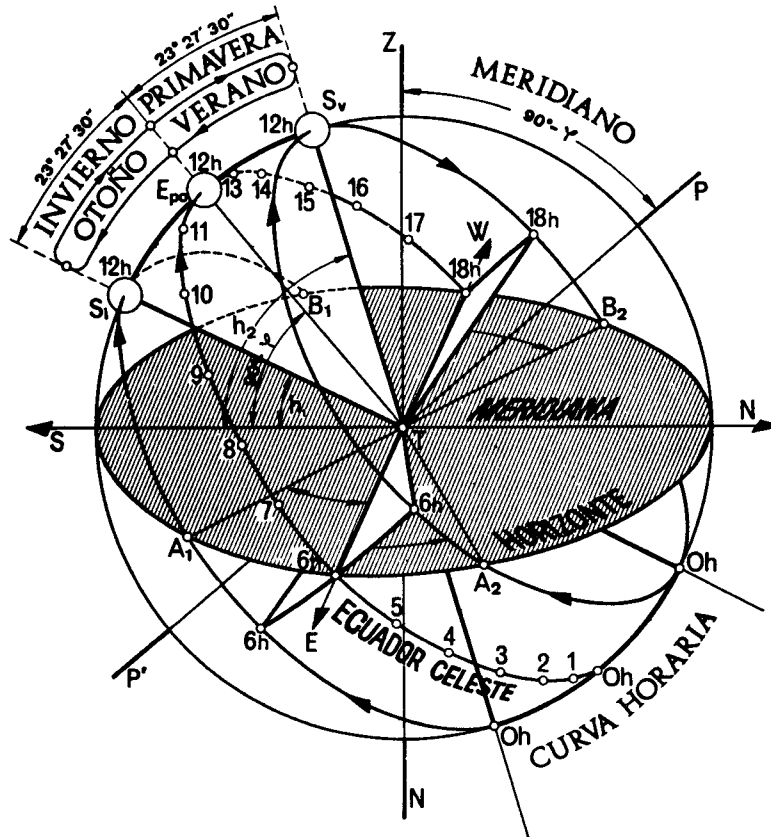


Fig. 37.4.—Recorrido del sol por el horizonte.

del Sol durante el año se produce en los equinoccios y viene dada por el ángulo $\widehat{STE}_{po} = 90^{\circ} - \varphi$, igual a la colatitud.

Como la declinación máxima del Sol es, como ya vimos, de $23^{\circ} 27' 30''$ (solsticios de verano e invierno), la culminación máxima y mínima del año serán: $h_2 = 90^{\circ} - \varphi + 23^{\circ} 27' 30''$ y $h_1 = 90^{\circ} - \varphi - 23^{\circ} 27' 30''$

Para un día determinado del año, la altura máxima o culminación es:

$$h = 90^{\circ} - \varphi \pm \delta$$

siendo δ la declinación del Sol en dicho día.

Fijándonos ahora en la duración y longitud de su recorrido, vemos que en el solsticio de verano (22 de junio), el Sol sale por A_2 y se pone por B_2 , después de recorrer el arco $\widehat{A_2S_vB_2}$. Sus amplitudes ortiva y occidua son $\widehat{EA_2}$ y $\widehat{WB_2}$, es decir, que sale y se pone por puntos situados al norte de la línea E-W. La amplitud

$\widehat{A_2SB_2}$ de la proyección de su trayectoria sobre el horizonte es mayor de 180° , lo cual explica que la duración del día (arco $\widehat{A_2SB_2}$) sea mayor que la de la noche (arco $\widehat{B_2NA_2}$).

A partir de esta fecha, los ortos y ocasos se van aproximando a la línea E-W y la duración del día, así como la culminación, van disminuyendo hasta llegar al equinoccio de otoño E_o (23 de septiembre), en que el Sol sale y se pone exactamente por E y W. Su culminación es igual a la colatitud y la duración del día igual a la de la noche.

A partir de esta fecha, los ortos y ocasos se desplazan hacia el sur y la culminación sigue disminuyendo, hasta llegar al solsticio de invierno (22 de diciembre), en el que se alcanza los valores mínimos: mínimo recorrido $\widehat{A_1SB_1}$, mínima culminación y mínima duración del día (el más corto del año).

El recorrido de S_v a S_i dura seis meses y a partir de esta fecha, se verifica el recorrido inverso de otros seis meses de duración, pasando por el equinoccio de primavera E_{po} , lo cual explica las variaciones periódicas de su movimiento aparente sobre el horizonte del observador.

37.8. Medida del tiempo. Clases de horas

Se llama *medio día verdadero* el instante en el que el centro del disco solar pasa por el meridiano. En dicho momento son las doce horas del día solar (tiempo verdadero) y cuando el Sol pasa por el meridiano opuesto, las cero horas.

Observando el paso del Sol por el meridiano, durante una serie de días y con un buen cronómetro, comprobaremos que la duración del día solar no es constante y que el Sol tampoco pasa por el meridiano a la misma hora.

Para compensar tales irregularidades y ante la imposibilidad de adaptar los relojes al tiempo verdadero por no ser éste uniforme, ha habido necesidad de imaginar un Sol ficticio, llamado *Sol medio* que pasa por el meridiano con rigurosa puntualidad y conserva invariable la duración del *día medio*.

El tiempo y día referido al Sol medio se llama *tiempo medio* y *día medio* y el correspondiente al meridiano de una localidad, *tiempo medio local*. Tomando como origen del día, para dicha localidad, el paso del Sol medio por su meridiano opuesto a aquella (medianoche media), se tiene el *tiempo civil local*, o sea, la *hora local*.

El tiempo medio civil, en Greenwich, es el llamado *tiempo universal*.

Para evitar las complicaciones que traería consigo el que cada comarca o región utilizase su hora local, las diversas naciones del globo han adoptado la llamada hora *oficial* o *legal*, por la cual se rige la vida de la nación.

Para ello, la tierra se divide, por medio de meridianos, en 24 husos iguales, llamados *husos horarios* y se numeran hacia Oriente, del 0 a 23. El meridiano de Greenwich pasa por el centro del huso 0, con lo que, en cada huso, su meridiano central tendrá una hora local que diferirá de la de Greenwich en un número entero de horas.

De acuerdo con estos husos horarios, cada país ha

elegido como hora oficial o legal la del centro del huso a que pertenece, con lo que se consigue que los países situados en el mismo huso tengan la misma hora y que la diferencia entre la de los diferentes países sea un número exacto de horas. La hora legal adoptada en España es la referida al meridiano de Greenwich, aunque en la actualidad va adelantada en una hora respecto a la del huso y en otras épocas, en dos horas, circunstancia ésta muy a tener en cuenta en las comprobaciones y medidas del tiempo.

37.9. Convenios gnomónicos

Para simplificar la construcción de los relojes de sol, se admiten las hipótesis siguientes:

1ª. Los rayos del sol que llegan a nosotros se consideran paralelos entre sí.

2ª. El Sol describe cada día en la esfera celeste un círculo (paralelo diurno) de plano perpendicular al eje polar cuyo centro, situado siempre sobre dicho eje, varía en posición cada día.

3ª. La duración de este recorrido diurno, que describe con velocidad uniforme, es de veinticuatro horas.

4ª. A una misma hora, durante todos los días del año, el centro del disco solar se encuentra sobre un plano que pasa por el eje polar (plano horario) el cual, a las doce del día (hora solar verdadera), coincide con el meridiano del lugar.

De acuerdo con esta última condición, a las doce del día, el Sol se encontrará sobre el meridiano superior (Fig. 37.4), en el arco de círculo máximo $\widehat{S_i S_v}$ o *curva horaria* de las doce.

Si dividimos ahora el ecuador celeste en 24 partes iguales, numerándolas a partir de las doce, como se ve en la figura, cada punto de división determina con el eje polar el *plano horario* correspondiente a la hora que se trate. La sección de cada plano horario con la esfera, en la zona comprendida entre los paralelos diurnos extremos, es la *curva horaria* respectiva.

En la figura se ha dibujado el plano horario de las doce y cero horas y el de las seis y dieciocho horas, perpendicular al anterior, cuyas trazas con el horizonte son las rectas norte-sur y este-oeste, respectivamente.

Como fácilmente se deduce, el ángulo formado por cada dos planos horarios consecutivos es de $360^\circ : 24 = 15^\circ$.

CONSTRUCCIÓN DE RELOJES DE SOL

37.10. Reloj de sol ecuatorial

Es el más sencillo de los relojes de gnomon paralelo al eje polar, que son los únicos que vamos a estudiar. El cuadrante γ (Fig. 37.5) es perpendicular al

gnomon y por tanto, paralelo al ecuador. De ahí, su nombre. También se llama *equinoccial*, por ser en los equinoccios donde el paralelo diurno del Sol coincide con el ecuador (núm. 37,5).

Si sobre una superficie horizontal plana α se coloca

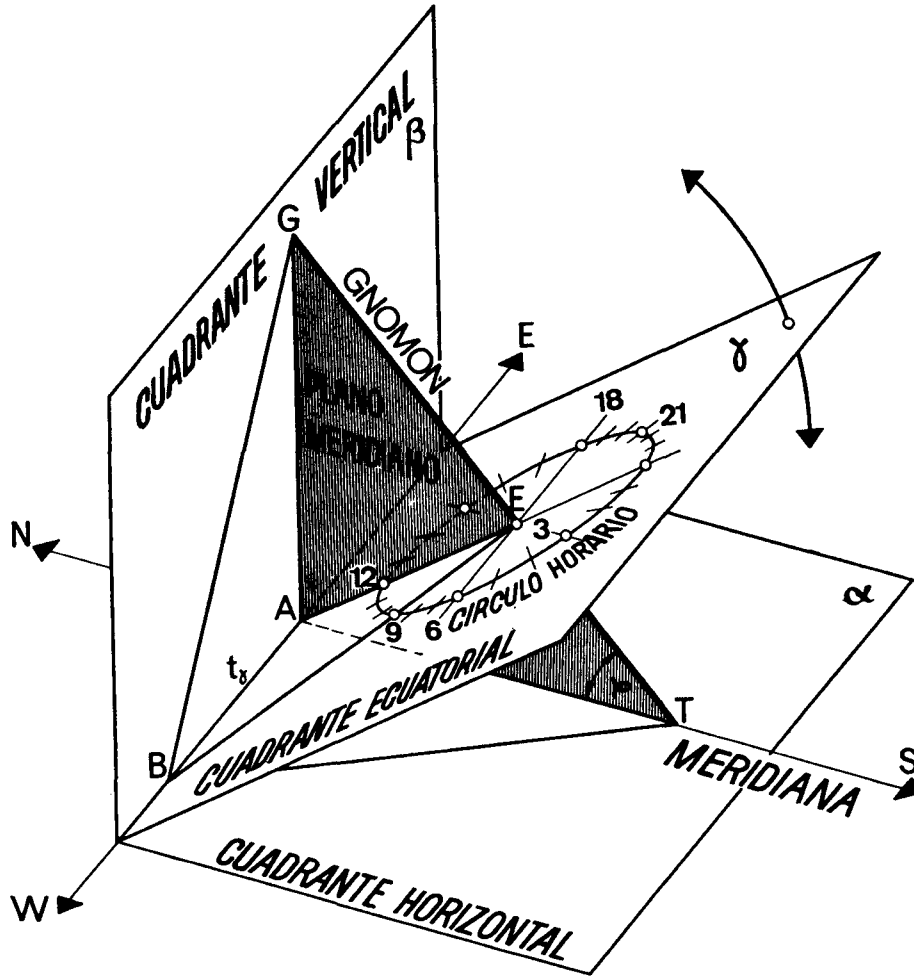


Fig. 37.5.—Cuadrante ecuatorial, horizontal y vertical.

una varilla (gnomon) de traza T , paralela al eje polar, formará con α un ángulo φ igual a la latitud del lugar y se proyectará sobre α , según la meridiana TA . Tracemos luego por un punto E del gnomon, el plano γ perpendicular a él y por su traza t_γ (dirección E-W), el plano vertical β que corta a la varilla, en G . Los planos α , β y γ son cuadrantes de los relojes *horizontal*, *vertical* y *ecuatorial*, de eje común TG .

A las doce, el plano de sombra de la varilla (plano horario) coincide con el meridiano (Figs. 37.4 y 5), de

trazas \overline{TA} , \overline{GA} y \overline{EA} (sombras de la varilla) y a las nueve, por ejemplo, el plano de sombra corta a t_γ en B , y determina las sombras \overline{TB} , \overline{GB} y \overline{EB} arrojadas sobre cada cuadrante, concurrentes en B . La separación angular entre los planos horarios o de sombra es de 15° luego si, con centro en E , trazamos un círculo en el plano ecuatorial (círculo horario) y lo dividimos en 24 partes iguales, por medio de radios, a partir de \overline{EA} , éstos serán las sombras o rectas horarias del reloj ecuatorial. De aquí, la construcción:

Situar el gnomon TG paralelo al eje terrestre y dibujar, sobre un plano γ normal a él, un círculo arbitrario de centro E (traza del gnomon). A partir de la traza \overline{EA} del meridiano, dividir el círculo en 24 partes iguales, por medio de radios (rectas horarias) y numerarlos, como se ve en la figura. La opuesta a las doce es la cero y la normal a \overline{EA} (paralela a E-W), las seis y dieciocho horas.

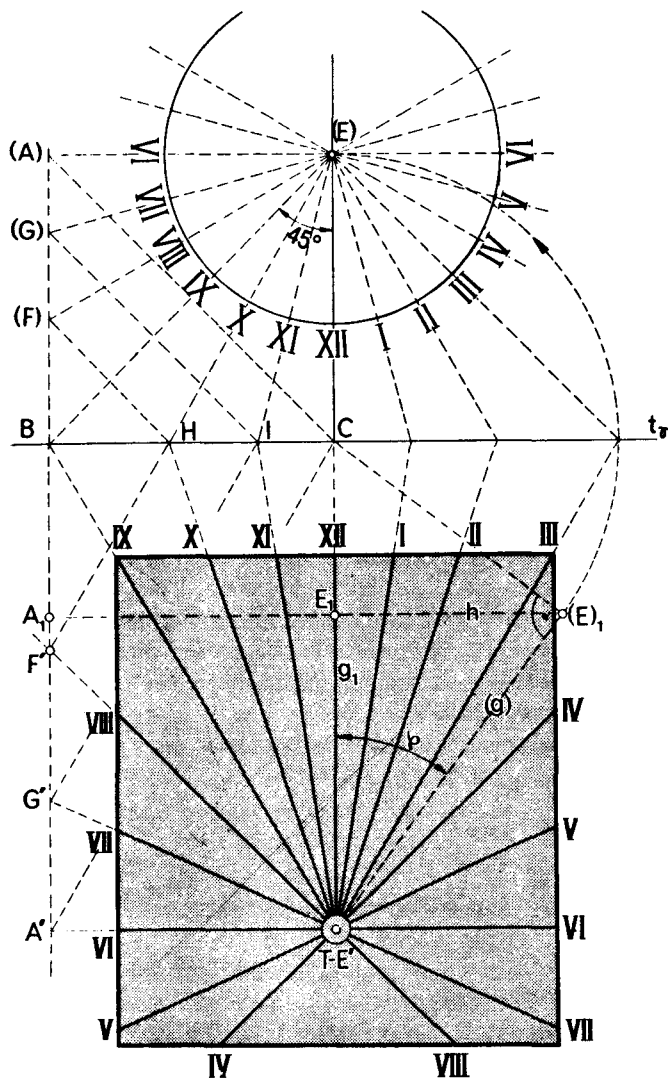


Fig. 37.6.—Reloj horizontal.

Conviene dibujar el círculo horario en las dos caras, prolongando el gnomon lo necesario, puesto que el Sol se encuentra seis meses por encima del cuadrante y otros seis, por debajo, es decir, que cada cara sólo se utiliza durante medio año.

37.11. Reloj horizontal (Fig. 37.6)

Para construir un reloj de sol horizontal, de cuadrante coincidente con el plano del papel y gnomon g , de longitud l y traza T , se dibuja su proyección ortogonal g_1 (coincidente con la dirección norte de la meridiana del lugar) y luego, se abate g , alrededor de g_1 , en (g) , siendo $g_1(g) = \varphi$ la latitud del lugar; $\overline{T(E)}_1 = l$; E_1 , la proyección ortogonal de $(E)_1$ sobre g_1 ; $\overline{T E}_1$, la proyección ortogonal de g sobre el papel (subestilar) y $\overline{E}_1(E)_1 = h$, la altura del extremo E sobre el suelo.

La traza del plano ecuatorial que pasa por E es la perpendicular t_r a g_1 , trazada por C (intersección de g_1 con la normal $(E)_1 C$ a (g)) y (E) es el abatimiento de E , alrededor de t_r , siendo $\overline{C(E)} = \overline{C(E)}_1$.

Con centro en (E) , se traza luego una circunferencia arbitraria (círculo horario equinoccial abatido) y se divide en 24 partes iguales, a partir de la intersección XII con EC , numerándolas como se ve en la figura. Las prolongaciones de los radios cortan a t_r en los puntos C, I, H, \dots etc., que determinan las sombras \overline{TC} , \overline{TI} , \overline{TH} , ... del gnomon, a dichas horas.

A partir de la hora IX, las rectas horarias cortan a t_r fuera del dibujo pero se determinan fácilmente teniendo en cuenta que, en el plano equinoccial, las rectas X, XI y XII son simétricas de las VIII, VII y VI, respecto a $\overline{(E)B}$ y como ésta forma 45° con t_r , $(E)(A)(B)(C)$ es un cuadrado y las rectas $\overline{H(F)}$, $\overline{I(G)}$ y $\overline{C(A)}$, perpendiculares a $\overline{(E)B}$, son paralelas entre sí. Si ahora proyectamos el cuadrado $ABCE$ de plano ecuatorial sobre el papel, en dirección del gnomon, E se proyectará, en $E' \equiv T$; A , en A' , (siendo $\overline{E'A'}$ paralela a t_r) y las paralelas \overline{AC} , \overline{GI} y \overline{FH} , en las paralelas $\overline{A'C}$, $\overline{G'I}$ y $\overline{F'H}$, respectivamente. De aquí, el método a seguir:

Trazar el rectángulo de lados BC y CT . Las paralelas $\overline{IG'}$ y $\overline{HF'}$ a $\overline{CA'}$ cortan a $\overline{BA'}$, en puntos G' y F' que determinan las sombras VII y VIII y sus simétricas V y IV, respecto a g_1 . Prolongando todas, se obtienen las restantes horas.

No queda más que fijar las dimensiones y forma del cuadrante (rectangular de la figura) en cuyos bordes se señala la numeración de las horas.

37.12. Relojes verticales

Existen varias clases de relojes verticales, según la orientación de la traza horizontal de su cuadrante. Si ésta tiene la dirección E-W o N-S, se llama *orientado*. En el primer caso, se subdivide en *meridional* o *septentrional* y en el segundo (cuadrante paralelo al gnomon), en *oriental* u *occidental*.

En los demás casos, se llama *declinante* o *no orientado* y queda definido por el ángulo α que su traza horizontal forma como la dirección E-W (Fig. 37.10). Gran parte de los relojes construidos sobre muros o fachadas de edificios son declinantes, porque las fachadas no suelen estar exactamente orientadas.

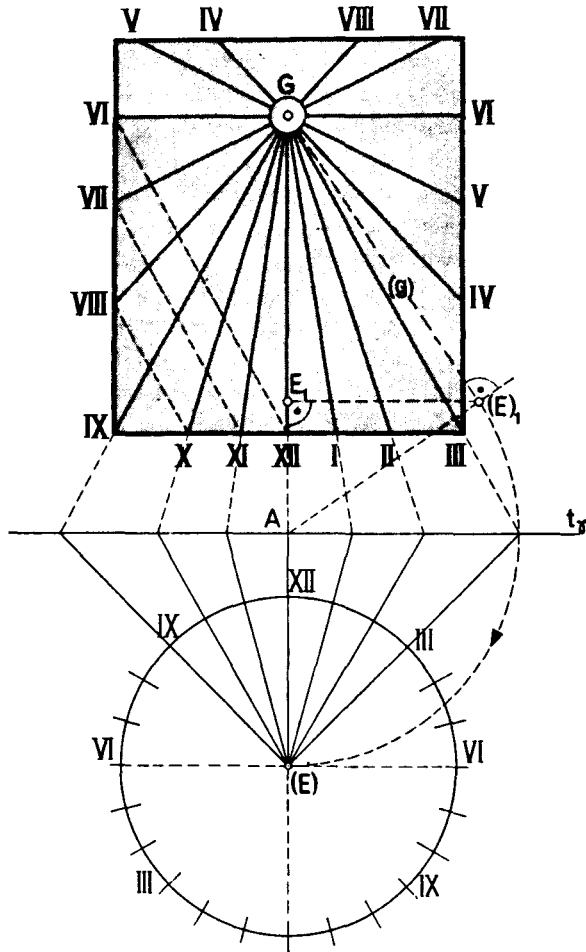


Fig. 37.7. - Reloj meridional orientado.

37.13. Reloj meridional orientado

Es el de cuadrante vertical (Fig. 37.5) que mira al mediodía y cuya traza tiene la dirección E-W. Su construcción es análoga a la del reloj horizontal, como se ve en la figura 37.7.

Una vez elegida la traza G del gnomon con el cuadrante vertical (coincidente con el plano del papel) y su longitud l , se traza la vertical GA (proyección orto-

gonal del gnomon y recta horaria de las XII) coincidente con la meridiana vertical (recta \overline{GA} de la Fig. 37.5) y se abate el gnomon alrededor de ella, en (g) , siendo $\widehat{AG}(E)_1 = 90 - \varphi$ (colatitud del lugar; $\overline{GE}_1 = l$; E_1 , la proyección ortogonal de $(E)_1$ sobre \overline{GA} ; \overline{GE}_1 , la subestilar, y $E_1(E)_1$, la distancia del extremo E al cuadrante.

La traza del plano ecuatorial que pasa por E es la perpendicular t_7 a \overline{GA} , trazada por A (intersección de

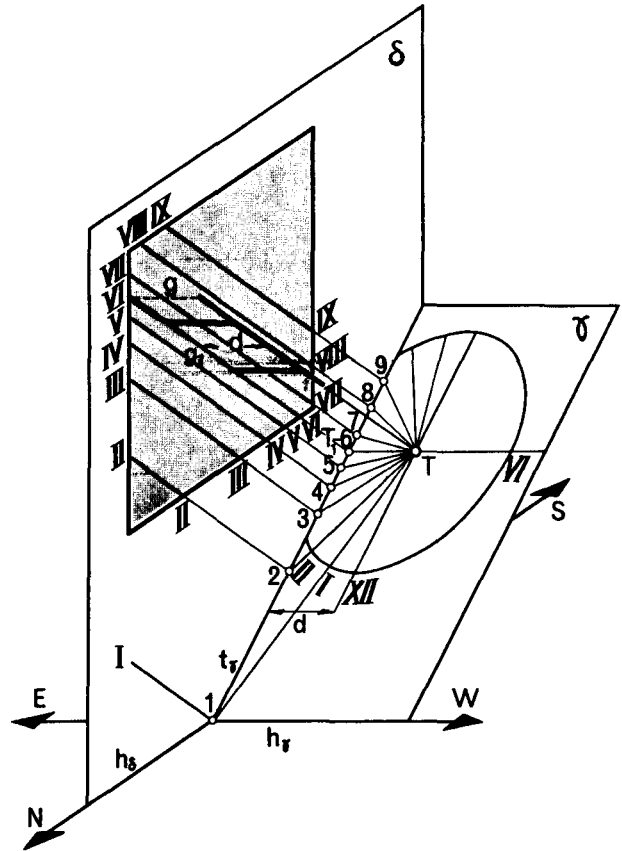


Fig. 37.8. - Reloj occidental orientado.

GA con la normal $(E)_1A$ a (g) y (E) es el abatimiento de E , alrededor de t_7 , siendo $\widehat{A(E)} = \widehat{A(E)_1}$. Podemos así trazar una circunferencia arbitraria de centro (E) (círculo horario equinocial abatido), dividirla en 24 partes iguales, a partir de la intersección XII con \overline{GE}_1 y prolongar los radios horarios hasta cortar a t_7 en puntos que, unidos con (G) , determinan las rectas horarias buscadas.

Las restantes horas se determinan (núm. 37,11) eligiendo un cuadrante rectangular de lados paralelos y normales a \overline{GA} y vértice situado en la recta horaria de

las IX. Las paralelas por XI y X a la recta XII-VI cortan el lado vertical del cuadrante, en los puntos VII y VIII que permiten dibujar las rectas horarias \overline{GVII} y \overline{GVIII} , sus simétricas \overline{GV} y \overline{GIV} y sus prolongaciones respectivas.

El reloj vertical también puede construirse, a partir de uno horizontal ya construido (Fig. 37.5), situando previamente sobre éste la traza horizontal E-W de

aquel (normal a TA) y hallando luego la traza vertical G del gnomon (por abatimiento de éste sobre el horizontal).

Si ahora se prolongan las rectas horarias del cuadrante horizontal hasta cortar a E-W y los puntos de corte se unen con G , cada par de rectas horarias concurrentes en E-W, como las \overline{TB} y \overline{GB} , corresponden a la misma hora y tendrán el mismo número.

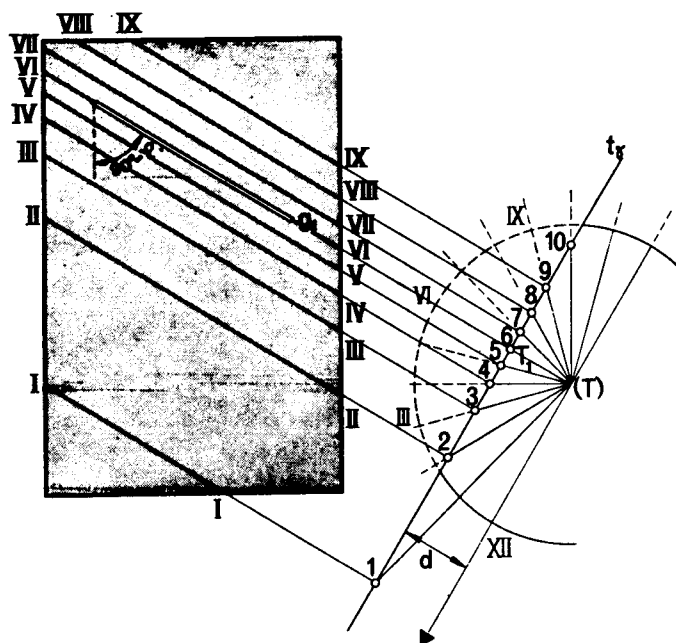


Fig. 37.9.—Construcción del reloj.

37.14. Reloj occidental orientado

El plano δ del cuadrante (Fig. 37.8) mira hacia occidente, es paralelo al gnomon y al meridiano que éste determina y su traza horizontal h_δ es de dirección N-S.

Si por un punto T de la varilla g se traza el plano ecuatorial γ (normal a g) y el círculo horario, de centro T , cada plano horario de g corta a γ según un radio del círculo horario y a δ , según una paralela a g y perpendicular, por tanto, a $t_\gamma \equiv [\gamma, \delta]$. Como se ve en la figura, las rectas horarias de cada cuadrante concurren en un punto de t_γ .

En la figura 37.9, se ha construido un reloj de sol

occidental, situado a distancia d del cuadrante, cuya subestilar g_1 (lo mismo que el gnomon) forma con la vertical el ángulo $90^\circ - \varphi$ (colatitud del lugar).

Por un punto T_1 de g_1 se dibuja la traza t_γ del plano equinoccial (normal a g_1) que corta a g , en T , abatido alrededor de t_γ en (T) , siendo $T_1(T) = d$. Luego se traza el círculo horario, de centro T , y los radios o rectas horarias, a partir de la paralela $(T)XII$ a t_γ , que cortan a t_γ en los puntos 1, 2, ..., 9, por los que pasan las rectas horarias buscadas, paralelas a g_1 .

Finalmente, se fijan las dimensiones y forma del cuadrante (rectangular en la figura) y se señalan en sus bordes los números de las horas. Con el reloj oriental, se procedería de forma análoga.

37.15. Reloj declinante

En la figura 37.10 se ha dibujado un reloj de cuadrante horizontal y gnomon $\overline{TK} \equiv g$ y otro, declinante, de gnomon $\overline{GE} \equiv g$ y cuadrante δ , cuya traza h_δ (de orientación NW-SE) forma con la recta E-W un ángulo α .

El plano meridiano de g corta a ambos cuadrantes, según las meridianas \overline{TA} y \overline{GA} (rectas horarias de las XII). La primera coincide con la subestilar \overline{TK} , y la segunda es vertical pero no coincide con la subestilar \overline{GE} , lo cual permite distinguir a simple vista si el reloj vertical está o no orientado. La subestilar \overline{GE}_2 coincide con la recta que une G con la proyección ortogonal H_{2g} de T sobre h_δ .

Para construir un reloj declinante, partiendo de uno horizontal conocido, se prolonga el gnomon \overline{TK} , hasta su traza G con el plano declinante y las rectas horarias, hasta que corten a h_δ . Las rectas que unen G con dichos puntos de corte son las nuevas rectas horarias.

En diédrica (Fig. 37.11) se supone que los planos de los cuadrantes coinciden con los de proyección. Si se conoce la subestilar \overline{TK}_1 y la altura $h = \overline{K}_1(K)$ del extremo K del gnomon, se dibuja el abatimiento $\overline{T(K)}$, tomando $K_1(K) = h$, normalmente a \overline{TK}_1 . Si sólo se conoce su longitud l , se traza la recta $T(K)$ que forma con \overline{TK}_1 el ángulo φ (latitud del lugar) y se toma sobre ella $\overline{T(K)} = l$.

La dirección E-W es la normal a \overline{TK}_1 , trazada por un punto A de ella, y la traza h_δ (línea de tierra), la recta de orientación NW-SE que forma con la recta E-W el ángulo α . La prolongación de $T(K)$ corta a la recta E-W, en (G) , siendo $A(G) = \overline{AG}$ la altura de la traza $G \equiv V_{1g} - V_{2g}$ del gnomon $g_1 - g_2$.

El gnomon g se abate luego sobre el vertical, en $(g)_1$ (tomando normalmente a g_2 , $\overline{T}H_{2g} = \overline{TH}_{2g}$) y se toma sobre $(g)_1$, $\overline{G(E)} = l$, desabatido en \overline{GE}_2 .

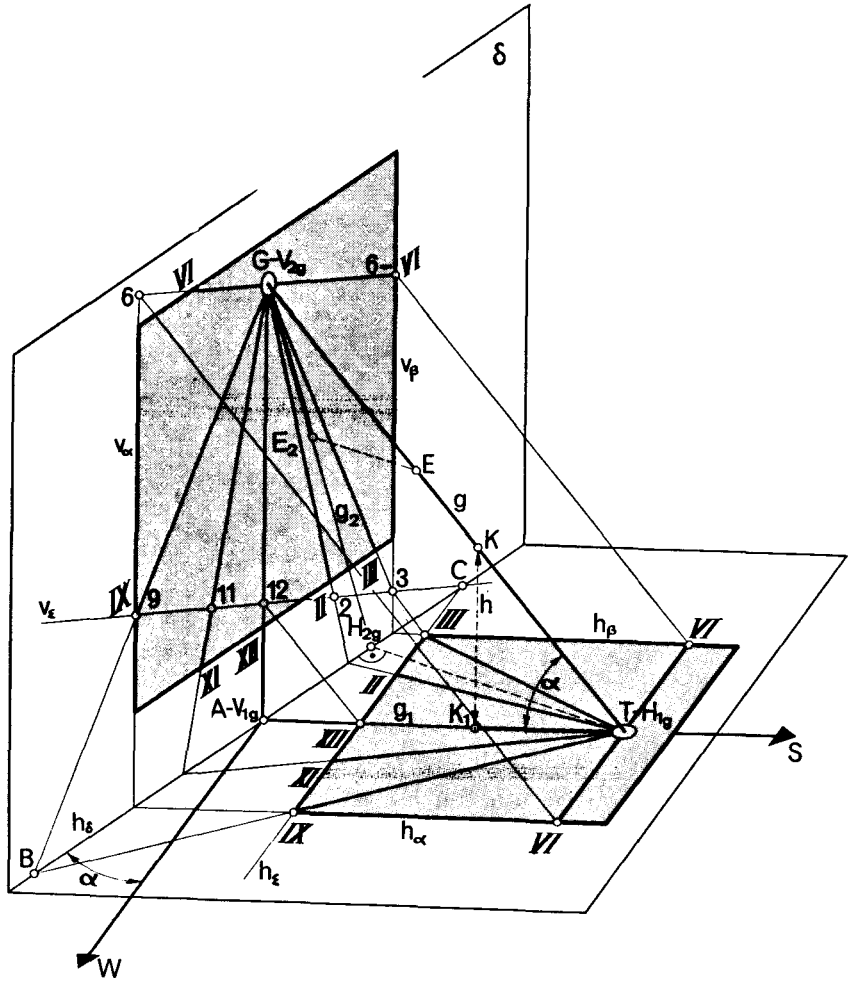


Fig. 37.10.—Reloj declinante.

Las rectas horarias se hallan, prolongando las del cuadrante horizontal, hasta cortar a h_δ y uniendo los puntos de corte con G , obteniendo así las rectas X y XI de la mañana y las I a V de la tarde. Las restantes horas se hallan (núm. 37,11), teniendo en cuenta (Fig. 37.10) que G es la proyección oblicua de T sobre δ , en dirección de la varilla y \overline{GB} , por ejemplo, la de \overline{TB} , volviendo a la figura 37.11, si las rectas II-IV, I-V y XII-VI del plano horizontal son paralelas, sus proyecciones oblicuas sobre δ , también lo son. De aquí, la construcción (Fig. 37.11):

La proyección oblicua de los bordes h_α y h_β del cuadrante, paralelos a TA , son las paralelas v_α y v_β a GA , trazadas por las intersecciones de aquellos con h_δ ; la del vértice III $\equiv [h_\beta, TIII]$ es $3 \equiv [v_\beta, \overline{G3}]$; la del borde h_ϵ , paralelo a TVI , es $v_\epsilon \equiv C3$ que corta a las rectas horarias, en los puntos 9, 10, ..., 2 y 3, proyecciones de IX, X, ..., II y III, y la G-VI, paralela a v_ϵ , la de T-VI.

ÍNDICE DE MATERIAS

	Pág.
Prólogo	7
Notaciones y abreviaturas	9
1. Formas geométricas. Proyección y sección	11
1.1. Elementos geométricos.- 1.2. Formas geométricas. Clasificación.- 1.3. Elementos impropios.- 1.4. Operaciones proyectivas. Proyección y sección.- 1.5. Proyección cónica. Propiedades.- 1.6. Invariantes de la proyección cónica.- 1.7. Proyección cilíndrica.- 1.8. Objeto de la Geometría Descriptiva. Sistemas de representación.	
2. Relaciones entre formas planas, proyecciones y abatimientos	16
2.1. Homologías entre forma plana y proyección.- 2.2. Afinidad entre forma plana y abatimiento o giro.- 2.3. Producto de dos homologías de eje común.- 2.4. Homología entre proyección y abatimiento de una forma plana.- 2.5. Proyección de una homología entre formas planas.	
I. SISTEMA DIÉDRICO	
A. GENERALIDADES	
3. Punto y recta	20
3.1. Generalidades.- 3.2. Representación del punto.- 3.3. Id. de la recta.- 3.4. Puntos nota-	
bles de la recta.- 3.5. Partes vistas y ocultas.- 3.6. Posiciones de la recta.- 3.7. Rectas secantes y paralelas.- 3.8. Posiciones respecto a los bisectores.	
4. El plano. Intersecciones	25
4.1. Representación.- 4.2. Puntos y rectas de un plano.- 4.3. Horizontales y frontales del plano.- 4.4. Rectas de máxima pendiente y máxima inclinación.- 4.5. Posiciones particulares del plano.- 4.6. Planos paralelos.- 4.7. Posiciones relativas a los bisectores.	
INTERSECCIONES.- 4.8. Intersecciones de planos. Método general.- 4.9. Casos particulares.- 4.10. Intersección de recta y plano. Método general.	
INTERSECCIÓN DE RECTAS.- 4.11. Recta que corta a otras tres.- 4.12. Recta que corta a otras dos y es paralela a un plano.- 4.13. Recta que corta a dos dadas y es paralela a otra.	
5. Paralelismo. Perpendicularidad y distancias .	32
5.1. Rectas paralelas.- 5.2. Planos paralelos.- 5.3. Recta paralela a un plano.	
PERPENDICULARIDAD.- 5.4. Teoremas de perpendicularidad.- 5.5. Recta perpendicular a un plano.- 5.6. Plano perpendicular a otro.- 5.7. Recta perpendicular a otra.- 5.8. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.	
DISTANCIAS.- 5.9. Distancia entre dos puntos.- 5.10. Id. de un punto a una recta.- 5.11.	

Id. de un punto a un plano. 5.12. Id. entre rec- tas paralelas.- 5.13. Id. entre planos paralelos.- 5.14. Id. entre rectas que se cruzan.		conjugados.- 10.7. Proyecciones de la circun- ferencia.	
6. Cambios de plano	38	CURVAS ALABEADAS.- 10.8. Generalidades y definiciones.- 10.9. Proyecciones de curvas alabeadas.- 10.10. Representación. 10.11. Hélice cilíndrica.- 10.12. Representación.	
6.1. Generalidades. El punto en los cambios.- 6.2. La recta en los cambios.- 6.3. Nuevas tra- zas del plano en los cambios.			
APLICACIONES. 6.4. Trazado práctico.- 6.5. Vistas laterales y proyecciones auxiliares.- 6.6. Selección de proyecciones y vistas.- 6.7. Medida y perspectiva.- 6.8. Secciones.- 6.9. Disposición de las seis proyecciones principa- les de un cuerpo.			
7. Giros	45	11. Superficies	63
7.1. Generalidades. Giro de un punto.- 7.2. Giro de una recta.- 7.3. Giro de un plano.		11.1. Generalidades y definiciones.- 11.2. Clasificación.- 11.3. Tangente y normal.- 11.4. Orden y clase de una superficie.- 11.5. Intersección de dos superficies.- 11.6. Contorno aparente.- 11.7. Propiedades del contorno aparente.- 11.8. Representación de superficies.	
8. Abatimientos	47	12. Poliedros	68
8.1. Generalidades.- 8.2. Abatimiento del punto.- 8.3. Casos particulares.- 8.4. Abatimiento de la recta.- 8.5. Id. de una figura plana.- 8.6. Problema inverso.		12.1. Generalidades.- 12.2. Contorno aparente.- 12.3. Sección plana.- 12.4. Intersección de una recta con un poliedro.	
9. Ángulos	50	REPRESENTACIÓN DE POLIEDROS REGULARES CONVEXOS.- 12.5. Tetraedro.- 12.6. Hexaedro o cubo.- 12.7. Octaedro.- 12.8. Dodecaedro.- 12.9. Icosaedro.- 12.10. Secciones importantes.	
9.1. Generalidades y definiciones.- 9.2. Ángulo de dos rectas.- 9.3. Id. de recta y plano.- 9.4. Id. de dos planos.		OTROS POLIEDROS.- 12.11. Poliedros con- jugados.- 12.12. Poliedros semiregulares o arquimedianos.- 12.13. Prismas y antiprismas regulares o arquimedianos.	
CASOS PARTICULARES.- 9.5. Ángulo de una recta con los planos de proyección.- 9.6. Id. de un plano con los de proyección.		13. Pirámide	77
		13.1. Superficies radiadas. Generación.- 13.2. Representación de la pirámide.- 13.3. Sección plana.- 13.4. Sección de plano proyectante.- 13.5. Intersección de recta y pirámide.- 13.6. Desarrollo.	
B. CURVAS Y SUPERFICIES		14. Prisma	82
10. Curvas	54	14.1. Representación.- 14.2. Sección plana.- 14.3. Intersección de recta y prisma.- 14.4. Desarrollo.	
10.1. Generalidades y definiciones.- 10.2. Representación de curvas planas.		15. Cono	86
ELIPSE Y CIRCUNFERENCIA.- 10.3. Elipse. Diámetros conjugados.- 10.4. Trazado de la elipse dada por dos diámetros conjuga- dos.- 10.5. Id. de elipse dada por sus ejes.- 10.6. Ejes de la elipse dada por dos diámetros		15.1. Generalidades.- 15.2. Representación.- 15.3. Plano tangente.- 15.4. Aplicación al dié-	

drico.- 15.5. Sección plana.- 15.6. Secciones planas del cono de revolución.- 15.7. Intersección de recta y cono.- 15.8. Desarrollo.

16. Cilindro 93

16.1. Representación.- 16.2. Plano tangente.- 16.3. Secciones planas.- 16.4. Intersección de recta y cilindro.- 16.5. Desarrollo.

17. Superficies de revolución 98

17.1. Generalidades y definiciones.- 17.2. Representación.- 17.3. Tangencia. Propiedades.- 17.4. Sección plana.- 17.5. Intersección con una recta.

ESFERA.- 17.6. Representación.- 17.7. Sección plana.- 17.8. Intersección de recta y esfera.- 17.9. Plano tangente.

OTRAS SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.- 17.10. Superficies engendradas por rectas.- 17.11. Id. por cónicas.

18. Intersección de superficies 106

18.1. Método general.- 18.2. Clasificación.

SUPERFICIES RADIADAS.- 18.3. Planos auxiliares y límites.- 18.4. Penetración.- 18.5. Mordedura.- 18.6. Penetración tangencial o límite.- 18.7. Penetración mutua o máxima.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.- 18.8. Ejes coincidentes.- 18.9. Ejes paralelos.- 18.10. Ejes concurrentes.- 18.11. Ejes no coplanarios.

CUADRICAS DE REVOLUCIÓN.- 18.12. Propiedades generales.- 18.13. Ejes concurrentes y circunscritos a una esfera.- 18.4. Ejes concurrentes.- 18.15. Ejes paralelos.

APLICACIONES.- 18.16. Luneto cilíndrico recto.- 18.17. Id. oblicuo.- 18.18. Otros lunetos.- 18.19. Bóvedas.- 18.20. Tuberías.

C. SOMBRAS

19. Generalidades 120

19.1. Definiciones y convenios.- 19.2. Sombra

del punto.- 19.3. Sombra de la recta.- 19.4. Sombra de líneas.- 19.5. Plano limitador.- 19.6. Sombras de poliedros.- 19.7. Sombra del cono.- 19.8. Id. del cilindro.- 19.9. Id. de superficies de revolución.- 19.10. Id. de la esfera.- 19.11. Separatriz de sombra de dos superficies con una curva común.- 19.12. Sombra de un cuerpo sobre otro.

20. Ejercicios de sombras 130

LÍNEAS Y SUPERFICIES PLANAS.- 20.1. Sombra de figura plana de perfil.- 20.2. Id. de recta sobre una artesa.- 20.3. Id. de recta sobre esfera.- 20.4. Id. de circunferencia de plano inclinado.- 20.5. Id. de circunferencia sobre superficie cilíndrica.

POLIEDROS.- 20.6. Sombra del cubo.- 20.7. Id. de pirámide hueca.- 20.8. Id. de prisma sobre otro.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.- 20.9. Sombra autoarrojada de semiesfera hueca.- 20.10. Id. del nicho esférico.- 20.11. Id. de cono sobre cilindro.- 20.12. Id. del toro.- 20.13. Id. de cilindro sobre cono.

II. SISTEMA ACOTADO

21. Punto, recta y plano 139

21.1. Generalidades.- 21.2. Representación del punto.- 21.3. Id. de la recta.- 21.4. Graduación de una recta.- 21.5. Representación del plano.

EJERCICIOS.- 21.6. Cota de un punto de un plano.- 21.7. Recta de máxima pendiente de un plano, dado por tres puntos.- 21.8. Por un punto de un plano, trazar en él una recta de pendiente dada.

22. Intersecciones y abatimientos 144

22.1. Intersección de planos.- 22.2. Casos particulares.- 22.3. Intersección de tres planos.- 22.4. Id. de recta y plano.- 22.5. Casos particulares.

ABATIMIENTOS.- 22.6. Abatimiento de un punto.- 22.7. Id. de una recta.- 22.8. Id. de una figura plana.

APLICACIONES.- 22.9. Tejados.
 Generalidades.- 22.10. Intersecciones de tejados.

III. SISTEMA AXONOMÉTRICO

A. AXONOMETRÍA ORTOGONAL

23. Paralelismo. Perpendicularidad. Distancias y ángulos 149

23.1. Rectas paralelas.- 23.2. Planos paralelos.- 23.3. Paralelismo de recta y plano.

PERPENDICULARIDAD.- 23.4. Recta perpendicular a un plano.- 23.5. Id. trazada por un punto.- 23.6. Plano normal a una recta, trazado por un punto.

DISTANCIAS.- 23.7. Distancia entre dos puntos.- 23.8. Id. de un punto a un plano. 23.9. Id. de un punto a una recta.- 23.10. Id. entre rectas paralelas.- 23.11. Id. entre planos paralelos.

ÁNGULOS.- 23.12. Ángulo de dos rectas.- 23.13. Id. de una recta con el plano de proyección.- 23.14. Id. de un plano con el de proyección.

24. Líneas. Superficies y terrenos 153

24.1. Representación de líneas.- 24.2. Id. de superficies y cuerpos.

TERRENOS.- 24.3. Superficies topográficas. Representación.- 24.4. Equidistancias.- 24.5. Curvas de nivel.- 24.6. Líneas de máxima pendiente.- 24.7. Cotas de puntos situados entre dos curvas de nivel.- 24.8. Trazado de perfiles.- 24.9. Formas del terreno. a) Vertiente o ladera. b) Divisoria. c) Valle o vaguada. d) Puerto o collado.

25. Aplicaciones 158

25.1. Recta de pendiente dada apoyada en curvas de nivel consecutivas.- 25.2. Camino de pendiente dada entre curvas de nivel- 25.3. Id. entre dos puntos A y B.- 25.4. Galerías rectilíneas subterráneas.- 25.5. Conos de talud.- 25.6. Talud de borde alabeado. Método de envolventes.- 25.7. Casos particulares.- 25.8. Método de perfiles.- 25.9. Comparación de ambos métodos.- 25.10. Vertedero de tierras.- 25.11.- Explanación horizontal.- 25.12. Taludes de carretera.- 25.13. Taludes de carretera por el método de perfiles.- 25.14. Trazado práctico de carreteras.

26. Punto, recta y plano 169

26.1. Generalidades.- 26.2. Sistemas axonométricos.- 26.3. Coeficientes de reducción, escalas e inclinación de los ejes.- 26.4. Determinación de ejes, coeficientes, ángulos y escalas.- 26.5. Representación del punto.- 26.6. Representación de la recta.- 26.7. Rectas que se cortan.- 26.8. Posiciones de la recta.- 26.9. Representación del plano. 26.10. Posiciones del plano.- 26.11. Paralelismo de rectas y planos.

27. Intersecciones. Abatimientos y perpendicularidad. Formas planas 178

27.1. Intersección de planos.- 27.2. Traza ordinaria de un plano.- 27.3. Intersección de recta y plano.

ABATIMIENTOS.- 27.4. Abatimiento de planos coordenados.- 27.5. Id. de un plano cualquiera.- 27.6. Distancia entre dos puntos.

PERPENDICULARIDAD.- 27.7. Recta perpendicular a un plano.- 27.8. Plano perpendicular a una recta.- 27.9. Recta perpendicular a otra.

FORMAS PLANAS.- 27.10. Método general.- 27.11. Perspectiva de un cuadrado.- 27.12. Perspectiva de circunferencias.

28. Perspectiva de cuerpos 184

28.1. Sistemas axonométricos ortogonales.- 28.2. Paso del diédrico al axonométrico.- 28.3. Partes vistas y ocultas.

REPRESENTACIÓN DE CUERPOS.- 28.4. Poliedro.- 28.5. Pirámide.- 28.6. Cilindro.- 28.7. Cono.- 28.8. Esfera.

B. AXONOMETRÍA OBLICUA

29. Abatimientos, perpendicularidad y figuras planas 194

29.1. Axonometría oblicua. Generalidades.- 29.2. Plantas auxiliares semejantes a las rea-

les.- 29.3. Método de falso abatimiento.- 29.4. Método de plantas independientes.

PERSPECTIVA FRONTAL.- 29.5. Generalidades.- 29.6. Perspectiva caballera.- 29.7. Id. militar.- 29.8. Representación de punto, recta y plano.

ABATIMIENTO Y PERPENDICULARIDAD.- 29.9. Abatimientos.- 29.10. Distancia entre dos puntos.- 29.11. Recta perpendicular a un plano.- 29.12. Plano perpendicular a una recta.

FIGURAS PLANAS.- 29.13. Método general.- 29.14. Circunferencia de plano coordenado.- 29.15. Id. de plano cualquiera.

30. Perspectiva de cuerpos. Sombras 204

30.1. Generalidades.- 30.2. Perspectiva práctica. Normas de trazado.- 30.3. Perspectiva rápida de figuras.- 30.4. Superficies de revolución.- 30.5. Esfera.- 30.6. Intersección de superficies.

SOMBRA.- 30.7. Dirección de iluminación.- 30.8. Sombra de punto y recta.- 30.9. Id. de figura planas.- 30.10. Id. de cuerpos.- 30.11. Id. de un cuerpo sobre otro.- 30.12. Sombra autoarrojada.

IV. SISTEMA CÓNICO

31. Proyección cónica o central 212

31.1. Generalidades.- 31.2. Representación de la recta.- 31.3. Id. del plano.- 31.4. Casos particulares.

INTERSECCIONES.- 31.5. Intersección de rectas.- 31.6. Id. de planos.- 31.7. Id. de recta y plano.

PARALELISMO.- 31.8. Condición general de paralelismo.- 31.9. Paralelismo de rectas.- 31.10. Id. de planos.- 31.11. Id. de recta y plano.

ABATIMIENTOS.- 31.12. Generalidades.- 31.13. Abatimiento de un plano.

PERPENDICULARIDAD.- 31.14. Generalidades.- 31.15. Recta perpendicular a otra.- 31.16. Planos perpendiculares.

ÁNGULOS.- 31.17. Ángulo de dos rectas.- 31.18. Id. de dos planos.- 31.19. Id. de recta con el cuadro. Círculo de inclinación.- 31.20. Círculo de medida de una recta. Punto de medida.- 31.21. Construcciones auxiliares.

32. Perspectiva líneal 223

32.1. Generalidades.- 32.2. Representación del punto.- 32.3. Id. de la recta.- 32.4. Id. del plano.- 32.5. Intersecciones y paralelismo.- 32.6. Abatimientos.- 32.7. Perpendicularidad.- 32.8. Ángulos. Círculo de inclinación.- 32.9. Círculo y punto de medida.- 32.10. Coordenadas perspectivas del punto.

CONSTRUCCIONES AUXILIARES.- 32.11. Punto de vista reducido.- 32.12. Punto de medida reducido.

33. Perspectiva de líneas y superficies. Perspectiva práctica 233

33.1. Perspectiva de la circunferencia.- 33.2. Circunferencia de plano α .- 33.3. Id. de plano vertical.- 33.4. Id. de plano horizontal.- 33.5. Cilindro.- 33.6. Cono.- 33.7. Superficie de revolución.- 33.8. Esfera. 1º) Por abatimiento.- 2º) Método directo.

PERSPECTIVA PRÁCTICA.- 33.9. Cono óptico. Círculo de visión.- 33.10. Deformaciones de observación.- 33.11. Elección de datos.

34. Métodos perspectivos. Cuadro inclinado . 242

34.1. Generalidades.- 34.2. Método directo o de trazas de visuales.- 34.3. Id. de coordenadas.- 34.4. Id. de trazas y puntos de fuga.- 34.5. Id. de planta y altura. Geometral auxiliar.- 34.6. Id. de abatimiento.- 34.7. Id. de corte. Perspectiva frontal.- 34.8. Id. de planta y vistas separadas.- 34.9. Método de Reile.- 34.10. Perspectiva de terrenos.

CUADRO INCLINADO.- 34.11. Generalidades.- 34.12. Propiedades.- 34.13. Caso general.- 34.14. Geometral auxiliar.- 34.15. Perspectiva de suelo y techo o de cuadro horizontal.

**35. Restituciones perspectivas.
Reflejos y sombras 256**

35.1. Generalidades.- 35.2. Restitución de cuadro vertical.- 35.3. Id. de cuadro inclinado.- 35.4. Resumen.

REFLEJOS.- 35.5. Generalidades.- 35.6. Simetría de imágenes de cuadro vertical.- 35.7. Partes vistas de figuras reflejadas.- 35.8. Dibujo de reflejos.

SOMBRAS.- 35.9. Iluminación.- 35.10. Sombra arrojada sobre el horizontal.- 35.11. Sombras sobre planos verticales.- 35.12. Sombras sobre otras superficies.

V. GNOMONICA Y RELOJ DE SOL

36. Proyección gnomonica 264

36.1. Generalidades.- 36.2. Representación de la recta.- 36.3. Id. del plano.- 36.4. Abatimientos.- 36.5. Perpendicularidad.

EJERCICIOS.- 36.6. Plano bisector de un diedro.- 36.7. Ángulo de recta y plano.- 36.8. Recta contenida en un plano y que forme con el cuadro un ángulo dado.- 36.9. Triedro trirectángulo de caras cuyas trazas forman un triángulo isósceles de base conocida.- 36.10. Triedro dado por un diedro y las caras que lo forman.

37. Reloj de sol 269

37.1. Generalidades.- 37.2. Coordenadas geográficas.- 37.3. Orientación.- 37.4. Esfera celeste.- 37.5. Movimientos aparentes del sol.- 37.6. Coordenadas horizontales.- 37.7. Recorrido del sol por el horizonte.- 37.8. Medida del tiempo. Clase de horas.- 37.9. Convenios gnomónicos.

CONSTRUCCIÓN DE RELOJES DE SOL.- 37.10. Reloj de sol ecuatorial.- 37.11. Id. horizontal.- 37.12. Relojes verticales.- 37.13. Reloj meridional orientado.- 37.14. Id. occidental orientado.- 37.15. Id. declinante.- 37.16. Observaciones.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA SUPERIOR Y APLICADA

Esta obra es el fruto de la labor docente desarrollada por el autor en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid. Después de dedicar las primeras lecciones a exponer los conocimientos básicos de Geometría Proyectiva, estudia las propiedades geométricas de líneas y superficies, su representación en las cuatro sistemas y las numerosas aplicaciones y posibilidades de empleo en Ingeniería y Arquitectura.

Sus enseñanzas no se reducen, por tanto, a la Geometría Descriptiva, sino que también abarca la Geometría métrica, proyectiva y aplicada; es decir, la que modernamente se llama Geometría técnica o constructiva, por ser tan necesaria e imprescindible en la formación del Técnico Superior.

Ha sido declarada de Utilidad Pública por el Ministerio de Educación y Ciencia, por Orden de 10 de Abril de 1978. Contiene 78 fotografías y más de 700 figuras, lo cual demuestra el valor didáctico de la obra y la utilidad que puede reportar a los estudiantes de las Escuelas Técnicas Superiores de Ingeniería y Arquitectura.

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Comprende más de 900 ejercicios, resueltos en los sistemas diédrico, acotado, axonométrico y cónico y abarca las materias siguientes:

TOMO I

CÓNICAS 1.—Trazado de cónicas

SISTEMA DIÉDRICO

2.—Punto, recta y plano. 3.—Intersecciones y paralelismo. 4.—Perpendicularidad y distancias. 5.—Abatimientos y formas planas. 6.—Giros. 7.—Cambios de plano. 8.—Ángulos

SUPERFICIES POLIEDRALES: 9.—Prisma y pirámide. 10.—Poliedros regulares y otros.

SUPERFICIES REGLADAS DESARROLLABLES: 11.—Cono y cilindro. 12.—Otras superficies desarrollables.

SUPERFICIES REGLADAS ALABEADAS: 13.—Regladas, anaxiales y axiales. 14.—Regladas biaxiales.

CUÁDRICAS: 15.—Hiperboloide reglado. 16.—Paraboloide reglado 17.—Cuádricas elípticas.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN: 18.—Esfera, cilindro y cono. 19.—Intersecciones y sombras. 20.—Otras superficies de revolución.

TOMO II

SISTEMA ACOTADO

21.—Punto, recta y plano. 22.—Paralelismo, perpendicularidad y abatimientos. 23.—Líneas y superficies. 24.—Tejados y cubiertas. 25.—Superficies topográficas. 26.—Sombras.

TOMO III

AXONOMETRÍA ORTOGONAL

27.—Generalidades. 28.—Sistema trimétrico. 29.—Sistema dimétrico. 30.—Sistema isométrico.

AXONOMETRÍA OBLICUA

31.—Generalidades. 32.—Perspectiva caballera. 33.—Perspectiva militar.

TOMO IV

SISTEMA CÓNICO

34.—Proyección cónica. Generalidades. 35.—Construcciones auxiliares. 36.—Perspectiva lineal. 37.—Perspectiva de cuadro inclinado. 38.—Perspectiva de cuadro horizontal. 39.—Sombras

Merece destacarse la didáctica ordenación de estos ejercicios y la sencillez con que el autor los resuelve y explica. Eso, unido a la notable claridad de sus figuras que tan importante es en estas cuestiones, hace que esta obra sea de gran interés para los estudiantes de Escuelas Técnicas de grado superior y medio, Academias Militares, Dibujantes, Delineantes y demás carreras técnicas.

ISBN 84-922109-5-8



9 788492 210954